УДК 517.929

Д. А. Взовский

Об одном подходе к исследованию устойчивости линейных дифференциальных систем нейтрального типа

Исследование некоторых систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом нейтрального типа сводится в работе к исследованию систем запаздывающего типа.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом нейтрального типа

$$x'(t)+C(t)x'(t-\tau(t))=A(t)x(t)+B(t)x(t-\Delta(t)), \qquad 1)$$

$x(t)\in R^n$, с непрерывными на действительной полуоси $[t_0, \infty)$ $n\times n$-матрицами $A(t)$ и $B(t)$ и с непрерывно дифференцируемой на всей оси R^1 $n\times n$-матрицей $C(t)$; $\Delta(t)\in C^0([t_0,\infty),[0,\infty))$, $\tau(t)\in C^2(R^1,[0,\infty))$, причем $\tau'(t)\neq 1$, $t\in R^1$,

$$\sup_{t\leqslant a}\|C(t)/(\tau'(t)-1)\|<1 \quad \forall a\in R^1 \qquad (2)$$

($\|\cdot\|$ — норма матрицы). Пусть E_0 — начальное множество системы (1) с начальной точкой t_0 (см. [1]).

Определение 1. *Обобщенное решение системы* (1) *с начальной функцией* $\varphi(t)\in C^0(E_0,R^n)$ *есть функция* $x(t)\in C^0((t_0,b),R^n)$, $t_0<b\leqslant\infty$, *если существует функция* $y(t)\in C^1((t_0,b),R^n)$ *такая, что значения* $x(t)$, $y(t)$ *и* $y'(t)$ *удовлетворяют при всех* $t\in(t_0,b)$ *системе*

$$x(t)=P(t)x(t-\tau(t))+y(t), \qquad (3)$$

$$y'(t)=A(t)x(t)+B(t)x(t-\Delta(t))+D(t)x(t-\tau(t)), \qquad (4)$$

где $P(t)=C(t)/(\tau'(t)-1)$, $D(t)=-P'(t)$, *при условии, что* $x(t)=\varphi(t)$ *при* $t\in E_0$ *и* $y(t_0)=\varphi(t_0)-P(t_0)\varphi(t_0-\tau(t_0))$.

Замечание 1. Каждое решение основной начальной задачи для системы (1) с начальной функцией $\varphi(t)\in C^1(E_0, R^n)$ (см. [1]) — обобщенное. Ввиду специфических особенностей уравнений нейтрального типа указанная задача изучается при дополнительных предположениях относительно функции $\tau(t)$ [1, 2].

Обозначим $\theta_0(t)=t$, $C_0(t)=E$, $\theta_n(t)=\theta_{n-1}[t-\tau(t)]$, $C_n(t)=\prod_{k=0}^{n-1}P[\theta_k(t)]$ для натуральных чисел $n\geqslant 1$, $t\in R^1$.

Рассмотрим систему функциональных уравнений

$$x(t)=P(t)x(t-\tau(t))+f(t), \quad x(t)\in R^n, \quad t\in(-\infty,a), \quad a\in R^1. \qquad (5)$$

Лемма 1. *Пусть* $n\times n$*-матрица* $P(t)$ *непрерывна на полуоси* $(-\infty,a)$, $\tau(t)\in C^0((-\infty,a),[0,\infty))$, $f(t)\in C^0((-\infty,a),R^n)$, *а также* $\sup_{t<a}\|P(t)\|<1$, $\sup_{t<a}\|f(t)\|<\infty$. *Тогда*

$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(t)f[\theta_n(t)] \qquad (6)$$

есть единственное непрерывное решение системы (5) *на полуоси* $(-\infty, a)$.

Доказательство леммы очевидно.

Вместе с системой (1) рассмотрим систему дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом запаздывающего типа

$$y'(t)=A(t)y(t)+H(t)\sum_{n=0}^{\infty}C_n(t-\tau(t))y[\theta_{n+1}(t)]+B(t)\sum_{n=0}^{\infty}C_n(t-\Delta(t))\times$$
$$\times y[\theta_n(t-\Delta(t))], \qquad (7)$$

где $H(t) = A(t) P(t) - P'(t)$. Пусть E_1 — начальное множество системы (7) с начальной точкой t_0.

Теорема 1. *Функция* $x(t) \in C^0((t_0, \infty), R^n)$ — *обобщенное решение системы* (1) *с ограниченной начальной функцией* $\varphi(t) \in C^0(E_0, R^n)$ *тогда и только тогда, когда функция*

$$y(t) = x(t) - P(t) x(t - \tau(t)), \qquad t \in (t_0, \infty), \tag{8}$$

есть решение системы (7) *с ограниченной начальной функцией* $\psi(t) \in C^0(E_1, R^n)$.

Доказательство. 1. Пусть $x(t)$ — обобщенное решение системы (1) на полуоси (t_0, ∞) с ограниченной на E_0 начальной функцией $\varphi(t) \in C^0(E_0, R^n)$, $\Phi(t)$ — непрерывное ограниченное продолжение на полуось $(-\infty, t_0]$ функции $\varphi(t)$. Положим $x(t) = \Phi(t)$ при $t \in (-\infty, t_0]$. Рассмотрим функцию $y(t)$, определяемую формулой (8), а также функцию $\Psi(t) = \Phi(t) - P(t)\Phi(t - \tau(t))$ при $t \in (-\infty, t_0]$. Положим $y(t) = \Psi(t)$ при $t \in (-\infty, t_0]$. Тогда на основании леммы 1, где $a \in R^1$ — произвольно, имеет место равенство (6) при $f(t) = y(t)$, $t \in R^1$. Согласно определению обобщенного решения системы (1) при $t \in (t_0, \infty)$ справедливо равенство (4). Отсюда, учитывая (6) при указанных условиях, получаем, что значения $y(t)$, $y'(t)$ при $t \in (t_0, \infty)$ удовлетворяют системе (7) при начальном условии $y(t) = \psi(t)$, $t \in E_1$, где $\psi(t)$ — сужение $\Psi(t)$ на E_1, причем $\sup\limits_{t \in E_1} \|\psi(t)\| < \infty$.

2. Пусть $y(t)$ — решение системы (7) на полуоси (t_0, ∞) с ограниченной на E_1 начальной функцией $\psi(t) \in C^0(E_1, R^n)$, $\Psi(t)$ — непрерывное ограниченное продолжение $\psi(t)$ на полуось $(-\infty, t_0]$. Рассмотрим систему функциональных уравнений (5) при $t \in R^1$, где $f(t) = y(t)$, дополнительно полагая $y(t) = \Psi(t)$ при $t \in (-\infty, t_0]$. Применяя лемму 1 получим, что данная система имеет решение $X(t) \in C^0(R^1, R^n)$, причем выполнено равенство (6) при $t \in R^1$, где $x(t) = X(t)$, $f(t) = y(t)$.

Пусть $\Phi(t)$ — сужение $X(t)$ на полуось $(-\infty, t_0]$, $\varphi(t)$ — сужение $X(t)$ на E_0, $x(t)$ — сужение $X(t)$ на полуось (t_0, ∞). Тогда выполнено равенство (8) при условии, что $x(t) = \varphi(t)$ при $t \in E_0$.

В силу системы (7), используя указанное выше, получаем, что значения $x(t)$, $y(t)$ и $y'(t)$ удовлетворяют системе (3), (4) при всех $t \in (t_0, \infty)$ и при начальном условии $x(t) = \varphi(t)$, $t \in E_0$. Следовательно, $x(t)$ — обобщенное решение системы (1) на полуоси (t_0, ∞), удовлетворяющее условиям теоремы 1. Теорема доказана.

Замечание 2. Из теоремы 1 следует, что система (1) при любой ограниченной на E_0 начальной функции $\varphi(t) \in C^0(E_0, R^n)$ имеет обобщенное решение на полуоси (t_0, ∞).

Пусть $x(t; \varphi)$ — обобщенное решение с начальной функцией $\varphi(t)$, $K_\delta = \{\varphi(t) \in C^0(E_0, R^n) : \sup\limits_{t \in E_0} \|\varphi(t)\| < \delta\}$.

Определение 2. *Система* (1) *обобщенно устойчива, если* $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists \delta > 0)$ $(\forall \varphi(t) \in K_\delta)$ $(\forall t \in (t_0, \infty))$ $\|x(t; \varphi)\| < \varepsilon$.

Лемма 2. *Система* (1) *обобщенно устойчива тогда и только тогда, когда при любой ограниченной на* E_0 *начальной функции* $\varphi(t) \in C^0(E_0, R^n)$ *обобщенное решение* $x(t; \varphi)$ *ограничено на полуоси* (t_0, ∞).

Доказательство леммы проводится по схеме доказательства теоремы работы [3] (см. также [4], § 9), поскольку имеет место непрерывная зависимость обобщенного решения от начальной функции $\varphi(t) \in C^0(E_0, R^n)$ (см. условие (2)).

На основании теоремы 1, леммы 2 и результата работы [3] справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Система* (1) *обобщенно устойчива тогда и только тогда, когда устойчиво тривиальное решение системы* (7).

В силу теоремы 2 с учетом замечания 1 заключаем, что исследование достаточных условий устойчивости тривиального решения системы (1) в метрике C^0 (см. [1]) может быть сведено к исследованию устойчивости тривиального решения системы запаздывающего типа (7). Используем, например, метод дифференциальных неравенств для систем запаздывающего типа [5]. Пусть $a(t)$ — наибольший характеристический корень симметрической матрицы $[A(t) + A^T(t)]/2$, где $A^T(t)$ — транспонированная матрица $A(t)$, $\|\cdot\|$ — евклидова норма матрицы,

$$\beta(t) = \begin{cases} \| H(t) \| + \| B(t) \|, & \text{если } \Delta(t) \not\equiv \tau(t), \\ \| H(t) + B(t) \|, & \text{если } \Delta(t) \equiv \tau(t). \end{cases}$$

Теорема 3. *Пусть, сверх указанного, для системы* (1) *выполнены условия:* $\tau(t) > 0$, $a(t) + \beta(t)/(1 - \gamma(t)) \leqslant 0$ *при* $t \in (t_0, \infty)$, $\gamma(t) = \sup\limits_{s \leqslant t} \| P(s) \|$. *Тогда тривиальное решение системы* (1) *устойчиво в метрике* C^0.

Полученные результаты допускают обобщение на системы нейтрального типа с произвольным числом отклонений аргумента. Метод редукции к уравнениям запаздывающего типа применим также к классу линейных уравнений нейтрального типа, введенному в работах Дж. К. Хейла и М. А. Круса (см., например, [6]).

1. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— М. : Наука, 1971.— 296 с.
2. *Зверкин А. М.* Об определении понятия решения для уравнений с отклоняющимся аргументом нейтрального типа.— Тр. семинара по теории дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом. М., 1967, 4, с. 278—283.
3. *Зверкин А. М.* О связи между ограниченностью и устойчивостью решений линейных систем с бесконечным числом степеней свободы.—Дифференц. уравнения, 1967, 4, № 2, с. 366—367.
4. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.— М. : Наука, 1972.— 351 с.
5. *Зверкин А. М.* Применение теорем сравнения к исследованию устойчивости уравнений с запаздыванием.— Тр. семинара по теории дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом. М., 1969, 7, с. 3—16.
6. *Cruse M. A., Hale J. K.* Stability of functional differential equation of neutral type.— J. Diff. Eq., 1970, 7, p. 334—355.

Автомоб.-дор. ин-т, Москва

Поступила 07.04.83