УДК 519.21

*В. С. Королюк, Б. Пирлиев*

# Случайное блуждание на полуоси на суперпозиции двух процессов восстановления

Пусть заданы следующие последовательности неотрицательных одинаково распределенных независимых в совокупности случайных величин: $\{\theta_n, n \geqslant 1\}$, $\{\eta_n, n \geqslant 1\}$, $\{\varkappa_n, n \geqslant 1\}$ и $\{\alpha_n, n \geqslant 1\}$ с функциями распределения

$$P(v) = P\{\theta_n \leqslant v\},\ Q(v) = P\{\eta_n \leqslant v\},\ G(t) = P\{\varkappa_n \leqslant t\},\ G(+0) = 0,$$
$$P\{\alpha_n \leqslant t\} = 1 - \exp(-at),\ a > 0,$$

и характеристическими функциями

$$p(s) = M\exp(is\theta_n) = \int_0^\infty \exp(isv)\,dP(v),\ q(s) = M\exp(is\eta_n) =$$
$$= \int_0^\infty \exp(isv)\,dQ(v),\ g(\lambda) = M\exp(-\lambda\varkappa_n) = \int_0^\infty \exp(-\lambda t)\,dG(t).$$

Пусть $S_n = \sum_{k=1}^n \theta_k,\ w_n = \sum_{k=1}^n \eta_k,\ \sigma_n = \sum_{k=1}^n \varkappa_k,\ \delta_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k,\ n \geqslant 1,\ s_0 = w_0 = \sigma_0 = \delta_0 = 0.$

Определим процессы восстановления $\nu_t = \max\{k \geqslant 0 : \sigma_k \leqslant t\}$, $\mu_t = \max\{k \geqslant 0 : \delta_k \leqslant t\}$ и процесс случайного блуждания

$$\xi_t = \xi_0 + w_{\nu_t} - s_{\mu_t}. \tag{1}$$

Процесс $\xi_t$ изменяется скачками в моменты, порожденные суперпозицией двух независимых процессов восстановления $\{\sigma_n, n \geqslant 0\}$ и $\{\delta_n, n \geqslant 0\}$. Такие процессы изучались в [1, 2] в предположении, что $w_{\nu_t}$ имеет единичные скачки, а также в [3].

Суперпозиция двух процессов восстановления в соответствии с [1] описывается двумерной цепью Маркова $\{\rho_n, \beta_n, n \geqslant 0\}$, которую можно задать следующими рекуррентными соотношениями: если $\beta_n = 0$, то $\rho_{n+1} = \rho_n + \alpha_{n+1} \wedge \varkappa_{n+1}$, $\beta_{n+1} = [\varkappa_{n+1} - \alpha_{n+1}]^+$, если $\beta_n > 0$, то $\rho_{n+1} = \rho_n + \alpha_{n+1} \wedge \beta_n$, $\beta_{n+1} = [\beta_n - \alpha_{n+1}]^+$.

Последовательность $\{\beta_n, n \geqslant 0\}$ образует однородную цепь Маркова с переходными вероятностями вида

$$P\{\beta_{n+1} \in dy/\beta_n = x\} = a\exp[-a(x-y)]\,dy,\ P\{\beta_{n+1} = 0/\beta_n = x\} =$$
$$= \exp(-ax),\ P\{\beta_{n+1} \in dy/\beta_n = 0\} = a\int_y^\infty \exp[-a(x-y)]\,dG(x)\,dy,$$
$$P\{\beta_{n+1} = 0/\beta_n = 0\} = \int_0^\infty \exp(-ax)\,dG(x) = g(a).$$

Рассмотрим случайное блуждание (1) в моменты восстановления $\rho_n$:

$$\xi_n = \xi_{\rho_n}, \ n \geqslant 0. \tag{2}$$

Лемма 1. *Двумерная последовательность* $\{\xi_n, \beta_n, n \geqslant 1\}$ *образует однородную цепь Маркова с переходными вероятностями*

$$P[\xi_{n+1} > u - v, \ \beta_{n+1} \in dy/\xi_n = u, \ \beta_n = x\} = aP(v)\exp[-a(x-y)]\,dy,$$

$$P\{\xi_{n+1} < u + v, \ \beta_{n+1} = 0/\xi_n = u, \ \beta_n = x\} = Q(v)\exp(-ax),$$

$$P\{\xi_{n+1} > u - v, \ \beta_{n+1} \in dy/\xi_n = u, \ \beta_n = 0\} = aP(v)\int_y^\infty \exp[-a(x-$$

$$-y)]\,dG(x)\,dy, \ P\{\xi_{n+1} < u + v, \ \beta_{n+1} = 0/\xi_n = u, \ \beta_n = 0\} =$$
$$= Q(v)\,g(a), \ u \geqslant 0, \ v \geqslant 0.$$

Доказательство леммы легко следует из определения $\xi_n$ и $\beta_n$.

Будем изучать время первого выхода случайного блуждания (1) на отрицательную полуось $\tau_u(x) = \min\{t{:}\xi_t < 0/\xi_0 = u, \ \beta_1 = x\}$, $\tau_u = \min\{t{:}\xi_t < 0/\xi_0 = u, \ \beta_1 = 0\}$.

Введем производящие функции $\varphi(u, x, \lambda) = M\exp[-\lambda\tau_u(x)]$, $\varphi(u, \lambda) = M\exp(-\lambda\tau_u)$, $\lambda > 0$.

Теорема. *Для преобразований Фурье производящих функций времен достижения нулевого уровня в случайном блуждании* (1) *имеют место формулы*

$$\tilde{\varphi}(s, \lambda) = \int_0^\infty \exp(isu)\,M\exp(-\lambda\tau_u)\,du =$$

$$= g(s, \lambda)\,f_+(s, \lambda)\,J_+\{f_-(s, \lambda)\,P(s, \lambda)\,[g^{-1}(s, \lambda) - 1]\}, \tag{3}$$

$$\tilde{\varphi}(s, x, \lambda) = \int_0^\infty \exp(isu)\,M\exp[-\lambda\tau_u(x)]\,du = P(s, \lambda)\,[1 - \exp[-a(s, \lambda)\,x]] +$$

$$+ J_+[\tilde{\varphi}(s, \lambda)\,q(-s)]\exp[-a(s, \lambda)\,x]. \tag{4}$$

*Здесь*

$$g(s, \lambda) = g(a(s, \lambda)) = \int_0^\infty \exp[-a(s, \lambda)\,x]\,dG(x),$$

$$a(s, \lambda) = a[1 - p(s)] + \lambda, \ P(s, \lambda) = -a(s, 0)/isa(s, \lambda).$$

*Оператор* $J_+$, *а также функции* $f_\pm(s, \lambda)$, *определены формулами* (14) *и* (20)—(22).

Доказательство теоремы разделим на промежуточные этапы, результаты которых сформулируем в виде лемм.

В качестве исходного материала используем следующие стохастические соотношения для рассматриваемых моментов достижения нулевого уровня:

$$\tau_u(x) = I(\alpha > x)(x + \tau_{u+\eta}) + J(\alpha \leqslant x)(\alpha + \tau_{u-\theta}(x - \alpha)), \ u \geqslant 0;$$
$$\tau_u = \tau_u(\varkappa). \tag{5}$$

Будем также учитывать, что $\tau_u = \tau_u(x) = 0, \ u < 0$.

Лемма 2. *Функция*

$$\psi(u, x, \lambda) = \varphi(u, x, \lambda)\exp(cx), \ c = a + \lambda, \tag{6}$$

*определяется решением уравнения*

$$\frac{d\psi(u, x, \lambda)}{dx} - a\int_0^u \psi(u - v, x, \lambda)\,dP(v) = a\exp(cx)\,\bar{P}(u) \tag{7}$$

*с начальным условием* $\psi(u, 0, \lambda) = \psi_0(u, \lambda) = \int\limits_0^\infty \varphi(u+v, \lambda)\, dQ(v)$. *Кроме того,*

$$\varphi(u, \lambda) = \int\limits_0^\infty \varphi(u, x, \lambda)\, dG(x), \quad \overline{P}(u) = 1 - P(u). \tag{8}$$

Доказательство. Из стохастического соотношения (5) находим

$$\varphi(u, x, \lambda) - a\int\limits_0^u \int\limits_0^x \exp[-c(x-y)]\, \varphi(u-v, y, \lambda)\, dy dP(v) =$$

$$= ac^{-1}\overline{P}(u)[1 - \exp(-cx)] + \exp(-cx)\int\limits_0^\infty \varphi(u+v, \lambda)\, dQ(v), \quad u \geqslant 0, \tag{9}$$

$$\varphi(u, x, \lambda) = 1, \quad u < 0.$$

После преобразования с учетом (6) уравнение (9) примет вид

$$\psi(u, x, \lambda) - a\int\limits_0^u \int\limits_0^x \psi(u-v, y, \lambda)\, dy dP(v) =$$

$$= ac^{-1}\overline{P}(u)[\exp(cx) - 1] + \int\limits_0^\infty \varphi(u+v, \lambda)\, dQ(v), \quad u \geqslant 0, \tag{10}$$

$$\psi(u, x, \lambda) = \exp(cx), \quad u < 0.$$

Дифференцируя (10) по $x$, получим утверждение леммы.

Лемма 3. *Для функции* $\tilde{\psi}(s, x, \lambda) = \int\limits_0^\infty \exp(isu)\, \psi(u, x, \lambda)\, du$, $\operatorname{Im} s \geqslant 0$, *имеет место представление*

$$\tilde{\psi}(s, x, \lambda) = \tilde{\psi}_0(s, \lambda)\exp[ap(s)x] + [\exp(cx) - \exp[ap(s)x]]\, p(s, \lambda), \tag{11}$$

*где* $\tilde{\psi}_0(s, \lambda) = \int\limits_0^\infty \exp(isu)\, \psi_0(u, \lambda)\, du$.

Доказательство. После применения преобразования Фурье к уравнению (7) получим

$$d\tilde{\psi}(s, x, \lambda)/dx - ap(s)\tilde{\psi}(s, x, \lambda) = -a\exp(cx)[1 - p(s)]/is \tag{12}$$

с начальным условием

$$\tilde{\psi}(s, 0, \lambda) = \tilde{\psi}_0(s, \lambda). \tag{13}$$

Решение задачи (12), (13) представимо в виде (11).

Введем оператор проектирования в классе преобразований Фурье

$$J_+\left[\int\limits_{-\infty}^\infty \exp(isu)\, a(u)\, du\right] = \int\limits_0^\infty \exp(isu)\, a(u)\, du, \quad \operatorname{Im} s = 0. \tag{14}$$

Лемма 4. *Функция* $\tilde{\varphi}(s, \lambda) = \int\limits_0^\infty \exp(isu)\, \varphi(u, \lambda)\, du$ *есть решение уравнения*

$$\tilde{\varphi}(s, \lambda) - g(s, \lambda)\, I_+[\tilde{\varphi}(s, \lambda)\, q(-s)] = c(s, \lambda), \tag{15}$$

*где* $g(s, \lambda) = \int\limits_0^\infty \exp[-a(s, \lambda)x]\, dG(x)$, $c(s, \lambda) = p(s, \lambda)[1 - g(s, \lambda)]$.

Доказательство. Воспользуемся соотношением (8), учитывая (6). Интегрируя (11) по $x$ с весом $\exp(-cx)\,dG(x)$, получим $\tilde{\varphi}(s, \lambda) = \tilde{\psi}_0(s, \lambda)\, g(s, \lambda) + p(s, \lambda)[1 - g(s, \lambda)]$. Остается заметить, что

$$\tilde{\psi}_0(s, \lambda) = J_+[\tilde{\varphi}(s, \lambda)\, q(-s)]. \tag{16}$$

Для завершения доказательства теоремы преобразуем уравнение (15) к виду

$$J_+\{u(s, \lambda)[1 - g(s, \lambda)\, q(-s)]\} = d(s, \lambda), \tag{17}$$

где

$$u(s, \lambda) = \tilde{\varphi}(s, \lambda)/g(s, \lambda), \tag{18}$$

$$d(s, \lambda) = c(s, \lambda)/g(s, \lambda). \tag{19}$$

Отметим, что функция $g(s, \lambda)$ аналитическая и отличная от нуля в полуплоскости $\operatorname{Im} s \geqslant 0$. Поэтому $g^{-1}(s, \lambda)$ также обладает этими свойствами и представима интегралом Фурье на положительной полуоси.

Заметим, что

$$f(s, \lambda) = g(s, \lambda)\, q(-s)/g(\lambda) \tag{20}$$

есть характеристическая функция (по $s$) распределения вероятностей:

$$f(s, \lambda) = M\left[\exp\left\{is\left[\sum_{k=1}^{\mu_\varkappa} \theta_k - \eta\right]\right\}/\varkappa < \Delta\right].$$

Здесь $P(\Delta > t) = \exp(-\lambda t)$. Воспользуемся безгранично делимой факторизацией [4]:

$$1 - g(\lambda) f(s, \lambda) = f_+^{-1}(s, \lambda)\, f_-^{-1}(s, \lambda), \tag{21}$$

в которой

$$f_+(s, \lambda) = \int_0^\infty \exp(isu)\, d_u F_+(u, \lambda);$$

$$f_-(s, \lambda) = \int_{-\infty}^0 \exp(isu)\, d_u F_-(u, \lambda). \tag{22}$$

Тогда решение уравнения (17) может быть представлено в форме $u(s, \lambda) = f_+(s, \lambda)\, J_+[d(s,\lambda)\, f_-(s,\lambda)]$. Учитывая обозначения (18) и (19), получаем представление искомой функции $\tilde{\varphi}(s, \lambda) = g(s, \lambda)\, f_+(s, \lambda) J_+\{f_-(s, \lambda)\, p(s, \lambda) \times [g^{-1}(s, \lambda) - 1]\}$, что совпадает с утверждением (3) теоремы. Представление (4) следует из (11) и (16) с учетом (2).


1. *Пирджанов Б.* Случайное блуждание со скачками в моменты, порожденные суперпозицией двух процессов восстановления.— Изв. АН ТССР. Сер. физ.-техн., хим. и геол. наук, 1983, № 3, с. 7—12.
2. *Пирлиев Б.* Дискретное случайное блуждание на суперпозиции двух процессов восстановления.— В кн.: Аналитические методы в задачах теории вероятностей. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1984, с. 102—111.
3. *Гусак Д. В.* Факторизационные тождества для сумм случайного числа слагаемых.— В кн.: Прикладные задачи теории вероятностей. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1982, с. 25—44.
4. *Рогозин Б. А.* О распределении некоторых функционалов, связанных с граничными задачами для процессов с независимыми приращениями.— Теор. вероятн. и ее применения, **11**, вып. 4, 1966, с. 656—670.


Ин-т матем. АН УССР, Киев

Поступила 25.01.84