УДК 517.982

Л. В. Гладун, А. Н. Пличко

О нормирующих и сильно нормирующих подпространствах сопряженного банахова пространства

Пусть X — банахово пространство. Подпространство F сопряженного пространства X^* называется нормирующим, если его характеристика Диксмье $r(F) = \sup\{r : rB(X^*) \subset \mathrm{cl}^* B(F)\} > 0$, где $B(X)$ — единичный шар пространства X, а $\mathrm{cl}^* A$ — слабое* замыкание подмножества $A \subset X$ [1, с. 29]. Как известно [1, с. 39], числовая область характеристики $\mathfrak{R}(X) = \{\lambda : \exists F \subset X^*,\ r(F) = \lambda\}$, F — замкнутое по норме тотальное собственное подпространство X^*, представляет собой промежуток $(0, a)$, концы которого могут и включаться, и не включаться. В этой работе будут исследованы соотношение между числовой областью характеристики пространства X и его подпространства Y, возможные значения числа a, а также введено понятие сильно нормирующего подпространства и показано, что оно играет для линейной конечномерной регуляризуемости по Тихонову некорректных задач (и эквивалентных ей функционально-аналитических свойств) такую же роль, как нормирующее подпространство для простой регуляризуемости.

1. Числовая область характеристики изучалась в работах [1—4]. В частности, из результата [4] следует, что для пространства X с безусловным ортогональным натягивающим базисом всегда $\mathfrak{R}(Y) \subset \mathfrak{R}(X)$ при любом подпространстве $Y \subset X$. В связи с этим естественно возникает вопрос: всегда ли $\mathfrak{R}(Y) \subset \mathfrak{R}(X)$, если Y — подпространство X. Следующее утверждение показывает, что когда Y хорошо дополняемо в X, включение имеет место.

Теорема 1. *Пусть Y, Z — замкнутые взаимно дополняемые подпространства банахова пространства $X: X = Y \oplus Z$, и норма суммы обладает «решеточным свойством»: если $\| y_1 \| \leqslant \| y_2 \|$ и $\| z_1 \| \leqslant \| z_2 \|$, то $\| y_1 + z_1 \| \leqslant \| y_2 + z_2 \|$ для произвольных $y_i \in Y$, $z_i \in Z$, $i = 1, 2$. Тогда $\mathfrak{R}(Y) \subset \mathfrak{R}(X)$ и $\mathfrak{R}(Z) \subset \mathfrak{R}(X)$.*

Доказательство. Достаточно показать включение $\mathfrak{R}(Y) \subset \subset \mathfrak{R}(X)$. Из условий теоремы следует, что нормы естественных проекторов $X \to Y$ и $X \to Z$ равны единице. Известно (см., например, [5, с. 199]), и нетрудно проверяется, что в этом случае $X^* = Z^\perp \oplus Y^\perp$, где $Z^\perp$ и $Y^\perp$ — аннуляторы в X^* соответствующих подпространств, причем $Z^\perp$ изометричен Y^*, а $Y^\perp$ — Z^*; изометрия задается естественным способом. Поэтому будем отождествлять Y^* с $Z^\perp$, а Z^* с $Y^\perp$. Легко также проверить, что если норма суммы $Y \oplus Z$ обладает «решеточным свойством», то это же справедливо и для аннуляторов: для произвольных $f_i \in Z^\perp$ и $g_i \in Y^\perp$, $i = 1, 2$, из $\| f_1 \| \leqslant \| f_2 \|$ и $\|g_1\| \leqslant \|g_2\|$ следует $\|f_1 + g_1\| \leqslant \|f_2 + g_2\|$.

Пусть M — подпространство $Y^* = Z^\perp$ характеристики a. Покажем, что характеристика подпространства $F = M \oplus Y^\perp \subset X^*$ не меньше a. Возьмем произвольный элемент $u = f + g \in X^*$, $f \in Z^\perp$, $g \in Y^\perp$, с нормой $\| u \| = a$. Тогда $\| f \| \leqslant a$, и по определению характеристики существует сеть $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \| f \| B(M)/a$, слабо* сходящаяся к f. Тогда сеть $\{f_\alpha + g\}_{\alpha \in A} \subset F$ слабо* сходится к u. Так как $\|f_\alpha + g\| \leqslant \| \| f \| a^{-1} f + g \| \leqslant \| a^{-1} f + a^{-1} g \| = = 1$, то $r(F) \geqslant a$. Включение $\mathfrak{R}(Y) \subset \mathfrak{R}(X)$ доказано.

Приведем пример банахова пространства X, у которого существует такое подпространство Y, что $\mathfrak{R}(Y) \not\subset \mathfrak{R}(X)$. При этом Y имеет одномерное дополнение Z и нормы естественных проекторов $X \to Y$ и $X \to Z$ равны 1.

Пример 1. Для любого множества M обозначения $c_0(M)$, $l_1(M)$, $l_\infty(M)$ имеют стандартный смысл [1, с. 7]. Обозначим через X подпространство $l_\infty(M)$, где $M = \{-1\} \cup \{0\} \cup N$, N — натуральные числа, натянутое на $c_0(N)$ и элементы e_0: $e_0(m) = 1$, $m \in M$, и $e_{-1}: e_{-1}(-1) = 1$, $e_{-1}(0) = = -1$, $e_{-1}(n) = 0$, $n \in N$. Покажем, что $X^* = l_1(M)$. Двойственность задается формулой $f(x) = \Sigma_{-1}^{\infty} f(m)\, x(m)$, $f \in l_1(M)$, $x \in X$. Поскольку $|f(x)| \leqslant \leqslant \| x \| \Sigma_{-1}^{\infty} | f(m) |$, то $\| f \|_{X^*} \leqslant \Sigma_{-1}^{\infty} | f(m) |$. Для каждого $\varepsilon > 0$ нетрудно подобрать элемент $x \in B(X)$, при котором $f(x) > \Sigma_{-1}^{\infty} | f(m) | - \varepsilon$. Следовательно, $X^* \supset l_1(M)$. Так как $c_0(N)^* = l_1(N)$, а $c_0(N)$ и $l_1(N)$ отличаются от X и $l_1(M)$ ровно на две размерности, то $X^* = l_1(M)$.

Подпространство $Y = c_0(N) + [e_0] \subset X$ изометрично пространству сходящихся последовательностей c ($[A]$ означает замкнутую по норме линейную оболочку множества A), поэтому $\mathfrak{R}(Y) = [0, 1]$ (см. [2]). Кроме того, подпространство Y имеет в X дополнение $Z = [e_{-1}]$, и нормы соответствующих проекторов равны единице.

Покажем, что $\mathfrak{R}(X) \subset [0, 2/3]$. Для этого заметим, что $l_1(M)^* = l_\infty(M)$, и по одному из эквивалентных определений характеристики [1, с. 30] достаточно показать, что для произвольного элемента $\varphi \in l_\infty(M)$

$$\inf \{ \| \lambda\varphi - x \| : x \in X, \| x \| = 1, \lambda \in \mathbb{R} \} \leqslant 2/3. \tag{1}$$

Мы, как обычно, отождествляем пространство X с его каноническим образом во втором сопряженном.

Возьмем любой элемент $\varphi \in l_\infty(M)$ с нормой $2/3$. Если $\sup\{|\varphi(n)|: n \in N\} \geqslant 1/3$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $k \geqslant 1$, что $|\varphi(k)| > 1/3 - \varepsilon$. Пусть $e_k \in X$ — единичный орт: $e_k(k) = 1, e_k(m) = 0$, $m \neq k$. Тогда $\|e_k\| = 1$, $\|\varphi - \operatorname{sign}\varphi(k)\, e_k\| \leqslant 2/3 + \varepsilon$, и для такого φ неравенство (1) выполняется. Если же $|\varphi(n)| < 1/3$, $n > 0$, то либо $|\varphi(-1)| = 2/3$, либо $|\varphi(0)| = 2/3$. Пространству X принадлежат элементы $x = (e_0 + e_{-1})/2$ и $y = (e_0 - e_{-1})/2$, $\|x\| = \|y\| = 1$. Если $|\varphi(-1)| = 2/3$, то $\|2^{-1}\varphi - \operatorname{sign}\varphi(-1) \times x\| \leqslant 2/3$, т. е. и в этом случае неравенство (1) выполняется.

Теорема 2. *Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — банахово пространство и $R(X, \|\cdot\|) = \sup\{\lambda : \lambda \in \mathfrak{R}(X)\} = a > 0$. Тогда для произвольного числа $b \in [a, 1]$ на X существует норма $|||\cdot|||$, эквивалентная исходной, для которой $R(X, |||\cdot|||) = b$.*

Доказательство. Пусть $F \subset (X, \|\cdot\|)^*$ — какое-нибудь собственное нормирующее подпространство, которое по условию теоремы существует. Тогда норма $\|x\|_1 = \sup\{|f(x)|: f \in F, \|f\| \leqslant 1\}$ эквивалентна исходной и $R(X, \|\cdot\|_1) = 1$. Для всякого $\lambda \in [0, 1]$ определим на пространстве X норму $\|x\|_\lambda = \lambda\|x\|_1 + (1 - \lambda)\|x\|$. Очевидно, она эквивалентна исходной и дистанция Банаха—Мазура $d((X, \|\cdot\|_\mu), (X, \|\cdot\|_\lambda)) \to 0$ при $\mu \to \lambda$. Так как для произвольных банаховых пространств X и Y $R(X) \leqslant d(X, Y)\, R(Y)$ (см. [3]), то отображение φ, ставящее в соответствие каждому $\lambda \in [0, 1]$ число $R(X, \|\cdot\|_\lambda)$, непрерывно, и $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = 1$. Поскольку непрерывная функция принимает все промежуточные значения, теорема доказана.

В то время как условия, при которых левый край числовой области $\mathfrak{R}(X)$ включается в $\mathfrak{R}(X)$, полностью описаны [1, с. 78], когда $R(X) \in \mathfrak{R}(X)$ не ясно. Приведем пример, показывающий, что для произвольного числа $1/2 \leqslant a \leqslant 1$ существует банахово пространство X с $\mathfrak{R}(X) = [0, a]$.

Пример 2. Пусть $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Рассмотрим подпространство $c_\alpha = c_0(N) + [e_\alpha] \subset l_\infty(N \cup \{0\})$, где e_α определяются так: $e_\alpha(0) = 1$, $e_\alpha(n) = \alpha$, $n \geqslant 1$, и покажем, что $\mathfrak{R}(c_\alpha) = [0, (1 + \alpha^2)/2]$.

Отметим, что $c_\alpha^* = l_1(N \cup \{0\})$ с естественной двойственностью, а $c_\alpha^{**} = l_\infty(N \cup \{0\})$. Докажем сначала неравенство $R(c_\alpha) \leqslant (1 + \alpha^2)/2$, т. е. для произвольного элемента $\varphi \in l_\infty(N \cup \{0\})$ проверим соотношение

$$\inf\{\|\lambda\varphi - x\| : x \in c_\alpha,\ \|x\| = 1,\ \lambda \in \mathbb{R}\} \leqslant (1 + \alpha^2)/2. \tag{2}$$

Если для некоторого номера $k > 0$ $|\varphi(k)| \geqslant (1 - \alpha^2)/(1 + \alpha^2)$, то $\|2^{-1}(1 + \alpha^2)\varphi - \operatorname{sign}\varphi(k)\, e_k\| \leqslant \max\{(1 + \alpha^2)/2, 1 - (1 + \alpha^2)(1 - \alpha^2)/2(1 + \alpha^2)\} = (1 + \alpha^2)/2$, где e_k — k-ый единичный орт пространства $c_0(N)$. Пусть $|\varphi(n)| < (1 - \alpha^2)/(1 + \alpha^2)$ для всякого $n > 0$. Тогда $|\varphi(0)| = 1$; можно считать $\varphi(0) = -1$. В случае $\overline{\lim}_n |\varphi(n)| = a < (1 - \alpha)/(1 + \alpha)$, т. е. когда $|\varphi(n)| > (1 - \alpha)/(1 + \alpha)$ лишь для конечного числа положительных номеров $n_1, \ldots, n_m$, норма элемента $x = e_\alpha - \sum_{i=1}^{m} 2^{-1}(1 - \alpha^2)\varphi(n_i)\, e_{n_i}$ равна 1 и, рассматривая по отдельности значения функции $2^{-1}(1 - \alpha^2)\varphi + x$ в точках 0, n_i, $i = \overline{1, m}$, и в остальных точках, получим $\|2^{-1}(1 - \alpha^2)\varphi + x\| \leqslant (1 + \alpha^2)/2$.

И, наконец, когда $a > (1 - \alpha)/(1 + \alpha)$, выберем произвольное ε и номер $k > 0$, для которого $a - \varepsilon < |\varphi(k)| < a + \varepsilon$. Пусть $n_1, \ldots, n_m$ — конечное число положительных номеров, при которых $|\varphi(n_i)| > a + \varepsilon$. Положим $\lambda = (1 + \alpha)/(2a + \alpha(1 + a))$, $b = (1 - a)/(2a + \alpha(1 + a))$. Тогда норма элемента $y = be_\alpha - (b\alpha + \operatorname{sign}\varphi(k))\, e_k - \sum_{i=1}^{m} \lambda\varphi(n_i)\, e_{n_i}$ равна 1 и, рассматривая по отдельности значения функции $\lambda\varphi + y$ в точках 0, k, n_i, $i = \overline{1, m}$, и в остальных, получим $\|\lambda\varphi - y\| \leqslant (\alpha + a)/(2a + \alpha(1 + a)) + \varepsilon(1 + \alpha)/(2a + \alpha(1 + a)) \leqslant (1 + \alpha)^2/2 + \varepsilon(1 + \alpha)^2/2$. Неравенство (2) следует из произвольности выбора числа ε.

Покажем, что для элемента $\varphi \in c_\alpha^{**}: \varphi(0) = -1, \varphi(n) = (1-\alpha)/(1+\alpha)$, $n > 0$, характеристика подпространства $\varphi^\perp \subset c_\alpha^*$ равна точно $(1+\alpha^2)/2$, т. е. для любых $x \in c_\alpha$, $\|x\| = 1$, и $\lambda > 0$ $\|\lambda\varphi + x\| \geqslant (1+\alpha^2)/2$. Предположим, что для каких-то x и λ

$$\|\lambda\varphi + x\| < (1+\alpha^2)/2. \tag{3}$$

Если $|x(k)| = 1$ для некоторого k, то, поскольку $\lambda\varphi(k) < 0$, имеет смысл рассматривать лишь случай $x(k) = -1$. По неравенству (3) $-\lambda\varphi(k) - x(k) < (1+\alpha^2)/2$; следовательно, $\lambda > (1+\alpha^2)/2$. Подставляя эту оценку в соотношение $-\lambda\varphi(0) - x(0) < (1+\alpha^2)/2$, получаем $x(0) > \alpha$. Подставим оценки для $x(0)$ и λ в неравенство $\overline{\lim}_n (\lambda\varphi(n) + x(n)) > (1+\alpha^2)/2$; получим противоречивое соотношение $(1+\alpha^2)(1-\alpha)/2(1+\alpha) + \alpha\alpha < (1+\alpha^2)/2$. Если же $|x(n)| < 1$ при всех $n > 0$, то $|x(0)| = 1$; имеет смысл рассматривать лишь случай $x(0) = 1$. Согласно (3) $\lambda\varphi(0) + x(0) < (1+\alpha^2)/2$; следовательно, $\lambda > (1-\alpha^2)/2$. Подставляя эту оценку для λ в неравенство $\lim_n (\lambda\varphi(n) + x(n)) < (1+\alpha^2)/2$, снова получим противоречие. Следовательно, $r(\varphi^\perp) = (1+\alpha^2)/2$, тогда $(0, (1+\alpha^2)/2] \subset \mathfrak{R}(c_\alpha)$ [1, с. 39]. Нетрудно проверить, что пространство c_α изоморфно c_0 (изоморфизм устанавливается так же, как и между c и c_0). Поэтому c_α неквазирефлексивно и содержит тотальное подпространство нулевой характеристики [1, с. 78]; следовательно, $\mathfrak{R}(c_\alpha) = [0, (1+\alpha^2)/2]$.

2. Пусть E — банахово пространство и M — тотальное линейное подпространство E^*. Будем говорить, что оно сильно λ-нормирующее $(0 < \lambda \leqslant 1)$, если для любых конечномерных подпространств $X \subset E$ и $F \subset E^*$ $\inf \max\{\|T\|, \|T^{-1}\|\} \leqslant \lambda^{-1}$, инфинум берется по всем операторам $T: F \to M$, для которых $\langle x, f\rangle = \langle x, Tf\rangle$ при любых $x \in X, f \in F$, и если λ — максимальное из чисел, для которых это неравенство выполняется. Число λ назовем сильной характеристикой $\operatorname{sr}(M)$ подпространства M. В том случае, когда значение константы λ не играет роли, будем пользоваться термином «сильно нормирующее подпространство».

Это определение навеяно принципом локальной рефлексивности [6], утверждающим, что $E \subset (E^*)^*$ сильно 1-нормирующее. Очевидно, если подпространство $N \subset M$, то $\operatorname{sr}(N) \leqslant \operatorname{sr}(M)$ и $\operatorname{sr}(M) \leqslant r(M)$ ($r(M)$ — обычная характеристика подпространства M). Нетрудно также проверить, что $\operatorname{sr}(\bar{M}) = \operatorname{sr}(M)$ для замыкания $\bar{M}$ по норме подпространства M.

Теорема 3. *Пусть E — банахово пространство, M — сильно нормирующее подпространство E^*, $a > 0$ и J — фактор-отображение E^{**} в $E^{**}/M^\perp = M^*$. Пусть N — подпространство M, обладающее следующим свойством: для любого конечномерного подпространства $Z \subset JE$ существуют замкнутые по норме подпространства $\Phi \supset Z$ и $\Psi \supset N^{(\perp M)}$ из M^* и проектор $P: M^* \to \Phi$ параллельно Ψ с $\|P\| \leqslant a$, где $N^{(\perp M)}$ — аннулятор в M^*. Тогда N — сильно нормирующее.*

Доказательство. Поскольку при замыкании по норме сильная нормируемость не изменяется, то без ограничения общности можно считать подпространства M и N замкнутыми по норме. Пусть X и F — конечномерные подпространства E и E^*, $\varepsilon > 0$ и $Y \supset X$ — такое конечномерное подпространство E, что для всякого $f \in F$ $\|f\| < (1+\varepsilon)\sup\{f(y): y \in B(Y)\}$.

Пусть $T: F \to M$ — оператор с $\langle y, f\rangle = \langle y, Tf\rangle$ для произвольных $y \in Y$ и $f \in F$ и $\max\{\|T\|, \|T^{-1}\|\} \leqslant \lambda^{-1}$, $\lambda > \operatorname{sr} M - \varepsilon$. Пусть $Z = JY$ и Φ, Ψ, P — объекты, о которых идет речь в условии теоремы. Сопряженный оператор P^* отображает M^{**} в $\Psi^\perp \subset (N^{(\perp M)})^\perp$ параллельно $\Phi^\perp$. Отождествляя $(N^{(\perp M)})^\perp$ с N^{**}, можно считать, что P^* отображает M^{**} в N^{**}. Тогда для $y \in Y$ и $f \in F$, обозначая через J' фактор-отображение M^* в $M^*/N^{(\perp M)} = N^*$, имеем

$$\langle y, f\rangle = \langle y, Tf\rangle = \langle Jy, Tf\rangle = \langle Jy, P^*Tf\rangle = \langle J'Jy, P^*Tf\rangle. \tag{4}$$

По условию $\|P^*\| = \|P\| \leqslant a$. Для сужения $P^*|_{TF}$ оценим норму обратного.

Пусть $g \in TF$, $\| g \| = 1$, $f = T^{-1} g$ и $y \in B(Y)$ — элемент, для которого $\|f\| < (1 + \varepsilon) f(y)$. Тогда $\|Jy\| \leqslant 1$ и $\langle P^*g, Jy\rangle = \langle Tf, PJy\rangle = \langle Tf, Jy\rangle = \lambda/(1+\varepsilon)$, так что $\| (P^*|_{TF})^{-1}\| < \lambda^{-1}(1+\varepsilon)$. Применив принцип локальной рефлексивности к пространству N и подпространствам $G = P^*TF \subset N^{**}$ и $J'Z \subset N^*$, получим подпространство $H \subset N$ и оператор $R: G \to H$, для которых $\max\{\| R \|, \| R^{-1}\|\} < 1 + \varepsilon$ и $\langle z, g\rangle = \langle z, Rg\rangle$ при $z \in J'Z$ и $g \in G$. Положим $S = RP^*T$. Легко видеть, что этот оператор отображает F в N. Дальше, для $x \in X \subset Y$ и $f \in F$ согласно (4) $\langle x, f\rangle = \langle J'Jx, P^*Tf\rangle = \langle JJ'x, RP^*Tf\rangle = \langle x, Sf\rangle$.

И, наконец, существуют константы, ограничивающие R, $P^*|_{TF}$ и их обратные и не зависящие от подпространств X и F. Поэтому найдется число μ такое, что $\max\{\|S\|, \|S^{-1}\|\} < \mu$, т. е. подпространство $N \subset E^*$ сильно нормирующее.

Следствие 1. *Если M — сильно нормирующее подпространство из E^* и $N \subset M$ — тотальное на E подпространство с $\dim M/N < \infty$, то N сильно нормирующее. В частности, если N — тотальное подпространство конечного дефекта в E^*, то N сильно нормирующее.*

Действительно, поскольку $\dim M/N < \infty$, то аннулятор $N^{(\perp M)} \subset M^*$ конечномерен. Из тотальности N вытекает $N^{(\perp M)} \cap JE = 0$. Кроме того, сужение $J|_E$ — изоморфизм, следовательно, подпространство $JE \subset M^*$ замкнуто. Поэтому его можно расширить до замкнутого подпространства Φ, дополнительного к $N^{(\perp M)}$, и применить теорему 3 с $\Psi = N^{(\perp M)}$.

Напомним, что банахово пространство E называется квазирефлексивным, если $\dim E^{**}/E < \infty$.

Следствие 2. *Банахово пространство E квазирефлексивно тогда и только тогда, когда любое тотальное подпространство $M \subset E^*$ — сильно нормирующее.*

Для неквазирефлексивного пространства существует тотальное нормирующее подпространство $M \subset E^*$ (см. [1, с. 78]), которое, конечно, не сильно нормирующее. Поскольку каждое замкнутое по норме тотальное подпространство M сопряженного к квазирефлексивному E имеет в E^* конечный дефект, то следствие 2 вытекает из следствия 1.

Банахово пространство E называется $\mathfrak{L}_\infty$-пространством, если существует такое число $\lambda > 0$, что для любого конечномерного подпространства $X \subset E$ найдется конечномерное подпространство $Y \supset X$ и линейный биективный оператор $T: Y \to l_\infty^{(n)}$ с нормой $\max\{\|T\|, \|T^{-1}\|\} < \lambda$.

Следствие 3. *Пусть E — $\mathfrak{L}_\infty$-пространство. Тогда всякое нормирующее подпространство $M \subset E^*$ — сильно нормирующее.*

Доказательство. Пусть $X \subset E$ — конечномерное подпространство и Y, λ, T — объекты из определения $\mathfrak{L}$ -пространства. Поскольку M нормирующее, то в пространстве $E + M^\perp \subset E^{**}$ существует непрерывный проектор $Q: E + M^\perp \to E$ параллельно $M^\perp$. Рассмотрим отображение $TQ: E + M^\perp \to l_\infty^{(n)}$. Согласно [7, с. 247], его можно расширить до оператора $S: E^{**} \to l_\infty^{(n)}$ с сохранением нормы. Положим $P = T^{-1}S$. Оператор P проектирует пространство E^{**} на $Y \supset X$ параллельно $\operatorname{Ker} P \supset M$; значит, можно применить теорему 3, положив $M = E^*$, $N = M$, $\Phi = Y$, $\Psi = \operatorname{Ker} P$.

Напомним, что банахово пространство E обладает свойством λ-метрической аппроксимации (λ-MAP), если для всякого конечномерного подпространства $X \subset E$ и $\varepsilon > 0$ существует конечномерный линейный оператор $R_{X,\varepsilon}: E \to E$ с $\| R_{X,\varepsilon}\| \leqslant \lambda$ и $\| R_{X,\varepsilon}x - x\| \leqslant \varepsilon \| x\|$ при $x \in X$. Если пространство X имеет λ-MAP для какого-то $\lambda \geqslant 1$, то говорят, что оно имеет свойство ограниченной аппроксимации (BAP). Набор $\mathfrak{R} = \{R_{X,\varepsilon}\}$ назовем множеством λ-аппроксимирующих операторов. Для данного E таких наборов $\mathfrak{R}$ может быть, конечно, много. Положим $M_{\mathfrak{R}} = \operatorname{lin}\{R^*E^*: R \subset \mathfrak{R}\}$.

Теорема 4. *Пусть банахово пространство E обладает λ-MAP. Тогда:*

1) $\operatorname{sr}' M_{\mathfrak{R}} \geqslant \lambda^{-1}$;

2) *если для линейного подпространства* $M \subset E^*$ $\mathrm{sr}(M) > \mu^{-1}$, *то в пространстве* E *существует такое множество* $\mathfrak{R}_1$ $\lambda\mu$-*аппроксимирующих операторов, что* $M_{\mathfrak{R}_1} \subset M$.

Доказательство. 1). Пусть $X \subset E$ и $F \subset E^*$ — конечномерные подпространства и ε, $\delta > 0$. Выберем такое конечномерное подпространство $X \subset Y \subset E$, что для всякого $f \in F$

$$\|f\| < (1+\delta)\sup\{f(y): y \in B(Y)\}. \quad (5)$$

Пусть $R_{Y,\varepsilon} \in \mathfrak{R}$ — аппроксимирующий оператор, соответствующий подпространству Y и числу ε. По лемме 2.4 из [6] выберем оператор R_1 с $R_1|_Y = I|_Y$, $\|R_1 - R\| < (1-\varepsilon)^{-1}\varepsilon\lambda \dim Y$ и $R_1^* E^* = R^* E^* \subset M_{\mathfrak{R}}$. Тогда для $y \in Y$ и $f \in F$ $\langle y, R_1^* f\rangle = \langle R_1 y, f\rangle = \langle y, f\rangle$. Кроме того, $\|R_1^*\| = \|R_1\| \leqslant \|R - R_1\| + \|R\| \leqslant (1-\varepsilon)^{-1}\varepsilon\lambda \dim Y + \lambda$. Для $f \in F$ $\|R_1^* f\| = \sup\{\langle e, R_1^* f\rangle : e \in B(E)\} = \sup\{\langle R_1 e, f\rangle : e \in B(E)\} \geqslant \sup\{\langle R_1 y, f\rangle : y \in B(Y)\} = \sup\{f(y): y \in B(Y)\} \geqslant \|f\|/(1+\delta)$. В последнем неравенстве мы воспользовались формулой (5). Итак, $\|f\| < (1+\delta)\|R_1^* f\|$, т. е. норма сужения $\|(R_1^*|_F)^{-1}\| < 1 + \delta$. Неравенство 1) следует из произвольности выбора ε и δ.

2). Пусть $\mathfrak{R}$ — семейство λ-аппроксимирующих операторов, X — конечномерное подпространство E, $\varepsilon > 0$, $R_{X,\varepsilon} \in \mathfrak{R}$ — соответствующий им оператор и S — оператор, сопоставляемый отображению R по лемме 2. 4 из [6]. Пусть $T: S^* E^* \to M$ — оператор, для которого $\langle x, Tf\rangle = \langle x, f\rangle$ при $x \in X$, $f \in S^* E^*$ и $\|T\| < \mu$. Положим $T_1 = TS^*$. Тогда T_1 — конечномерный оператор, отображающий E^* в M, $\|T_1\| \leqslant \|T\|\,\|S^*\| \leqslant \mu[(1-\varepsilon)^{-1}\lambda\varepsilon \dim X + \lambda]$ и при $x \in X$ и $f \in E^*$ $\langle T_1^* x, f\rangle = \langle x, T_1 f\rangle = \langle x, TS^* f\rangle = \langle x, S^* f\rangle = \langle Sx, f\rangle = \langle x, f\rangle$. Следовательно, $T_1^* x = x$ (E рассматриваем как подпространство E^{**}). По лемме 3.1 из [6], найдется слабо* непрерывный оператор $S_1: E^* \to T_1 E$ такой, что а) $\|f_1\| \leqslant \|T_1\|(1+\varepsilon)$ и б) $S_1^* y = T_1^* y$, как только $T_1 y \in E$. Оператор R_1 в E, к которому сопряжен S_1, ограничен выражением $\mu[(1-\varepsilon)^{-1}\lambda\varepsilon \dim X + \lambda](1+\varepsilon)$, $R_1 x = x$ и $R_1^* E^* \subset M$. Число ε можно выбрать настолько малым, чтобы $\|R_1\| < \lambda\mu$.

В случае сепарабельного пространства E множество аппроксимирующих операторов $\mathfrak{R}$ превращается в последовательность R_n, поточечно сходящуюся к единичному оператору I. Напомним, что по одному из эквивалентных определений [8] оператор, обратный к линейному непрерывному инъективному оператору $A: X \to Y$, где X, Y — нормированные пространства, называется линейно конечномерно регуляризуемым, если существует последовательность линейных непрерывных конечномерных операторов $B_n: Y \to X$, для которой при любом $y \in AX$ $\|B_n y - A^{-1} y\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 5. *Пусть* A — *линейный непрерывный инъективный оператор из сепарабельного банахова пространства* X *в нормированное пространство* Y. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1) A^{-1} *линейно конечномерно регуляризуем*;

2) X *обладает* BAP, *и для подпространства* $M = A^* Y^* \subset X^*$ $\mathrm{sr}(M) > 0$.

Доказательство. Если B_n — операторы, приближающие A^{-1}, то операторы $B_n A$ приближают единичный, поэтому ограничены в совокупности, и $(B_n A)^* \subset M$. Тогда по теореме 4 $\mathrm{sr}(M) > 0$; следовательно, импликация 1) $\Rightarrow$ 2) установлена. Из 2) и второго пункта теоремы 4 следует существование последовательности линейных непрерывных конечномерных операторов $R_n: X \to X$, сходящейся к I, для которой $R_n^* X^* \subset M$. Это условие обеспечивает линейную конечномерную регуляризуемость A^{-1} [8].

1. *Петунин Ю. И., Пличко А. Н.* Теория характеристик подпространств и ее приложения.— Киев : Вища школа, 1980.— 216 с.
2. *Годун Б. В., Кадец М. И.* О множестве значений характеристики подпространств сопряженного пространства.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, 1978, вып. 29, с. 25—31.

3. *Годун Б. В.* О нормирующих подпространствах в некоторых сопряженных пространствах Банаха.— Мат. заметки, 1981, **29**, № 4, с. 549—555.
4. *Годун Б. В.* Безусловные базисы и натягивающие базисные последовательности.— Изв. вузов. Математика, 1980, № 10, с. 69—72.
5. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.— М. : Мир, 1972.— 740 с.
6. *Johnson W. B., Rosenthal H. P., Zippin M.* On bases, finite dimensional decompositions and weaker struktures in Banach spaces.— Isr. Math., J., 1971, **9**, p. 488—506.
7. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.— М. : Наука, 1977.— 742 с.
8. *Винокуров В. А., Пиличко А. Н.* О регуляризуемости линейных обратных задач линейными методами.— Докл. АН СССР, 1976, **229**, № 5, с. 1037—1040.

Ин-т прикл. пробл. мех. и мат.
АН УССР, Львов

Поступила 16.05.83