УДК 517.917.

В. С. Бондарчук

Индекс Морса и деформации гамильтоновых систем

Вариационное исчисление в целом и периодическая задача вариационного исчисления в частности глубоко связаны с топологией, поскольку число решений вариационной задачи в известном смысле определяется топологическим строением этого многообразия. Динамические свойства решений периодической задачи (устойчивость, условная устойчивость, неустойчивость и т. п.) также связаны с топологией многообразия, хотя об этой связи известно значительно меньше. Основной результат работы — теорема, сформулированная в конце статьи — в некоторой степени проясняет эту связь.

Рассмотрим периодическую задачу вариационного исчисления, т. е. задачу о критических точках функционала $F(x) = \int\limits_0^{2\pi} L(x, \dot{x})\, dt$, $x \in X$, заданного на гладком гильбертовом многообразии $X = H^1(S, M^n)$ [1], состоящем из абсолютно непрерывных замкнутых кривых $x(t)$, $x(t) = x(t + 2\pi)$, расположенных на гладком замкнутом многообразии M^n и имеющих интегрируемую с квадратом производную $\dot{x}(t)$ на отрезке $[0, 2\pi]$. Предполагается, что лагранжиан $L: TM^n \to R$ удовлетворяет условию выпуклости Лежандра, т. е. в локальной системе координат $(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ матрица $(\partial^2 L/\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j)_{i,j=1}^n$ положительна.

Пусть $x_0 \in X$ — критическая точка функционала F. Тогда периодическая функция $x_0(t) = x_0(t + 2\pi)$ удовлетворяет системе уравнений Эйлера—Лагранжа, записанных в гамильтоновой форме:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где $y_i = \partial L/\partial \dot{x}_i$.

Рассмотрим систему уравнений Якоби для системы (1) относительно периодического решения $(x_0(t), y_0(t))$. Она имеет вид

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_i}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \tag{2}$$

где $\mathcal{H} = \mathcal{H}(t, \xi, \eta)$ — вторичный гамильтониан. Отметим, что $\mathcal{H}(t, \xi, \eta) = \mathcal{H}(t + 2\pi, \xi, \eta)$.

Критическую точку $x_0 \in X$ функционала F, траекторию $(x_0(t), y_0(t))$ системы (1) или систему (2) будем называть гиперболической, если множество мультипликаторов матрицы монодромии системы (2) не пересекается с единичной окружностью в комплексной плоскости.

Гиперболическая траектория $(x_0(t), y_0(t))$ имеет устойчивое W^s и неустойчивое W^u многообразия [2] $W^{s(u)} = \{(x_1, y_1) \in T^*M^n : (x(x_1, y_1, t), y(x_1, y_1, t) \to (x_0(t), y_0(t)), t \to \pm\infty\}$, где $(x(x_1, y_1, t), y(x_1, y_1, t))$ — решение системы уравнений Гамильтона (1) с начальными данными $x(x_1, y_1, 0) = x_1$, $y(x_1, y_1, 0) = y_1$.

Подмногообразие $\Lambda \subset T^*M$ называется лагранжевым, если его размерность равна n и на нем тождественно обращается в нуль каноническая 2-форма $W^2 = dx \wedge dy$.

Лемма 1. *Устойчивое W^s и неустойчивое W^u многообразия гиперболической траектории $(x_0(t), y_0(t))$ лагранжевы.*

Доказательство. Так как при каждом $t \in R$ отображение $\varphi^t(x_1, y_1) = (x(x_1, y_1, t), y(x_1, y_1, t))$ каноническое, то имеет место равенство $W^2(\varphi^t_* v_1, \varphi^t_* v_2) = W^2(v_1, v_2)$ для любых векторов $v_1, v_2 \in T(T^*M^n)_u$, $u = (x_0(t), y_0(t))$. Здесь φ^t_* обозначает касательное отображение для φ^t. Пусть $v_1, v_2 \in E^s = TW^s$. Тогда существуют константы $k > 0$, $c > 0$, $\lambda > 0$ такие, что имеют место следующие оценки: $|W^2(v_1, v_2)| = |W^2(\varphi^t_* v_1, \varphi^t_* v_2)| \leqslant k \|\varphi^t_* v_1\| \times \|\varphi^t_* v_2\| \leqslant kc^2 \exp(-2\lambda t) \|v_1\| \|v_2\|$. Или, в окончательном виде,

$$|W^2(v_1, v_2)| \leqslant kc^2 \exp(-2\lambda t) \|v_1\| \|v_2\|.$$

Из этого неравенства следует, что $W^2(v_1, v_2) = 0$. Аналогичное равенство имеет место для неустойчивого распределения E^u. Так как $\dim W^s = \dim W^u = n$, то этим лемма доказана.

Индекс Морса $\mu(x_0)$ функционала F в критической точке $x_0 \in X$ определяется как индекс инерции гессиана $F_{**} : TX_{x_0} \times TX_{x_0} \to R$. В дальнейшем нам понадобится ограничение гессиана F_{**} на линейное подпространство $H \subset TX_{x_0}$, состоящее из всех кусочно-гладких векторных полей; обозначим его $E = F_{**}|_H$. Ограничение E определяется формулой [3]

$$E(z, z) = -\sum_i \Delta W^1(\tilde{z}(t_i)) + \int_0^{2\pi} \Lambda(t, z, \dot{z})\, dt, \quad z \in H. \tag{3}$$

В формуле (3) Λ обозначает вторичный лагранжиан

$$\Lambda(t, z, \dot{z}) = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\bigg|_0 z, z\right) + 2\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}}\bigg|_0 z, \dot{z}\right) + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}\bigg|_0 \dot{z}, \dot{z}\right),$$

W^1 — каноническая 1-форма ydx, $\tilde{z}(t) = (z(t), \partial\Lambda/\partial\dot{z}|_{z=z(t), \dot{z}=\dot{z}(t)})$, $\Delta W^1(\tilde{z}(t_i)) = W^1(\tilde{z}_{t_i^+}) - W^1(\tilde{z}_{t_i^-})$ — скачок 1-формы W^1 в точке излома t_i поля $z(t)$.

Момент времени $t \in R$ — фокальная точка кратности $\tau(t)$, если естественная проекция $p : W^s \subset T^*M^n \to M^n$ вырождена в точке $(x_0(t), y_0(t)) \in W^s$ со степенью вырождения $\tau(t)$. Определим $I(x_0)$ как сумму фокальных точек, лежащих на $(0, 2\pi)$, причем каждая фокальная точка считается столько раз, какова ее кратность.

Следующая лемма аналогична теореме Морса об индексе. Ее доказательство есть обобщение доказательства из работы [4], проведенного для случая, когда $L(x) = \langle x, x\rangle/2$, $x \in TM^n$, где $\langle , \rangle$ — риманова метрика на M^n.

Лемма 2. *Индекс Морса* $\mu(x_0)$ *гиперболической экстремали* $x_0 \in X$ *равен* $I(x_0)$.

Доказательство. Пусть $t_0 \in [0, 2\pi]$ — фокальная точка пары $(W^s, (x_0(0), y_0(0))$ кратности $\tau(t_0)$. Обозначим символом A ограничение оператора монодромии системы (2) на инвариантное подпространство H_0, отвечающее собственным значениям оператора монодромии, по модулю не равным единице. Линейное подпространство $V \subset E_p^s \cap H_0$, $p = \varphi^{t_0}(x_0(0), y_0(0))$, состоящее из всех векторов $v = (0, z)$, имеет размерность $\tau(t_0)$. Покажем, что существует $\tau(t_0)$ линейно независимых полей Якоби $(\xi(t), \eta(t))$, $(\xi(t_0), \eta(t_0)) \in E_p^s \cap H_0$, удовлетворяющих системе (2) таких, что

$$\xi(t_0 + 2\pi) = \xi(t_0). \tag{4}$$

Действительно, равенство (4) эквивалентно $(A - E)(\xi(t_0), \eta(t_0)) \in \in V$ (E — тождественный оператор). Так как собственные числа оператора A не равны по модулю единице, то существует $(A - E)^{-1}$. Пусть $\tilde{V} = (A - - E)^{-1} V$. Тогда поля Якоби $\tilde{\xi}(t) = (\xi(t), \eta(t))$, $(\xi(0), \eta(0)) \in \tilde{V}$ обладают требуемым свойством (4) и таких полей $\tau(t)$ штук.

Рассмотрим линейное пространство U, порожденное полями

$$\bar{\xi}(t) = \begin{cases} \xi(t + 2\pi) \text{ если } 0 \leqslant t \leqslant t_0, \\ \xi(t) \text{ если } t_0 \leqslant t \leqslant 2\pi. \end{cases} \tag{5}$$

Покажем, что $U \subset H$ — нулевое пространство ограничения гессиана E. Для этого выберем образующую типа (5) и вычислим

$$E(\bar{\xi}, \bar{\xi}) = -\Delta W^1(\xi(t_0), \eta(t_0)) = (\xi(t_0) + 2\pi), \eta(t_0 + 2\pi)) - (\xi(t_0)\eta(t_0)). \tag{6}$$

Так как равенство (4) имеет место, то соотношение (6) представляется в следующей форме:

$$E(\bar{\xi}, \bar{\xi}) = (\xi(t_0), \eta(t_0 + 2\pi) - \eta(t_0)) = W^2(\tilde{\xi}(t_0), \tilde{\xi}(t_0 + 2\pi) - \tilde{\xi}(t_0)).$$

Поскольку $\tilde{\xi}(t_0) \in E_p^s$, $\tilde{\xi}(t_0 + 2\pi) - \tilde{\xi}(t_0) \in E_p^s$ и плоскость E_p^s лагранжева, то $E(\bar{\xi}, \bar{\xi}) = 0$.

Покажем теперь, что U — максимальное нулевое пространство формы E. Для этого достаточно рассмотреть дифференцируемое поле $z \in H$, $z \not\equiv 0$, такое, что для каждого образующего поля типа (5) выполняется равенство $E(z, \bar{z}) = 0$, и показать, что из этого следует $E(z, z) > 0$. Вначале установим, что такое поле $z \in H$ можно представить в следующей форме:

$$z(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t) W_i(t), \tag{7}$$

где $W_i(t) = \xi_i(t + 2\pi) - \xi_i(t)$ — поля Якоби, покрывающие $E^s(x_0(t), y_0(t))$, и $a_i(t)$ — дифференцируемые функции. Если t — невырожденная точка, т. е. $\tau(t) = 0$, то представление (7) очевидно.

Пусть точка $t = t_0$ такая, что $\tau(t_0) = k \neq 0$. Тогда для образующих полей $\xi_i = \xi_i(t)$, $i = \overline{1, k}$, реализующих вырождение $\tau(t_0)$, имеем

$$0 = E(z, \xi_i) = (\eta_i(t_0 + 2\pi) - \eta_i(t_0), z(t_0)). \tag{8}$$

С другой стороны, для векторов $\eta_i(t_0 + 2\pi) - \eta_i(t_0) \not\equiv 0$, $i = \overline{1, k}$, $W_j(t_0) = 0$, $j = \overline{k + 1, n}$, находим

$$0 = (W_j(t_0), \eta_i(t_0 + 2\pi) - \eta_i(t_0)) = W^2(W_j(t_0), \tilde{\xi}_i(t_0 + 2\pi) - \tilde{\xi}_i(t_0)). \tag{9}$$

Равенствами (8) и (9) представление (7) доказано. Дифференцируемость функций $a_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, очевидна.

Покажем, что $E(z, z) > 0$. Рассмотрим гессиан E как вторичный функционал вариационной задачи с вторичным лагранжианом Λ. Для кривых $z(t)$, удовлетворяющих условию (7), определим действие $S(t)$ формулой $S(t) = \int\limits_0^t \Lambda(t, z, \dot{z})\, dt$. Тогда

$$E(z, z) = \int\limits_0^{2\pi} \Lambda(t, z, \dot{z})\, dt = \sum_i \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \Lambda(t, z, \dot{z})\, dt, \tag{10}$$

где t_i — точки, в которых вырождена естественная проекция $p: W^s(x_0(t), y_0(t)) \to M^n$.

Применяя к равенству (10) формулу Веерштрасса [5], получаем

$$E(z, z) = \sum_i [S(t_{i+1}) - S(t_i)] + \sum_i \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \mathscr{E}(z, \dot{z})\, dt. \tag{11}$$

В равенстве (11) $\mathscr{E}$ обозначает функцию Веерштрасса. Поскольку $z(t)$ — замкнутая кривая, удовлетворяющая (7), то $\sum\limits_i [S(t_{i-1}) - S(t_i)] = 0$ и так как лагранжиан L удовлетворяет условию выпуклости Лежандра, то функция Веерштрасса положительна: $\mathscr{E} > 0$. Поэтому

$$E(z, z) = \sum_i \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \mathscr{E}(z, \dot{z})\, dt > 0. \tag{12}$$

Невырожденность формы E доказывается от противного. Пусть $E(z, \xi) = 0$ для каждого $\xi \in H$ и фиксированного $z \in H$, $z \neq 0$. Тогда $E(z, z) = 0$, но это противоречит (12). Лемма доказана.

Используя подходящую связность на кокасательном расслоении T^*M^n, можно добиться того, чтобы считать систему Якоби (2) заданной на пространстве $R^{2(n-1)}$.

Гамильтоновой системе дифференциальных уравнений (2), заданной на пространстве $R^{2(n-1)}$, ставится в соответствие кривая $Y(t)$ в группе симплектических матриц $\mathrm{Sp}(n-1)$ таким образом, что

$$Y(t) \in \mathrm{Sp}(n-1), \qquad Y(0) = E_{2(n-1)}, \qquad t \in [0, 2\pi], \tag{13}$$

$Y(t)$ — матрициант системы (2). И наоборот, каждой кривой (13) соответствует система (2), матрициант которой совпадает с этой кривой [6].

Пусть матрица $Y(t)$ имеет вид

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_3(t) \\ y_2(t) & y_4(t) \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где $y_i(t)$, $i = \overline{1, 4}$, — квадратные матрицы порядка $(n-1)$. При этом предполагается, что базис в $R^{2(n-1)}$ выбран так, что векторы, образованные вектор-столбцами матрицы $\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix}$, лежат в устойчивом подпространстве $E^s(0)$.

Определим аргумент матрицы (14) формулой из [6]: $\operatorname{Arg} Y(t) = \operatorname{Arg} \det(y_1 + iy_2)$.

Рассмотрим пространство линейных 2π-периодических гиперболических гамильтоновых систем (2). Обозначим его символом $\mathfrak{R}$.

По определению система, которая задается гамильтонианом $\mathscr{H}_1$, непрерывно деформируется в систему, определяемую гамильтонианом $\mathscr{H}_2$ по системам пространства $\mathfrak{R}$, если существует непрерывное по $\lambda \in [0, 1]$ семейство гамильтонианов $\mathscr{H}(t, \lambda)$ такое, что при каждом $\lambda \in [0, 1]$ имеет место включение $\dot{Y} = I\mathscr{H}(t, \lambda) Y \in \mathfrak{R}$, $\mathscr{H}(t, 0) = \mathscr{H}_1(t)$, $\mathscr{H}(t, 1) = \mathscr{H}_2(t)$.

Индексом вращения системы (2) назовем целое число k в соотношении $\Delta \operatorname{Arg} Y(t)|_0^{2\pi} = 2k\pi + \varphi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, и обозначим его $\operatorname{Ind} \mathcal{H}(t)$.

Лемма 3. *Система $\mathcal{H}_1 \in \mathfrak{N}$ непрерывно деформируется в систему $\mathcal{H}_2 \in \mathfrak{N}$ по системам $\mathfrak{N}$ тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Ind} \mathcal{H}_1 = \operatorname{Ind} \mathcal{H}_2$.

Доказательство. В силу теоремы 4.1 из [7] для доказательства леммы достаточно показать, что матрицы $Y(t) \in \operatorname{Sp}(n-1)$ такие, что $Y(t) \in \mathfrak{N}$ образуют односвязное пространство $\mathfrak{M} \subset \operatorname{Sp}(n-1)$. Для этой цели воспользуемся аргументом из [7] $\operatorname{Arg}_* Y = \sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{Arg} \rho_i^t$, где ρ_i^t, $i = \overline{1, n-1}$,— собственные значения первого рода матрицы Y. По теореме 1.3 из [6] для доказательства односвязности $\mathfrak{M}$ достаточно показать, что для любой замкнутой кривой $Y(t)$, $t \in [0, 2\pi]$, в области $\mathfrak{M}$ имеет место равенство

$$\Delta \operatorname{Arg}_* Y(t)|_0^{2\pi} = 0. \tag{15}$$

Поскольку для каждого собственного значения ρ_i^t матрицы $Y \in \mathfrak{M}$ существует комплексно-сопряженное собственное значение $\rho_l^t = \rho_i^t$, то для каждой замкнутой кривой $Y(t)$ выполняется равенство (15). Лемма доказана.

Таким образом, системы, деформируемые одна в другую в пространстве гиперболических систем $\mathfrak{N}$, образуют область неустойчивости. Любые две системы из данной области неустойчивости имеют равные индексы вращения. Поэтому области неустойчивости можно приписать номер, определяющийся индексом вращения любого ее представителя. Следовательно, пространство гиперболических систем $\mathfrak{N}$ распадается в несвязное объединение областей неустойчивости $\mathfrak{N}_i$: $\mathfrak{N} = \bigcup_{i \in Z} \mathfrak{N}_i$, где i — номер области неустойчивости $\mathfrak{N}_i$.

Для каждой замкнутой кривой l, лежащей на лагранжевом многообразии $\Lambda^n \subset T^*M^n$, определен индекс Маслова $\operatorname{ind} l$ [8].

Лемма 4. *Для периодической траектории $u_0 = (x_0(t), y_0(t))$ выполняется равенство $\mu(x_0) = \operatorname{ind} u_0$.*

Доказательство получается несущественной модификацией доказательств теорем 7 и 13 из [9]. В силу аддитивности индекса Маслова ind и леммы 2 достаточно рассмотреть случай, когда траектория u_0 имеет трансверсальное пересечение с циклом особенностей $\Sigma'(W^s)$ в некоторой точке Q, и показать, что вклад в индекс Маслова от этого пересечения равен $+1$.

Пусть (x_i, p_i), $i = \overline{1, n}$, — координатная система в окрестности точки $Q \in T^*M^n$ такая, что $x_i(Q) = p_i(Q) = 0$ для всех $i = \overline{1, n}$. Многообразие W^s в окрестности точки Q задается n уравнениями $x_k = x_k(p_k, x_{\hat{k}})$, $p_{\hat{k}} = p_{\hat{k}}(p_k, x_{\hat{k}})$, где $\hat{k} = 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$ при некотором k. Будем считать, что $k = 1$. В окрестности точки $Q = \Sigma'(W^s)$ цикл особенностей $\Sigma'(W^s)$ задается уравнением $\partial x_1/\partial p_1 = 0$. Пусть $x_1(t)$, $p_1(t)$, $x_i(0) = p_i(0)$, $i = \overline{1, n}$, — уравнение траектории u_0 в окрестности точки Q.

Установим положительность величины

$$A = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial p_1} x_1(p_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))|_{t=0}. \tag{16}$$

Учитывая, что $x_i(t)$, $p_i(t)$ удовлетворяют системе Гамильтона (1), выражение (16) преобразуется к следующему виду: $A = (\partial^2/\partial p_1^2 H(x(t), p(t)))|_{t=0}$. Выбрав координаты $(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$ в окрестности точки Q так, чтобы симметрическая матрица $\partial^2 H/\partial p_1^2$ имела диагональный вид, и учитывая условие выпуклости Лежандра, приходим к выводу, что $A > 0$. Следовательно, пересечение траектории u_0 с циклом особенностей $\Sigma'(W^s)$ в точке Q дает вклад в индекс Маслова, равный $+1$.

Индекс Маслова замкнутой кривой $l \in \Lambda^n \subset R^{2n}$ вычисляется, согласно конструкции Арнольда [8], следующим образом. В каждой точке $l(t)$, $t \in [0, 2\pi]$, замкнутой кривой $l \in \Lambda^n$ имеется лагранжева касательная плоскость $V(t)$ к лагранжевому многообразию $\Lambda^n \subset R^{2n}$. Пусть $(l_1(t), \ldots, l_n(t))$ — ортонормированный репер пространства $V(t)$. Предположим, что зависимость репера от t непрерывная. Обозначим $(x_{1i}(t), \ldots, x_{ni}(t), y_{1i}(t), \ldots$ $\ldots, y_{ni}(t))$, $i = \overline{1, n}$, координаты орта $l_i(t) \in V(t)$ в пространстве R^{2n}. Рассмотрим унитарную матрицу $U(t) = \{x_{kl}(t) + iy_{kl}(t)\}_{k,l=1}^n$,

$$|\det U(t)| = 1. \tag{17}$$

За время полного обхода кривой квадрат определителя (17) совершит целое число оборотов вокруг начала координат на плоскости комплексного переменного, ориентированной от 1 к i. Это целое число есть индекс Маслова рассматриваемой замкнутой кривой $l \subset \Lambda^n$.

Лемма 5. *Индекс Морса* $\mu(x_0)$ *гиперболической экстремали* $x_0 \in X$ *и индекс вращения* $\mathrm{Ind}\, H(t)$ *соответствующей системы Якоби* (2) *связаны соотношением* $\mu(x_0) = 2\, \mathrm{Ind}\, H(t)$.

Доказательство. Пусть $(l_1, \ldots, l_n, f_1, \ldots, f_n)$ — ортонормированный базис R^{2n} такой, что $(l_1, \ldots, l_n) \in V(0)$, $(f_1, \ldots, f_n) \in W(0)$, где $V(0)$, $W(0)$ — касательные пространства многообразий W^s и W^u соответственно в точке $x_0(0), y_0(0))$. Рассмотрим матрицу решений

$$\begin{pmatrix} x_{11}(t) & \ldots & x_{1n}(t) & u_{11}(t) & \ldots & u_{1n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1}(t) & \ldots & x_{nn}(t) & u_{n1}(t) & \ldots & u_{nn}(t) \\ y_{11}(t) & \ldots & y_{1n}(t) & w_{11}(t) & \ldots & w_{1n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1}(t) & \ldots & y_{nn}(t) & w_{n1}(t) & \ldots & w_{nn}(t) \end{pmatrix} \tag{18}$$

системы (2).

Пусть

$$\begin{aligned} \bar{l}_1 &= (l_{n1}(t), \ldots, l_{2n,1}(t)), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \bar{l}_n &= (l_{nn}(t), \ldots, l_{2n,n}(t)) \end{aligned} \tag{19}$$

— ортонормированный базис подпространства, натянутого на систему векторов

$$\begin{aligned} \overline{m}_1(t) &= (x_{11}(t) \ldots x_{n1}(t)\, y_{11}(t) \ldots y_{n1}(t)), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \overline{m}_n(t) &= (x_{n1}(t) \ldots x_{nn}(t)\, y_{n1}(t) \ldots y_{nn}(t)), \end{aligned} \tag{20}$$

$C(t) = \{c_{ij}(t)\}_{i,j=1}^n$ — действительная матрица перехода от базиса (20) к базису (19). Тогда комплексные матрицы $L(t) = \{l_{kj}(t) + il_{k+n,j}(t)\}_{k,j=1}^n$, $U(t) = \{x_{kl}(t) + iy_{kl}(t)\}_{k,l=1}^n$ удовлетворяют соотношению

$$L(t) = C(t)\, U(t). \tag{21}$$

Согласно конструкции Арнольда для вычисления индекса Маслова и лемме 4, индекс Морса $\mu(x_0)$, $x_0 \in X$, удовлетворяет соотношению

$$\Delta \operatorname{Arg} [\det L(t)]^2 |_0^{2\pi} = 2\pi\mu(x_0). \tag{22}$$

Используя (21), соотношение (22) можно переписать в виде

$$\Delta \operatorname{Arg} \det U(t) |_0^{2\pi} = \pi\mu(x_0). \tag{23}$$

В силу леммы 2.8 из [10] функция $\operatorname{Arg}' Y = \operatorname{Arg} \det U$ на группе симплектических матриц есть аргумент в смысле [10]. Поэтому равенство (23), используя индекс вращения k, не зависящий, согласно теореме 2 из [10], от выбора аргумента, запишем следующим образом:

$$\mu\pi = 2k\pi + \varphi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \tag{24}$$

В зависимости от четности или нечетности индекса Морса равенство (24) приводит соответственно к соотношениям

$$\mu = 2k, \qquad \mu = 2k + 1. \tag{25}$$

Фазовое пространство T^*M ориентируемо. Выберем какую-нибудь ориентацию T^*M. Эта ориентация индуцирует ориентацию расслоения E^s для гиперболической траектории $(x_0(t),\ y_0(t))$. Матрициант системы (2) сохраняет ориентацию расслоения E^s. Поэтому в равенстве (24) $\varphi = 0$. Это приводит к уточнению соотношения (25): $\mu = 2k$. Лемма доказана.

Суммируя факты, изложенные в леммах 1—5, приходим к следующей теореме.

Теорема. *Индекс Морса гиперболической экстремали $x_0 \in X$ равен удвоенному номеру области неустойчивости, которой принадлежит соответствующая система уравнений Якоби* (2).

В заключение отметим, что для экстремалей система Якоби которых принадлежит сильно устойчивой области [6], соответствующая теорема доказана в [11]. В связи с этим было бы полезно найти максимально широкий класс экстремалей $x_0 \in X$, для которых можно построить аналогичную теорию.

1. *Клингенберг В.* Лекции о замкнутых геодезических.— М. : Мир, 1982.— 413 с.
2. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику.— М. : Мир, 1975.— 304 с.
3. *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии.— М. : Мир, 1970.— 410 с.
4. *Klingenberg W.* Riemanian manifolds with geodesic flow of Anosov type. — Ann. of Math., 1974, N 99, p. 1—13.
5. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления.— М. : Мир, 1974.— 488 с.
6. *Гельфанд И. М., Лидский В. Б.* О структуре областей устойчивости канонических систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.— Успехи мат. наук, 1955, **10**, вып. 1 (63), с. 1—40.
7. *Якубович В. А.* Строение группы симплектических матриц и структура множества неустойчивых канонических систем с периодическими коэффициентами.— Мат. сб., 1958, **44** (86) № 3, с. 313—352.
8. *Арнольд В. И.* О характеристическом классе, входящем в условия квантования.— Функц. анализ и его применения, 1967, **1**, вып. 1, с. 1—14.
9. *Маслов В. П., Федорюк М. В.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики.— М. : Наука, 1976.— 296 с.
10. *Якубович В. А.* Аргументы на группе симплектических матриц.— Мат. сб., 1961, **55** (97), № 3, с. 255—280.
11. *Cushman R.* The relationship between the index of a strongly stable periodic linear hamiltonian vectorfield and the index of its stability domain.—Duke Math. Journal, 1978, **45**, N 4, p. 701—709.

Ин-т матем. АН УССР, Киев

Поступила 26.04.83