УДК 519.41/47

И. Д. Иванюта

Силовские 2-подгруппы группы $GL(q)$

Как известно, в бесконечных группах силовские p-подгруппы в общем случае не обязательно изоморфны. Поэтому естественно возникает задача охарактеризовать всевозможные неизоморфные силовские p-подгруппы таких групп. В настоящей работе эта задача решается для силовских 2-подгрупп предельной полной линейной группы $GL(q)$ над конечным полем $GF(q)$ из q элементов для нечетного числа q. Группа $GL(q)$ — объединение бесконечной цепи полных линейных групп конечных степеней над полем $GF(q)$ при отождествлении матрицы a из полной линейной группы $GL(n, q)$ степени n с матрицей $\operatorname{diag}[a, 1]$ группы $GL(n+1, q)$. Для описания силовских 2-подгрупп группы $GL(q)$ применяется тот же способ, что и для описания силовских p-подгрупп счетной симметрической группы S [1] и силовских p-подгрупп группы $GL(q)$ при нечетном p, не делящем q [2]. А именно: с помощью представления группы $GL(q)$ различными способами в виде объединения бесконечных цепей групп $GL(n, q)$ и выбора в последних силовских 2-подгрупп Q_n так, чтобы $Q_n \subseteq Q_s$ при $n < s$, строится бесконечная серия неизоморфных силовских 2-подгрупп группы $GL(q)$. Затем методом полных проекционных множеств можно показать, что любая силовская 2-подгруппа в $GL(q)$ импримитивна. После этого легко доказать, что любая силовская 2-подгруппа группы $GL(q)$ подобна одной из групп построенной серии. Таким образом, все силовские 2-подгруппы группы $GL(q)$ оказались охарактеризованными. Каждая из них описывается некоторыми хорошо обозримыми инвариантами: подходящим целым 2-адическим числом и подходящим конечным или счетным кардинальным числом. Мощность множества неизоморфных силовских 2-подгрупп группы $GL(q)$ равна континууму.

1. Силовские 2-подгруппы классических групп конечных степеней над полем $GF(q)$ для нечетного q изучены в [3].

Пусть C_n — циклическая подгруппа порядка n симметрической группы S_n, $T_i = C_2 \wr C_2 \wr \ldots \wr C_2$ — сплетение i экземпляров группы C_2, P_1 — силовская 2-подгруппа группы $GL(2, q)$. Тогда $P_r = P_1 \wr T_{r-1}$ — силовская 2-подгруппа группы $GL(2^r, q)$. Группа P_1 устроена следующим образом.

Если $q \equiv 1 \pmod 4$ и 2^s — наибольшая степень числа 2, делящая $q-1$ (обозначим $2^s \parallel q-1$), то P_1 имеет порядок 2^{2s+1}. Пусть ε — примитивный корень степени 2^s из 1 в $GF(q)$. Тогда матрицы $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ порождают группу порядка 2^{2s+1} и, следовательно, $P_1 = C_{2^s} \wr C_2$.

Если $q \equiv 3 \pmod 4$ и $2^m \parallel q+1$, то P_1 имеет порядок 2^{m+2}. Пусть ε — примитивный корень из 1 степени 2^{m+1} в $GF(q^2)$. Матрица $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \varepsilon + \varepsilon^q \end{pmatrix}$ имеет порядок 2^{m+1}. Пусть $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $b^{-1}ab = a^{-1+2^m}$ и ab имеет порядок 2. Следовательно, $P = \langle a, ab \rangle$ — полудиэдральная группа.

В общем случае строение силовской 2-подгруппы группы $GL(n, q)$ следующее: если $n = 2^{r_1} + 2^{r_2} + \dots + 2^{r_t}$, $0 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant \dots \leqslant r_t$, — разложение n по степеням числа 2, то эта подгруппа изоморфна прямому произведению $P_{r_1} \times P_{r_2} \times \dots \times P_{r_t}$, где при $r_1 = 0$ полагаем $P_0 = C_{2s}$, если $q \equiv 1 \pmod 4$, и $P_0 = C_2$, если $q \equiv 3 \pmod 4$.

Замечая, что группа P_k, $k = 2, 3, \dots$, содержит прямое произведение $P_{k-1}^{(1)} \times P_{k-1}^{(2)}$ двух групп, подобных P_{k-1}, и отождествляя P_{k-1} с $P_{k-1}^{(1)}$, получаем бесконечную возрастающую цепь подгрупп $P_1 \subset P_2 \subset \dots \subset P_n \subset \dots$, объединение которой обозначим P.

Группу P можно рассматривать как линейную группу бесконечномерного линейного пространства V над полем $GF(q)$. Из ее построения следует, что пространство V можно представить в виде прямой суммы 2-мерных подпространств $V_2^{(i)}$ — систем импримитивности группы P. Группа P содержит нормальную подгруппу $K_1 = \prod\limits_{i=1}^{\infty} P_1^{(i)}$, представляющую собой прямое произведение групп, подобных P_1, которая указанные системы импримитивности переводит в себя. Далее, пространство V можно представить в виде прямой суммы 4-мерных подпространств $V_4^{(i)}$, каждое из которых является прямой суммой двух указанных выше 2-мерных подпространств, причем подпространства $V_4^{(i)}$ являются системами импримитивности группы P. Группа P содержит нормальную подгруппу $K_2 = \prod\limits_{i=1}^{\infty} P_2^{(i)}$, — прямое произведение групп, подобных P_2, которая системы импримитивности второй ступени переводит в себя. Аналогично для областей импримитивности третьей ступени и т. д. Следовательно, $P = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i$.

2. Перейдем непосредственно к изучению силовских 2-подгрупп группы $GL(q)$.

Лемма 1. *Группа P — силовская 2-подгруппа группы $GL(q)$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 1 из [2].

Силовские 2-подгруппы группы $GL(q)$ можно строить следующим образом. Представим V в виде прямой суммы 2^{r_i}-мерных подпространств, где $r_i < r_j$ при $i < j$ (не более чем по одному подпространству для каждого натурального числа r_i), и не более чем счетного множества J бесконечномерных подпространств. В полных линейных группах $GL(V_{2^{r_i}})$ 2^{r_i}-мерных подпространств выбираем силовские 2-подгруппы, подобные P_{r_i}, в полных линейных группах $GL(V^{(j)})$ бесконечномерных подпространств $V^{(j)}$ выбираем силовские 2-подгруппы $P^{(j)}$, изоморфные P. Прямое произведение $Q = \prod\limits_{i=1}^{\infty} P_{r_i} \times \prod\limits_{j \in J} P^{(j)}$ выбранных подгрупп и будет силовской 2-подгруппой группы $GL(V)$. Действительно, группа Q — объединение возрастающей цепи подгрупп $P_{r_1} \subset P_{r_1} \times P_{r_2}^{(1)} \subset \dots \subset P_{r_1} \times \dots P_{r_n} \times P_{r_{n+1}}^{(1)} \times \dots \times P_{r_{2n}}^{(n)} \subset \dots$, в которых $P_k^{(j)} \subset P^{(j)} \subset GL(V^{(j)})$, представляющих собой силовские 2-подгруппы соответствующих групп возрастающей цепи

$$GL(V_{2^{r_1}}) \subset GL(V_{2^{r_1}} \oplus V_{2^{r_2}}^{(1)}) \subset \dots \subset GL(V_{2^{r_1}} \oplus \dots \oplus V_{2^{r_n}} \oplus V_{2^{r_{n+1}}}^{(1)} \oplus \dots$$
$$\dots \oplus V_{2^{r_{2n}}}^{(n)}) \subset \dots,$$

объединение которой есть $GL(V)$.

Таким образом, справедливо утверждение.

Лемма 2. *Пусть*

$$Q = \prod_{i \in I} P_{r_i} \times \prod_{j \in J} P^{(j)}, \tag{1}$$

причем I бесконечно, если $J=\varnothing$. Тогда Q — силовская 2-подгруппа группы $GL(q)$.

3. Оказывается, указанными в лемме 2 группами исчерпываются все силовские 2-подгруппы группы $GL(q)$.

Теорема 1. *Пусть R — произвольная силовская 2-подгруппа группы $GL(q)$. Тогда R изоморфна одной из групп вида* (1).

Ради удобства изложения введем некоторые вспомогательные понятия.

Если линейная группа G линейного пространства V импримитивна и все системы импримитивности являются подпространствами одинаковой конечной размерности k пространства V, то будем говорить, что группа G обладает однородной импримитивностью ранга k. Назовем группу G 1-неприводимой на V, если V не содержит одномерных G-инвариантных подпространств.

Из описания строения силовских 2-подгрупп группы $GL(n, q)$ следует лемма.

Лемма 3. *Если 2-подгруппа R группы $GL(n, q)$ 1-неприводима на V_k, $k\leqslant n$, то она обладает на V_k по крайней мере одной однородной импримитивностью ранга* 2.

Замечание. Если $S=\{V_{k_i}/i\in I\}$ — указанное в лемме 3 множество систем импримитивности группы R и $\tilde{S}$ — его подмножество, состоящее из всех тех V_{k_i}, которые R оставляет на месте, то на множестве $S\setminus\tilde{S}$ группа R также обладает хотя бы одной однородной импримитивностью ранга 2 в том смысле, что ее системы импримитивности будут иметь вид $V_{k_i}\oplus V_{k_j}$. Далее, если S_1 — множество систем импримитивности последнего вида и $\tilde{S}_1$—его подмножество, состоящее из систем импримитивности, которые R оставляет на месте, то на множестве $S_1\setminus\tilde{S}_1$ группа R снова обладает однородной импримитивностью ранга 2 в указанном выше смысле и т. д.

Лемма 4. *Если некоторая 2-подгруппа R группы $GL(q)$ 1-неприводима на пространстве V, то она обладает на V по крайней мере одной однородной импримитивностью ранга* 2.

Доказательство. Пусть $\Phi=\{R_\alpha\}$ — множество всех конечных подгрупп группы R. Множество Φ частично упорядочено по включению: $R_\alpha\subseteq R_\beta$. Пусть $W(\alpha)$ — подпространство пространства V, на котором R_α 1-неприводимо. По лемме 3 R_α обладает по крайней мере одной однородной импримитивностью ранга 2 на $W(\alpha)$. Пусть $A_\alpha=\{\theta_\alpha\}$ — всевозможные такие импримитивности группы R_α. Рассмотрим такие R_α и R_β из R, что $R_\alpha\subset R_\beta$. Очевидно, тогда $W(\alpha)\subseteq W(\beta)$.

Поскольку q нечетно, то пространство $W(\beta)$ можно представить в виде прямой суммы R_α-инвариантного подпространства $W(\alpha)$ и R_α-инвариантных одномерных подпространств (v_i). Пусть $W(\alpha)=(u_1, u_2)\oplus\ldots\oplus(u_{n-1}, u_n)$ — одно из разложений $W(\alpha)$ на системы импримитивности, где (u_{i-1}, u_i) — подпространство, натянутое на базисные векторы u_{i-1}, u_i.

Отметим следующий важный факт. В одной системе импримитивности $\theta_\beta\in A_\beta$ группы R_β не могут быть векторы u_k и v_j. Действительно, если u_k, v_j содержатся в одной системе импримитивности V_2 группы R_β, то $V_2=(u_k, v_j)$. Но поскольку $v_jg=\gamma v_j$, $\gamma\in GF(q)$ для всех $g\in R_\alpha$, то по теореме Машке найдется такой вектор $u=\delta u_k+\tau v_j\in V_2$, что $V_2=(u, v_j)$ и $ug=\mu u$, $\mu\in GF(q)$ для всех $g\in R_\alpha$, т. е. $(\delta u_k+\tau v_j)g=\delta\mu u_k+\tau\mu v_j$, откуда следует, что $u_kg=\mu u_k$ для всех $g\in R_\alpha$. А это невозможно, так как R_α 1-неприводима на $W(\alpha)$.

Указанный факт справедлив для любого ненулевого вектора систем импримитивности группы R_α, поскольку такой вектор можно включить в базис системы импримитивности.

Совокупность систем импримитивности $\theta_\beta\in A_\beta$, состоящих из векторов $W(\alpha)$, обозначим θ_β^α. Система Ψ конечных множеств $A_\alpha, A_\beta, \ldots$ частично упорядочена, если $A_\alpha\leqslant A_\beta$ при $R_\alpha\subseteq R_\beta$. Для этой системы справедливо следующее.

1. Для любых двух множеств A_α и A_β из Ψ существует такое множество $A_\gamma \in \Psi$, что $A_\alpha \leqslant A_\gamma$, $A_\beta \leqslant A_\gamma$, так как для любых R_α, R_β из Φ существует такое R_γ в Φ, что $R_\alpha \subseteq R_\gamma$, $R_\beta \subseteq R_\gamma$.

Если $A_\alpha \leqslant A_\beta$, то отображение $\varphi_{\beta\alpha}$ множества A_β в множество A_α — это ограничение θ_β на $W(\alpha)$, т. е. $\theta_\beta\varphi_{\beta\alpha} = \theta_\beta^\alpha$.

2. Если $A_\alpha \leqslant A_\beta$, $A_\beta \leqslant A_\gamma$, то очевидно $\theta_\gamma\varphi_{\gamma\alpha} = \theta_\beta^\alpha$; $\theta_\gamma\varphi_{\gamma\beta}\varphi_{\beta\alpha} = \theta_\gamma^\alpha$.

3. $\theta_\alpha\varphi_{\alpha\alpha} = \theta_\alpha$.

Из приведенных условий видно, что в системе Ψ существует полное проекционное множество. Иными словами, в каждом из множеств A_α можно так выбрать по одной системе импримитивности, что любые две из них будут содержаться в некоторой третьей, являющейся общим прообразом первых двух. Полное проекционное множество есть система импримитивности группы R, поскольку $\bigcup\limits_\alpha R_\alpha = R$.

Замечание. Если S — указанное в лемме 4 множество систем импримитивности группы R и S_1 — его подмножество, состоящее из всех тех систем, которые R не оставляет на месте, то на этом подмножестве группа R снова обладает однородной импримитивностью ранга 2 в смысле замечания к лемме 3 и т. д.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству леммы 3 из [1] и сводится к построению проекционного множества.

Доказательство теоремы 1. Пусть группа R действует 1-неприводимо на пространстве $W \subseteq V$. Если $W \subset V$, то обозначим через U подпространство пространства V, натянутое на конечное число векторов $u \in U$ таких, что $ug = \alpha u$, $\alpha \in GF(q)$ для всех $g \in R$. Очевидно, проекция u на W равна нулю, поэтому $U \cap W = 0$. Разложим пространство U в прямую сумму R-инвариантных одномерных подпространств (v_i). Покажем, что $\dim U \leqslant 1$. Пусть R_0 — линейная группа, индуцированная R на (v_1). Очевидно $R_0 \subseteq P_0$. Если $\dim U \geqslant 2$, то группу, индуцированную R на $(v_1) \oplus (v_2)$, можно вложить в группу Q_1, изоморфную P_1, где гр (Q_1, R) — очевидно, 2-подгруппа группы $GL(q)$, причем гр $(Q_1, R) \supset R$, что противоречит силовости R. Ясно, что $V = (v_1) \oplus W$.

Группа R обладает на пространстве W однородной импримитивностью ранга 2. Если число систем, инвариантных относительно R, не меньше двух, то над любыми двумя из них можно построить цикл c, и тогда гр (R, c) будет 2-подгруппой $GL(q)$, причем гр $(R, c) \supset R$, что невозможно.

Таким образом, относительно R инвариантна не более чем одна система импримитивности. Если такая система существует, то обозначим через R_1 группу, индуцированную на ней группой R. Очевидно, $R_1 \subseteq P_1$. Пусть M — множество систем, которые перемещаются по крайней мере одним элементом $g \in R$, $R_1^* = \prod\limits_{i=1}^{\infty} R_1^{(i)}$ — прямое произведение групп, индуцированных группой R на системах множества M, $R_1^{(i)} \subseteq P_1^{(i)} \simeq P_1$, $P_1^* = \prod\limits_{i=1}^{\infty} P_1^{(i)}$. На множестве M группа R обладает однородной импримитивностью ранга 2. Не более чем одна из ее систем импримитивности инвариантна относительно R. Если такая система существует, то пусть R_2 — группа, индуцированная на ней группой R, $R_2 \subseteq P_2$, $R_2^* = \prod\limits_{i=1}^{\infty} R_2^{(i)}$ — прямое произведение групп, индуцированных на системах, перемещающихся по крайней мере одним элементом $g \in R$, $R_2^{(i)} \subseteq P_2^{(i)} \simeq P_2$, $P_2^* = \prod\limits_{i=1}^{\infty} P_2^{(i)}$, и т. д. Тогда получим

$$R_0 \subset R_0 \times R_1^* \subset R_0 \times R_1 \times R_2^* \subset \ldots, \tag{2}$$

$$P_0 \subset P_0 \times P_1^* \subset P_0 \times P_1 \times P_2^* \subset \ldots. \tag{3}$$

Пусть H и $\overline{H}$ — объединение цепей групп (2) и (3) соответственно.

Очевидно, $R \subseteq H \subseteq \overline{H}$. Группа $\overline{H}$ содержит $\prod_{i \in I} P_{r_i}$. Пусть $\prod_{i \in I} P_{r_i}$ — линейная группа пространства V'. Если $V' = V$, то $\overline{H} = \prod_{i \in I} P_{r_i}$, причем множество I, очевидно, бесконечно. Если же $V' \subset V$, то из определения группы $\overline{H}$ видно, что она содержит или подгруппу, подобную P, или подгруппу, изоморфную $\prod_{j \in J} P^{(j)}$, где $P^{(j)}$ подобна P.

Итак, в общем случае $\overline{H} = \prod_{i \in I} P_{r_i} \times \prod_{j \in I} P^{(j)}$. В силу леммы 2 $\overline{H}$ — силовская 2-подгруппа группы $GL(q)$. Но R — также силовская 2-подгруппа и $R \subseteq \overline{H}$. Поэтому $R = \overline{H}$.

4. Теорема 2. *Пусть Q и R — силовские 2-подгруппы группы $GL(q)$, причем $Q = \prod_{i \in I} P_{r_i} \times \prod_{\gamma \in \Gamma} P^{(\gamma)}$, $R = \prod_{j \in J} P_{r_j} \times \prod_{\delta \in \Delta} P^{(\delta)}$. Группы Q и R изоморфны тогда и только тогда, когда $I = J$ и множества Γ и Δ равномощны.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2 работы [2].

1. *Иванюта И. Д.* Силовские p-подгруппы счетной симметрической группы.— Укр. мат. журн., 1963, **15**, № 3, с. 240—248.
2. *Иванюта И. Д.* Силовские p-подгруппы группы $GL(q)$.— Укр. мат. журн., 1980, **32**, № 3, с. 813—818.
3. *R. Carter, P. Fong.* The Sylow 2-subgroups of the finite classical groups.—J. Algebra, 1964, **1**, № 2, p. 139—151.

Киев. автомобильно-дор. ин-т Поступила в редакцию 27.06.83