УДК 517.987.1; 517.983.3

Д. Л. Фінкельштейн (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ЗГОРТКИ НА ПРОСТОРАХ КОНФІГУРАЦІЙ. II. ПРОСТОРИ ЛОКАЛЬНО СКІНЧЕННИХ КОНФІГУРАЦІЙ*

We consider the convolution of probability measures on spaces of locally finite configurations (subsets of a phase space) as well as their connection with the convolution of the corresponding correlation measures and functionals. In particular, the convolution of Gibbs measures is studied. We also describe a relationship between invariant measures with respect to some operator and properties of the corresponding image of this operator on correlation functions.

Рассмотрена свертка вероятностных мер на пространствах локально конечных конфигураций (подмножеств фазового пространства) и их связь со свертками соответствующих корреляционных мер и корреляционных функционалов, а также свертка гиббсовских мер. Исследована связь инвариантных мер относительно некоторого оператора и свойства соответствующего образа этого оператора на корреляционных функциях.

1. Вступ. У даній роботі розглядаються згортки на просторах конфігурацій над континуальними просторами. Першу частину [2] цієї роботи було присвячено згорткам над просторами скінченних конфігурацій. Більш детально, нехай X — зв'язний орієнтовний некомпактний ріманів C^∞-многовид, $\mathcal{O}(X)$ — клас усіх відкритих множин з X, $\mathcal{B}(X)$ — відповідна борелівська σ-алгебра. Класи всіх відкритих та борелівських множин з X з компактними замиканнями позначимо $\mathcal{O}_{\mathrm{c}}(X)$ та $\mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X)$ відповідно. Будемо вважати, що на X задано неатомарну міру Радона m, тобто $m(\Lambda) < \infty$, $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X)$, і $m(\{x\}) = 0$, $x \in X$. Припустимо також, що існує послідовність $\{\Lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X)$ така, що $\Lambda_n \subset \Lambda_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, і $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_n = X$. Простором скінченних конфігурацій над X називається множина

$$\Gamma_0 := \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}_0} \Gamma^{(n)}, \tag{1.1}$$

де $\Gamma^{(n)} \simeq \widetilde{X^n}/S_n$, $\widetilde{X^n} = \big\{(x_1,\ldots,x_n) \in X^n \;\big|\; x_k \neq x_l, \text{ якщо } k \neq l\big\}$, S_n — група перестановок над множиною $\{1,\ldots,n\}$, символ $\sqcup$ означає диз'юнктне об'єднання. Детальніше ці та подальші означення та позначення див. у [2]. Там же наведено короткий історичний огляд досліджень на просторах конфігурацій. На просторі Γ_0 природним чином вводиться топологічна та вимірна структури, індуковані відповідними структурами простору X, зокрема можна розглянути борелівську σ-алгебру $\mathcal{B}(\Gamma_0)$. Базовою мірою на $(\Gamma_0, \mathcal{B}(\Gamma_0))$ є так звана міра Лебега – Пуассона

$$\lambda_z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} m^{(n)}, \tag{1.2}$$

де $z > 0$ і міра $m^{(n)}$ на $\Gamma^{(n)}$ породжується мірою $m^{\otimes n}$ на X^n. Міра λ_z належить простору $\mathcal{M}_{\mathrm{lf}}(\Gamma_0)$ локально скінченних мір на Γ_0, тобто $\lambda_z(B) < \infty$ для довільної вимірної обмеженої множини B (позначення $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\Gamma_0)$), тобто такої множини, для якої знайдуться $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X)$ та $N \in \mathbb{N}$ такі, що $B \subset \bigsqcup_{n=0}^{N} \Gamma_\Lambda^{(n)}$. Покладемо $\lambda := \lambda_1$.

Для вимірних функцій G_1, G_2 на Γ_0 (позначення $G_1, G_2 \in L^0(\Gamma_0)$) в [2] було розглянуто властивості згорток

*Частково підтримано стипендією Президента України для молодих учених та грантом Президента України для підтримки наукових досліджень молодих учених.

$$(G_1 * G_2)(\eta) := \sum_{\xi_1 \sqcup \xi_2 = \eta} G_1(\xi_1)\, G_2(\xi_2), \tag{1.3}$$

$$(G_1 \star G_2)(\eta) := \sum_{\xi_1 \cup \xi_2 = \eta} G_1(\xi_1)\, G_2(\xi_2). \tag{1.4}$$

Також було розглянуто згортку мір на просторі $(\Gamma_0, \mathcal{B}(\Gamma_0))$, а саме, якщо ρ_1, ρ_2 — міри на просторі $(\Gamma_0, \mathcal{B}(\Gamma_0))$, то згорткою цих мір називається міра $\rho := \rho_1 * \rho_2$ на $(\Gamma_0, \mathcal{B}(\Gamma_0))$ така, що для довільної вимірної $G\colon \Gamma_0 \to \mathbb{R}$

$$\int_{\Gamma_0} G(\eta) d\rho(\eta) = \int_{\Gamma_0} \int_{\Gamma_0} G(\eta_1 \cup \eta_2)\, d\rho_1(\eta_1)\, d\rho_2(\eta_2), \tag{1.5}$$

якщо тільки права частина є скінченною. Також у [2] було показано, що якщо існують похідні Радона – Нікодима $k_i = \dfrac{d\rho_i}{d\lambda}$, $i = 1, 2$, то для $\rho = \rho_1 * \rho_2$ існує $k = \dfrac{d\rho}{d\lambda} = k_1 * k_2$ в сенсі формули (1.3). Наведемо ще один важливий факт: для довільних $H, G_1, G_2 \in L^0(\Gamma_0)$ виконується тотожність

$$\int_{\Gamma_0} H(\eta)(G_1 * G_2)(\eta) d\lambda(\eta) = \int_{\Gamma_0} \int_{\Gamma_0} H(\eta \cup \xi) G_1(\eta) G_2(\xi) d\lambda(\xi) d\lambda(\eta), \tag{1.6}$$

якщо принаймні один з інтегралів має сенс (див., наприклад, [14]).

Простір Γ локально скінченних конфігурацій та основні структури на ньому визначено у другому пункті даної роботи. У третьому пункті розглянуто елементи гармонічного аналізу на просторах конфігурацій, який є необхідним у подальшому. Зокрема, він пов'язаний із властивостями згортки (1.4). У четвертому пункті розглянуто простори конфігурацій двох різних типів, що дозволило у п'ятому пункті розглянути згортки ймовірнісних мір на просторах локально скінченних конфігурацій та їхній зв'язок із згаданими вище згортками на просторах скінченних конфігурацій. Також у п'ятому пункті розглянуто питання про згортку гіббсівських мір. Нарешті у шостому пункті побудовано низку прикладів, що пов'язані з операторами диференціювання відносно згортки (1.3), розглянутими в [2].

2. Простори локально скінченних конфігурацій.

Означення 2.1. *Простір конфігурацій Γ над X визначено як множину всіх локально скінченних підмножин з X, тобто*

$$\Gamma := \bigl\{ \gamma \subset X \bigm| |\gamma \cap \Lambda| < \infty \text{ для всіх } \Lambda \in \mathcal{B}_c(X) \bigr\}. \tag{2.1}$$

З означення 2.1 безпосередньо випливає, що локально скінченна множина — це не більш ніж злічення підмножина з X, що не має скінченних точок скупчення. Очевидно, що Γ_0 є підмножиною множини Γ, проте, як простір, Γ_0 відіграє самостійну роль у подальшому аналізі і розглядається незалежно. Визначимо простір Γ_Λ як такий, що складається з усіх конфігурацій $\gamma \in \Gamma$, які повністю лежать в $\Lambda \in \mathcal{B}_c(X)$. З означення 2.1 випливає, що всі такі конфігурації є скінченними. Отже, як множина, Γ_Λ збігається з $\Gamma_{0,\Lambda}$ (означення див. у [2]).

Клас усіх дійснозначних неперервних функцій на X з компактним носієм позначимо $C_0(X)$. Для довільної $f \in C_0(X)$ визначимо лінійну функцію на Γ рівністю $\langle f, \gamma \rangle := \sum_{x \in \gamma} f(x)$. Зазначимо, що сума насправді береться лише по скінченній множині точок з γ, які лежать всередині обмеженого в X носія функції f. Грубою топологією $\mathcal{O}(\Gamma)$ на просторі конфігурацій Γ називається найслабша топологія, відносно якої всі лінійні функції $\Gamma \ni \gamma \mapsto \langle f, \gamma \rangle \in \mathbb{R}$, $f \in C_0(X)$, є неперервними. Зазначимо також, що кожну конфігурацію $\gamma \in \Gamma$ можна ототожнити з мірою $\gamma(\cdot)\colon \mathcal{B}(X) \to \mathbb{R}_+$ на X, яка є лінійною комбінацією мір Дірака, тобто $\gamma \leftrightarrow \sum_{x\in\gamma} \varepsilon_x$. За означенням 2.1 ця міра є мірою Радона на $\mathcal{B}(X)$, тобто

$$\gamma(A) = \int\limits_A d\gamma(x) = \sum_{x\in\gamma} \int\limits_A d\varepsilon_x(y) = |\gamma \cap A| < \infty, \quad A \in \mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X).$$

Це дозволяє ізоморфно вкласти простір конфігурацій Γ у простір мір Радона $\mathcal{M}(X)$ на X. Груба топологія $\mathcal{O}(\Gamma)$ при цьому буде індукованою грубою топологією на просторі мір $\mathcal{M}(X)$, визначеною, наприклад, у [10] (розділ 7.3).

Покладемо $\gamma_\Lambda := \gamma \cap \Lambda$ для довільних $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X)$, $\gamma \in \Gamma$. База топології $\mathcal{O}(\Gamma)$ задається системою множин $\left\{\gamma \in \Gamma \;\middle|\; |\gamma_\Lambda| = n, \gamma_{\partial\Lambda} = \varnothing\right\}$, де $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X)$, $n \in \mathbb{N}_0$ та $\partial\Lambda$ є межею Λ (див., наприклад, [17]). Ця топологія є сепарабельною та метризованою [19], причому відповідний метричний простір буде повним. Зазначимо, що топологія $\mathcal{O}(\Gamma_\Lambda)$, індукована топологією $\mathcal{O}(\Gamma)$, відрізнятиметься від топології $\mathcal{O}(\Gamma_{0,\Lambda})$. При цьому відповідні борелівські σ-алгебри $\mathcal{B}(\Gamma_\Lambda)$ та $\mathcal{B}(\Gamma_{0,\Lambda})$ збігатимуться (детальніше див., наприклад, [11]).

Борелівську σ-алгебру, відповідну до $\mathcal{O}(\Gamma)$, позначимо $\mathcal{B}(\Gamma)$. Для довільного $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X)$ введемо відображення $N_\Lambda\colon \Gamma \to \mathbb{N}_0$ таким чином: $N_\Lambda(\gamma) = |\gamma_\Lambda|$. Далі, для довільного $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X)$ розглянемо відображення $p_\Lambda\colon \Gamma \to \Gamma_\Lambda$, що задане формулою $p_\Lambda(\gamma) := \gamma \cap \Lambda$. При цьому $\mathcal{B}(\Gamma)$ є мінімальною σ-алгеброю, відносно якої всі відображення N_Λ, $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X)$ є вимірними (див., наприклад, [3]), тобто $\mathcal{B}(\Gamma) = \sigma\left(N_\Lambda \;\middle|\; \Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X)\right)$. Розглянемо також сім'ю σ-алгебр $\mathcal{B}_\Lambda(\Gamma) := \sigma(N_{\Lambda'} \mid \Lambda' \in \mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X), \Lambda' \subset \Lambda)$ при $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X)$. Зазначимо, що σ-алгебри $\mathcal{B}_\Lambda(\Gamma)$ та $\mathcal{B}(\Gamma_\Lambda)$ є σ-ізоморфними [11], тобто між ними існує бієкція, що зберігає операції над множинами, включаючи зліченні об'єднання.

Нехай μ — ймовірнісна міра на $(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma))$, клас всіх таких мір позначимо $\mathcal{M}^1(\Gamma)$. Нехай $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X)$. Проекцією μ^Λ міри μ на вимірний простір $(\Gamma_\Lambda, \mathcal{B}(\Gamma_\Lambda))$ називається образ міри μ під дією відображення p_Λ, тобто $\mu^\Lambda(A) := \mu\left(p_\Lambda^{-1}(A)\right)$, $A \in \mathcal{B}(\Gamma_\Lambda)$. Будемо казати, що ймовірнісна міра μ на $(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma))$ має скінченні локальні моменти всіх порядків, якщо $\int_\Gamma |\gamma_\Lambda|^n \, d\mu(\gamma) < +\infty$ для довільних $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X)$ та $n \in \mathbb{N}_0$. Клас всіх таких мір позначимо $\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$.

Прикладом міри з локальними скінченними моментами є міра Пуассона. Її можна визначити таким чином. Нехай $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X)$, $z > 0$, λ_z — міра Лебега – Пуассона на $\Gamma_\Lambda = \Gamma_{0,\Lambda}$. З означення (1.2) міри λ_z випливає, що $\lambda_z(\Gamma_\Lambda) = e^{zm(\Lambda)}$. Розглянемо ймовірнісну міру на $(\Gamma_\Lambda, \mathcal{B}(\Gamma_\Lambda))$, задану формулою $\pi_z^\Lambda := e^{-zm(\Lambda)}\lambda_z$. Для довільних $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X)$, $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$, розглянемо відображення $p_{\Lambda_2,\Lambda_1} : \Gamma_{\Lambda_2} \to \Gamma_{\Lambda_1}$, що задане рівністю $p_{\Lambda_2,\Lambda_1}(\eta) = \eta_{\Lambda_1}$, $\eta \in \Lambda_2$. Легко бачити, що $\pi_z^{\Lambda_2}\left(p_{\Lambda_2,\Lambda_1}^{-1}(A)\right) = \pi_z^{\Lambda_1}(A)$, $A \in \mathcal{B}(\Gamma_{\Lambda_1})$, тобто сім'я мір $\left\{\pi_z^\Lambda \;\middle|\; \Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X)\right\}$ є узгодженою. Тоді за версією теореми Колмогорова (див., наприклад, [22], теорема V.3.2, або [15], теорема 5.12) існує єдина міра π_z на $(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma))$ така, що для довільного $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X)$ міра π_z^Λ є проекцією міри π_z на $(\Gamma_\Lambda, \mathcal{B}(\Gamma_\Lambda))$. Міра π_z називається мірою Пуассона з інтенсивністю (параметром) z на просторі конфігурацій Γ.

Важливою властивістю міри Пуассона є так звана тотожність Мекке, яку для пуассонівських процесів, по суті, встановив ще Н. Р. Кемпбелл [4,5]. Вона стверджує, що для довільної $\mathcal{B}(\Gamma)\times\mathcal{B}(X)$-вимірної функції $h\colon \Gamma\times X\to\mathbb{R}$

$$\int_{\Gamma}\sum_{x\in\gamma}h(\gamma,x)\,dm(x)\,d\pi_z(\gamma)=z\int_{\Gamma}\int_{X}h(\gamma\cup x,x)\,dm(x)\,d\pi_z(\gamma), \tag{2.2}$$

якщо тільки хоча б один з інтегралів має сенс. У [20] Дж. Мекке показав, що тотожність (2.2) є необхідною і достатньою умовою того, що π_z є пуассонівською мірою з інтенсивністю $z>0$.

Міру $\mu\in\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$ будемо називати локально абсолютно неперервною відносно міри Пуассона π_z, $z>0$, якщо для довільного $\Lambda\in\mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X)$ проекція μ^Λ міри μ на $(\Gamma_\Lambda,\mathcal{B}(\Gamma_\Lambda))$ є абсолютно неперервною відносно міри π_z^Λ. Вочевидь, якщо міра $\mu\in\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$ є локально абсолютно неперервною відносно міри Пуассона π_{z_0} для деякого $z_0>0$, то вона є локально абсолютно неперервною відносно міри Пуассона π_z для довільного $z>0$. Клас таких мір позначимо $\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm},\pi}(\Gamma)$.

Міри, локально абсолютно неперервні відносно міри Пуассона, мають властивості аналогічні до властивостей міри Лебега – Пуассона, розглянутих у [2], а саме: нехай міра μ належить $\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm},\pi}(\Gamma)$, тоді для довільної множини $A\in\mathcal{B}(X)$ такої, що $m(A)=0$, виконується рівність (див., наприклад, [14])

$$\mu\left(\{\gamma\in\Gamma\mid\gamma\cap A\neq\varnothing\}\right)=0.$$

Як наслідок, для довільних $\gamma'\in\Gamma$, $x\in X$

$$\mu\left(\{\gamma\in\Gamma\mid x\in\gamma\}\right)=\mu\big(\{\gamma\in\Gamma\mid\gamma'\cap\gamma\neq\varnothing\}\big)=0.$$

Далі, множина пар $\big\{(\gamma,\gamma')\in\Gamma\times\Gamma\mid\gamma\cap\gamma'\neq\varnothing\big\}$ має міру $\mu\otimes\mu$, що дорівнює 0, а множина пар $\big\{(\gamma,x)\in\Gamma\times X\mid x\notin\gamma\big\}$ має міру $\mu\otimes m$, що дорівнює 0. Нарешті, можна показати, що $\Gamma_0\in\mathcal{B}(\Gamma)$ і $\mu(\Gamma_0)=0$.

***Зауваження* 2.1.** З означення міри Лебега – Пуассона випливає, що при різних інтенсивностях $z_1\neq z_2$ міри λ_{z_1} та λ_{z_2} на $(\Gamma_0,\mathcal{B}(\Gamma_0))$ є абсолютно неперервними одна відносно іншої (тобто еквівалентними). Проте дві міри на $(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma))$, локально абсолютно неперервні відносно однієї і тієї ж міри Пуассона, взагалі кажучи, не є абсолютно неперервними. Навіть дві міри Пуассона π_{z_1} та π_{z_2} (які є локально абсолютно неперервними одна відносно іншої) при $z_1\neq z_2$ є ортогональними на всьому просторі Γ (див. [1] та узагальнення в [23]).

Функція $F\colon\Gamma\to\mathbb{R}$ називається *циліндричною*, якщо існує множина $\Lambda\in\mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X)$, для якої F є $\mathcal{B}_\Lambda(\Gamma)$-вимірною функцією. Ця властивість характеризується рівністю $F(\gamma)=F\restriction_{\Gamma_\Lambda}(\gamma_\Lambda)$. Клас циліндричних функцій на Γ будемо позначати $\mathcal{F}_{\mathrm{cyl}}(\Gamma)$.

3. Елементи гармонічного аналізу. Нагадаємо (детальніше див., наприклад, [2]), що $G\in L^0(\Gamma_0)$ має локальний носій, якщо існує $\Lambda\in\mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X)$ таке, що $G\restriction_{\Gamma_0\setminus\Gamma_{0,\Lambda}}=0$. Множину всіх вимірних функцій на Γ_0, що мають локальний носій, позначимо $L^0_{\mathrm{ls}}(\Gamma_0)$. Аналогічно, будемо казати, що $G\in L^0(\Gamma_0)$ має обмежений носій, якщо існує $B\in\mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\Gamma_0)$ таке, що $G\restriction_{\Gamma_0\setminus B}=0$. Множину всіх обмежених вимірних функцій на Γ_0, що мають обмежений носій, позначимо $B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0)$.

Розглянемо перетворення $K\colon L^0_{\mathrm{ls}}(\Gamma_0)\to\mathcal{F}_{\mathrm{cyl}}(\Gamma)$, що задане формулою [11, 17, 18]

$$(KG)(\gamma) := \sum_{\eta \Subset \gamma} G(\eta), \quad \gamma \in \Gamma, \tag{3.1}$$

де $G \in L^0_{\mathrm{ls}}(\Gamma_0)$. Тут і у подальшому, якщо $\gamma \in \Gamma$ є нескінченною конфігурацією, запис $\eta \Subset \gamma$ означатиме, що $\eta \subset \gamma$ та $\eta \in \Gamma_0$, тобто η є скінченною підмножиною множини γ. Зазначимо, що підсумовування в (3.1) ведеться по скінченному набору з усіх підмножин з γ_Λ, де Λ — локальний носій функції $G \in L^0_{\mathrm{ls}}(\Gamma_0)$.

Відображення $K\colon L^0_{\mathrm{ls}}(\Gamma_0) \to \mathcal{F}_{\mathrm{cyl}}(\Gamma)$ є лінійним, зберігає додатні функції та має обернене (див., наприклад, [11], твердження 3.5)

$$(K^{-1}F)(\eta) := \sum_{\xi \subset \eta} (-1)^{|\eta \setminus \xi|} F(\xi), \quad \eta \in \Gamma_0. \tag{3.2}$$

Там же показано, що для $F \in \mathcal{F}_{\mathrm{cyl}}(\Gamma)$ виконується включення $K^{-1}F \in L^0_{\mathrm{ls}}(\Gamma_0)$. Зазначимо, що права частина формули (3.2) задає коректно визначену вимірну функцію на Γ_0 для довільної вимірної функції F, що визначена на Γ, або навіть на якійсь підмножині з Γ, що містить Γ_0.

Твердження 3.1 ([11], твердження 3.5)**.** *Нехай G належить $B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0)$. Тоді KG належить $\mathcal{F}_{\mathrm{cyl}}(\Gamma)$, причому існують такі $C > 0$, $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X)$ та $N \in \mathbb{N}_0$, що функція $F = KG$ задовольняє нерівності*

$$|F(\gamma)| \le C\,(1 + |\gamma_\Lambda|)^N, \quad \gamma \in \Gamma. \tag{3.3}$$

Клас циліндричних функцій $F\colon \Gamma \to \mathbb{R}$, для яких виконується нерівність (3.3), будемо позначати $\mathcal{F}_{\mathrm{pb}}(\Gamma)$. Ці функції називатимемо (локально) поліноміально обмеженими на Γ. Як наслідок, $\mathcal{F}_{\mathrm{pb}}(\Gamma) \subset L^1(\Gamma, \mu)$ для довільної $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$. Це показує коректність наступного означення (детальніше див. [11], зауваження 4.7).

Означення 3.1. *Нехай μ належить $\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$. Кореляційною мірою, що відповідає мірі μ, називається міра $\rho_\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{lf}}(\Gamma_0)$, визначена рівністю*

$$\rho_\mu(A) := \int_\Gamma (K 1\!\!1_A)(\gamma)\, d\mu(\gamma), \quad A \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\Gamma_0), \tag{3.4}$$

де $1\!\!1_A\colon \Gamma_0 \to \mathbb{R}$ — функція-індикатор множини $A \in \mathcal{B}(\Gamma_0)$.

Зауважимо, що $\rho_\mu(\{\varnothing\}) = 1$.

Твердження 3.2 ([11], наслідок 4.6)**.** *Нехай μ належить $\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$. Тоді для всіх $G \in B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0)$ виконується включення $G \in L^1(\Gamma_0, \rho_\mu)$, причому*

$$\int_{\Gamma_0} G(\eta)\, d\rho_\mu(\eta) = \int_\Gamma (KG)(\gamma)\, d\mu(\gamma). \tag{3.5}$$

***Зауваження* 3.1.** Для довільної невід'ємної $\mathcal{B}(\Gamma_0)$-вимірної функції $G\colon \Gamma_0 \to \mathbb{R}_+ := [0; +\infty)$ права частина рівності (3.1) визначає $\mathcal{B}(\Gamma)$-вимірну функцію $KG\colon \Gamma \to [0; +\infty]$. У цьому випадку рівність (3.5) також виконується (див. [11], наслідок 4.6).

***Зауваження* 3.2.** У статті [11] (теорема 4.11) показано, що для $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$ та $G \in L^1(\Gamma_0, \rho_\mu)$ права частина (3.1) визначає μ-м. с. абсолютно збіжний ряд, причому $KG \in L^1(\Gamma, \mu)$ і виконується рівність (3.5).

Твердження 3.3 ([11], твердження 4.14)**.** *Нехай μ належить $\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm},\pi}(\Gamma)$. Тоді кореляційна міра ρ_μ є абсолютно неперервною відносно міри Лебега–Пуассона λ на $(\Gamma_0, \mathcal{B}(\Gamma_0))$.*

Нехай μ належить $\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$. Якщо кореляційна міра ρ_μ є абсолютно неперервною відносно міри Лебега – Пуассона λ на $(\Gamma_0, \mathcal{B}(\Gamma_0))$, то відповідна похідна Радона – Нікодима $k_\mu(\eta) := := \dfrac{d\rho_\mu}{d\lambda}(\eta)$, $\eta \in \Gamma_0$, називається кореляційним функціоналом міри μ. З твердження 3.3 випливає, що кореляційний функціонал міри $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm},\pi}(\Gamma)$ завжди існує. Зрозуміло, що $k_\mu(\varnothing) = 1$. Функції $k_\mu^{(n)} \colon X^n \to \mathbb{R}_+$, які визначено рівностями

$$k_\mu^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) := \begin{cases} k_\mu(\{x_1, \ldots, x_n\}), & \text{якщо } (x_1, \ldots, x_n) \in \widetilde{X^n}, \\ 0 & \text{у протилежному випадку,} \end{cases}$$

називаються кореляційними функціями міри μ. Зауважимо, що якщо k_μ — кореляційний функціонал міри $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$, то рівність (3.5) набирає вигляду

$$\int\limits_{\Gamma_0} G(\eta) k_\mu(\eta)\, d\lambda(\eta) = \int\limits_{\Gamma} (KG)(\gamma)\, d\mu(\gamma). \tag{3.6}$$

Кореляційні функції інколи визначаються через рівність (3.6), а саме: послідовність вимірних симетричних невід'ємних функцій $k_\mu^{(n)} \colon X^n \to \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $k_\mu^{(0)} := 1$, називається системою кореляційних функцій, що відповідають мірі $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$, якщо для довільного $n \in \mathbb{N}_0$ та для довільної вимірної симетричної невід'ємної функції $f^{(n)} \colon X^n \to \mathbb{R}_+$ справджується рівність

$$\int\limits_{\Gamma} \sum_{\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \gamma} f^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)\, d\mu(\gamma) =$$

$$= \frac{1}{n!} \int\limits_{X^n} f^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) k_\mu^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)\, dm(x_1) \ldots dm(x_n).$$

Отже, для довільної міри $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm},\pi}(\Gamma)$ існує відповідна система кореляційних функцій.

Нехай $C > 0$ та $\delta \geq 0$. Розглянемо банаховий простір

$$\mathcal{K}_{C,\delta} = \left\{ k : \Gamma_0 \to \mathbb{R} \;\middle|\; |k(\eta)| \leq \mathrm{const} \cdot C^{|\eta|} (|\eta|!)^\delta \text{ для } \lambda\text{-м.в. } \eta \in \Gamma_0 \right\} \tag{3.7}$$

з нормою $\|k\|_{C,\delta} := \operatorname{ess\,sup}_{\eta \in \Gamma_0} \dfrac{|k(\eta)|}{C^{|\eta|}(|\eta|!)^\delta}$. Очевидно, при $C' \geq C$, $\delta' \geq \delta$ має місце включення $\mathcal{K}_{C,\delta} \subset \mathcal{K}_{C',\delta'}$. При $\delta = 0$ будемо нехтувати цим індексом, тобто $\mathcal{K}_C := \mathcal{K}_{C,0}$.

Наступні дві властивості легко перевірити безпосередньо з означення (3.7). Нехай $C > 0$, $\delta \geq 0$, $k \in \mathcal{K}_{C,\delta}$. Тоді $B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0) \subset L^1(\Gamma_0, |k|\, d\lambda)$. Якщо, додатково, $\delta \in [0; 1)$, то $e_\lambda(f) \in \in L^1(\Gamma_0, |k|\, d\lambda)$ для довільної функції $f \in L^1(X, dm)$.

Як наслідок, дістанемо, що якщо μ належить $\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$, а k_μ — кореляційна функція міри μ, причому $k_\mu \in \mathcal{K}_{C,\delta}$, $C > 0$, $\delta \in [0; 1)$, то для довільної $f \in L^1(X, dm)$

$$(Ke_\lambda(f))(\gamma) = \prod_{x \in \gamma} (1 + f(x)) \quad \text{для } \mu\text{-м. в. } \gamma \in \Gamma. \tag{3.8}$$

Зокрема, нескінченний добуток у правій частині (3.8) є абсолютно збіжним для μ-м. в. $\gamma \in \Gamma$. Зауважимо, що якщо f належить $C_0(X) \subset L^1(X, dm)$, то рівність (3.8) виконується для всіх $\gamma \in \Gamma$.

Наступне твердження встановлює зв'язок між кореляційними функціями міри та її проекціями.

Твердження 3.4 ([11], твердження 4.14, 4.16). *Нехай μ належить $\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm},\pi}(\Gamma)$. Тоді для довільного $\Lambda \in \mathcal{B}_c(X)$, $z > 0$*

$$k_\mu(\eta) = \int\limits_{\Gamma_\Lambda} \frac{d\mu^\Lambda}{d\pi_z^\Lambda}(\eta \cup \gamma)\, d\pi_z^\Lambda(\gamma) \quad \textit{для} \quad \lambda\textit{-м. в.} \quad \eta \in \Gamma_\Lambda. \tag{3.9}$$

Якщо, додатково, $\displaystyle\int_{\Gamma_\Lambda} 2^{|\eta|} k_\mu(\eta)\, d\lambda(\eta) < \infty$ *для всіх* $\Lambda \in \mathcal{B}_c(X)$, *то*

$$\frac{d\mu^\Lambda}{d\pi_z^\Lambda}(\gamma) = \int\limits_{\Gamma_\Lambda} (-1)^{|\eta|} k_\mu(\gamma \cup \eta)\, d\lambda(\eta) \quad \textit{для} \quad \pi_z^\Lambda\textit{-м. в.} \quad \gamma \in \Gamma_\Lambda. \tag{3.10}$$

Обернену задачу про можливість відновлення міри $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$ за даною системою симетричних вимірних функцій $k^{(n)}$, для яких $k^{(n)} = k_\mu^{(n)}$, можна розв'язати за допомогою наступних результатів А. Ленарда.

Означення 3.2. *Функція $k\colon \Gamma_0 \to \mathbb{R}$ називається позитивно означеною в сенсі Ленарда, якщо для довільної $G \in B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0)$ такої, що $(KG)(\gamma) \geq 0$ для всіх $\gamma \in \Gamma$, виконується нерівність* $\displaystyle\int_{\Gamma_0} G(\eta)k(\eta)\, d\lambda(\eta) \geq 0.$

Зауважимо, що якщо k_μ — кореляційний функціонал міри $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$, то з рівності (3.6) безпосередньо випливає, що k_μ є позитивно означеною в сенсі Ленарда.

Твердження 3.5. *Нехай $k\colon \Gamma_0 \to \mathbb{R}$ є вимірною.*

1 ([18], теорема 4.1). *Припустимо, що функція k є позитивно означеною в сенсі Ленарда та виконано умову нормування $k(\varnothing) = 1$. Тоді існує принаймні одна міра $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$ така, що k є кореляційним функціоналом міри μ.*

2 ([16], теорема 2). *Для довільного $n \in \mathbb{N}$, $\Lambda \in \mathcal{B}_c(X)$ покладемо*

$$s_n^\Lambda := \frac{1}{n!} \int\limits_{\Lambda^n} k^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)\, dm(x_1) \ldots dm(x_n). \tag{3.11}$$

Тоді якщо $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(s_{n+m}^\Lambda\right)^{-1/n} = \infty$ *для всіх* $m \in \mathbb{N}$, $\Lambda \in \mathcal{B}_c(X)$, *то існує не більше однієї міри* $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$ *такої, що k є кореляційним функціоналом міри μ.*

Зауважимо, що у роботах [16, 18] А. Ленард досліджував більш широкий простір, ніж простір Γ (так званий простір кратних конфігурацій). Адаптацію теореми 4.1 із [18] для випадку простору Γ було проведено в [14] (теорема 4.4.1). Теорема 2 з [16] справджується для більш вузького простору Γ очевидним чином.

***Наслідок* 3.1.** *Нехай функція $k\colon \Gamma_0 \to \mathbb{R}$ є позитивно означеною в сенсі Ленарда та виконано умову нормування $k(\varnothing) = 1$. Нехай існує $C > 0$ таке, що $k \in \mathcal{K}_{C,2}$. Тоді існує єдина міра $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$ така, що k є кореляційним функціоналом міри μ.*

Доведення. Оскільки k належить $\mathcal{K}_{C,2}$, то для всіх $n \in \mathbb{N}$ з (3.11) маємо $s_n^\Lambda \leq$ $\leq \mathrm{const} \cdot (Cm(\Lambda))^n\, n!$. Отже, для всіх $l \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(s_{n+l}^\Lambda\right)^{-1/n} \geq \mathrm{const} \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} (Cm(\Lambda))^{-\frac{n+l}{n}} \left((n+l)!\right)^{-1/n} \geq$$

$$\geq \text{ const} \cdot (Cm(\Lambda))^{-(1+l)} \sum_{n\in\mathbb{N}} (n!)^{-1/n} = \infty,$$

що доводить наслідок.

Наступне твердження показує, що K-перетворення є комбінаторним перетворенням Фур'є відносно $\star$-згортки.

Твердження 3.6 ([11], твердження 3.11). *Нехай G_1, G_2 належать $L^0_{\mathrm{ls}}(\Gamma_0)$. Тоді*

$$(K(G_1 \star G_2))(\gamma) = (KG_1)(\gamma) \cdot (KG_2)(\gamma), \quad \gamma \in \Gamma. \tag{3.12}$$

***Зауваження* 3.3.** Нехай μ належить $\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$, k_μ — кореляційний функціонал міри μ. В [11] (лемма 4.12) показано, що рівність (3.12) виконується для μ-м. в. $\gamma \in \Gamma$, якщо тільки виконано одну з наступних умов: 1) $G_1, G_2 \geq 0$; 2) $|G_1| \star |G_2| \in L^1(\Gamma_0, k_\mu \, d\lambda)$; 3) $G_1, G_2 \in L^1(\Gamma_0, k_\mu \, d\lambda)$.

Наступний наслідок безпосередньо випливає із твердження із 3.6 із [11] (твердження 3.5) та того факту, що клас функцій $\mathcal{F}_{\mathrm{cyl}}(\Gamma)$ є замкненим відносно множення.

***Наслідок* 3.2.** *Нехай F_1, F_2 належать $\mathcal{F}_{\mathrm{cyl}}(\Gamma)$. Тоді*

$$\left(K^{-1}(F_1 \cdot F_2)\right)(\eta) = \left((K^{-1}F_1) \star (K^{-1}F_2)\right)(\eta), \quad \eta \in \Gamma_0. \tag{3.13}$$

***Зауваження* 3.4.** Рівність (3.13) справджується для довільних функцій F_1, F_2, визначених на деякій підмножині простору конфігурацій Γ, що містить множину скінченних конфігурацій Γ_0.

***Зауваження* 3.5.** Нехай G належить $B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0)$. З твердження 3.6 випливає, що $K(G \star G) = |KG|^2 \geq 0$. Отже, якщо функція k є позитивно означеною в сенсі Ленарда, то вона є позитивно означеною в сенсі $\star$-згортки (означення див. у [2]). У статті [11] показано, що якщо для функції $k \in K_{C,\delta}$, $C > 0$, $\delta \in [0;1)$, виконано $k(\varnothing) = 1$ і k є позитивно означеною в сенсі $\star$-згортки, то існує єдина міра $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$, для якої k є її кореляційним функціоналом.

4. Простори конфігурацій різних типів. Цей пункт присвячено просторам конфігурацій двох різних типів, які ми позначимо $+$ та $-$. Введемо наступні позначення. Розглянемо дві копії простору Γ: $\Gamma^+ := \Gamma$ і $\Gamma^- := \Gamma$ та покладемо $\Gamma^2 := \Gamma^+ \times \Gamma^-$. Нехай $\mathcal{O}(\Gamma^2)$ — продакт-топологія на Γ^2. Відповідну борелівську σ-алгебру позначимо $\mathcal{B}(\Gamma^2)$. Клас усіх імовірнісних мір на $\left(\Gamma^2, \mathcal{B}(\Gamma^2)\right)$ позначимо $\mathcal{M}^1(\Gamma^2)$. Аналогічно розглянемо для $Y \in \mathcal{B}(X)$, $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma^{+,(n)}_{0,Y} := \Gamma^{-,(n)}_{0,Y} := \Gamma^{(n)}_{0,Y}, \quad \Gamma^+_{0,Y} := \Gamma^-_{0,Y} := \Gamma_{0,Y}, \quad \Gamma^2_{0,Y} := \Gamma^+_{0,Y} \times \Gamma^-_{0,Y}$$

та визначимо відповідні продакт-топологію $\mathcal{O}(\Gamma^2_{0,Y})$ та борелівську σ-алгебру $\mathcal{B}(\Gamma^2_{0,Y})$. Як і раніше, при $Y = X$ будемо нехтувати символом Y в індексі, а при $Y \in \mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X)$ відкидатимемо 0 в індексі, зокрема, $\Gamma^2_0 := \Gamma^2_{0,X}$, $\Gamma^2_\Lambda := \Gamma^2_{0,\Lambda}$. Очевидно, що

$$\mathcal{B}(\Gamma^2) = \sigma\left(B^+ \times B^- \;\middle|\; B^\pm \in \mathcal{B}(\Gamma^\pm)\right),$$

$$\mathcal{B}(\Gamma^2_{0,Y}) = \sigma\left(B^+ \times B^- \;\middle|\; B^\pm \in \mathcal{B}(\Gamma^\pm_{0,Y})\right), \quad Y \in \mathcal{B}(X).$$

Визначимо деякі поняття, аналогічні до розглянутих вище на просторах конфігурацій одного типу. Для довільних $\Lambda^\pm \in \mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X)$ розглянемо відображення $\mathrm{p}_{\Lambda^+,\Lambda^-} : \Gamma^2 \to \Gamma^+_{\Lambda^+} \times \Gamma^-_{\Lambda^-}$, визначене рівністю $\mathrm{p}_{\Lambda^+,\Lambda^-}(\gamma^+, \gamma^-) := \left(\gamma^+_{\Lambda^+}, \gamma^-_{\Lambda^-}\right)$, $\gamma^\pm \in \Gamma^\pm$. Проекцією міри $\mu \in \mathcal{M}^1(\Gamma^2)$ на простір $\left(\Gamma^+_{\Lambda^+} \times \Gamma^-_{\Lambda^-}, \mathcal{B}(\Gamma^+_{\Lambda^+} \times \Gamma^-_{\Lambda^-})\right)$ називається міра $\mu^{\Lambda^+,\Lambda^-}$, що визначена рівністю $\mu^{\Lambda^+,\Lambda^-}(A) := \mu\left(\mathrm{p}^{-1}_{\Lambda^+,\Lambda^-}(A)\right)$, $A \in \mathcal{B}(\Gamma^+_{\Lambda^+} \times \Gamma^-_{\Lambda^-})$. Міра $\mu \in \mathcal{M}^1(\Gamma^2)$ називається локально абсолютно неперервною відносно міри $\pi_z \otimes \pi_z$, $z > 0$, якщо для довільних $\Lambda^\pm \in \mathcal{B}_\mathrm{c}(X)$ проекція $\mu^{\Lambda^+,\Lambda^-}$ міри μ є абсолютно неперервною до міри $\pi_z^{\Lambda^+} \otimes \pi_z^{\Lambda^-}$ на просторі $\left(\Gamma^+_{\Lambda^+} \times \Gamma^-_{\Lambda^-}, \mathcal{B}(\Gamma^+_{\Lambda^+} \times \Gamma^-_{\Lambda^-})\right)$. У випадку, коли $\Lambda^+ = \Lambda^- = \Lambda \in \mathcal{B}_\mathrm{c}(X)$, будемо писати $\mathrm{p}_\Lambda, \mu^\Lambda, \Gamma^2_\Lambda$ замість $\mathrm{p}_{\Lambda,\Lambda}, \mu^{\Lambda,\Lambda}, \Gamma^+_\Lambda \times \Gamma^-_\Lambda$ відповідно, якщо тільки це не призведе до непорозуміння. Наступні твердження узагальнюють властивості мір з $\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm},\pi}(\Gamma)$. Вони були доведені автором у [6].

Твердження 4.1. *Нехай міра $\mu \in \mathcal{M}^1(\Gamma^2)$ є локально абсолютно неперервною відносно міри $\pi_z \otimes \pi_z$, $z > 0$. Нехай $A \in \mathcal{B}(X)$, $m(A) = 0$. Тоді*

$$\mu\left(\left\{(\gamma^+, \gamma^-) \in \Gamma^2 \;\middle|\; \gamma^+ \cap \gamma^- = \varnothing\right\}\right) = 1,$$

$$\mu\left(\left\{(\gamma^+, \gamma^-) \in \Gamma^2 \;\middle|\; \gamma^- \cap A \neq \varnothing\right\}\right) = 0,$$

$$(\mu \otimes m)\left(\left\{(\gamma^+, \gamma^-, x) \in \Gamma^2 \times X \;\middle|\; x \in \gamma^+\right\}\right) = 0.$$

Нехай μ належить $\mathcal{M}^1(\Gamma^2)$. Маргінальними розподілами міри μ будемо називати ймовірнісні міри $\mu^\pm$ на $(\Gamma^\pm, \mathcal{B}(\Gamma^\pm))$ відповідно, що визначені співвідношеннями

$$\mu^\pm(A^\pm) := \int\limits_{A^\pm}\int\limits_{\Gamma^\mp} d\mu(\gamma^+, \gamma^-), \quad A^\pm \in \mathcal{B}(\Gamma^\pm). \tag{4.1}$$

Нехай $\Lambda \in \mathcal{B}_\mathrm{c}(X)$, μ^Λ — проекція міри $\mu \in \mathcal{M}^1(\Gamma^2)$ на Γ^2_Λ. Маргінальні розподіли міри μ^Λ — це ймовірнісні міри $(\mu^\Lambda)^\pm$ на $\left(\Gamma^\pm_\Lambda, \mathcal{B}(\Gamma^\pm_\Lambda)\right)$, визначені аналогічно до (4.1). З іншого боку, можемо розглянути проекції $(\mu^\pm)^\Lambda$ мір $\mu^\pm$ на простір $\left(\Gamma^\pm_\Lambda, \mathcal{B}(\Gamma^\pm_\Lambda)\right)$ відповідно до (4.1). У [6] було показано, що для довільного $\Lambda \in \mathcal{B}_\mathrm{c}(X)$

$$(\mu^\pm)^\Lambda = (\mu^\Lambda)^\pm. \tag{4.2}$$

Визначимо ще деякі поняття, аналогічні до розглянутих вище на просторах конфігурацій одного типу. Функція $G\colon \Gamma^2_0 \to \mathbb{R}$ має локальний носій, якщо існує $\Lambda \in \mathcal{B}_\mathrm{c}(X)$ таке, що $G \restriction_{\Gamma^2_0 \setminus (\Gamma^+_\Lambda \times \Gamma^-_\Lambda)} = 0$. Клас усіх вимірних функцій на Γ^2_0 із локальним носієм позначимо $L^0_\mathrm{ls}(\Gamma^2_0)$. Множина $B \in \mathcal{B}(\Gamma^2_0)$ називається обмеженою, якщо існують $\Lambda \in \mathcal{B}_\mathrm{c}(X)$ та $N \in \mathbb{N}$ такі, що $B \subset \left(\bigsqcup_{n=0}^N \Gamma^{+,(n)}_\Lambda\right) \times \left(\bigsqcup_{n=0}^N \Gamma^{-,(n)}_\Lambda\right)$. Клас усіх обмежених множин у $\mathcal{B}(\Gamma^2_0)$ позначимо $\mathcal{B}_\mathrm{b}(\Gamma^2_0)$. Функція $G\colon \Gamma^2_0 \to \mathbb{R}$ має обмежений носій, якщо існує $B \in \mathcal{B}_\mathrm{b}(\Gamma^2_0)$ така, що $G \restriction_{\Gamma^2_0 \setminus \widetilde{B}} = 0$. Клас усіх обмежених функцій з обмежених носієм позначимо $B_\mathrm{bs}(\Gamma^2_0)$. Міра ρ на $\left(\Gamma^2_0, \mathcal{B}(\Gamma^2_0)\right)$ називається локально скінченною, якщо $\rho(B) < \infty$ для всіх $B \in \mathcal{B}_\mathrm{b}(\Gamma^2_0)$. Клас усіх таких мір позначимо $\mathcal{M}_\mathrm{lf}(\Gamma^2_0)$. Міра $\mu \in \mathcal{M}^1(\Gamma^2)$ має скінченні локальні моменти всіх порядків, якщо $\int_{\Gamma^2} |\gamma^+_\Lambda|^n |\gamma^-_\Lambda|^n \, d\mu(\gamma^+, \gamma^-) < \infty$ для всіх $\Lambda \in \mathcal{B}_\mathrm{c}(X)$ та $n \in \mathbb{N}_0$. Клас усіх імовірнісних мір на Γ^2 із локальними скінченними моментами всіх порядків будемо позначати $\mathcal{M}^1_\mathrm{fm}(\Gamma^2)$. Клас вимірних функцій на Γ^2, циліндричних за обома змінними, будемо позначати $\mathcal{F}_\mathrm{cyl}(\Gamma^2)$.

Розглянемо перетворення $\mathrm{K}\colon L^0_\mathrm{ls}(\Gamma^2_0) \to \mathcal{F}_\mathrm{cyl}(\Gamma^2)$, що задане формулою

$$(\mathrm{K}G)(\gamma^+, \gamma^-) := \sum_{\substack{\eta^+ \Subset \gamma^+ \\ \eta^- \Subset \gamma^-}} G(\eta^+, \eta^-), \quad (\gamma^+, \gamma^-) \in \Gamma. \tag{4.3}$$

Розглянемо одиничні оператори (тотожні відображення) $I^\pm$ на функціях на $\Gamma^\pm$ (а отже, і на $\Gamma^\pm_0$). Визначимо наступні оператори на функціях на Γ^2_0: $K^+ := K \otimes I^-$, $K^- := I^+ \otimes K$. Тоді формулу (4.3) запишемо у вигляді

$$\mathrm{K} = K^{+}K^{-} = K^{-}K^{+}. \tag{4.4}$$

З (4.4) випливає, що відображення $\mathrm{K}\colon L^0_{\mathrm{ls}}(\Gamma^2_0) \to \mathcal{F}_{\mathrm{cyl}}(\Gamma^2)$ є лінійним, зберігає додатні функції та має обернене

$$(\mathrm{K}^{-1}F)(\eta^+,\eta^-) = (K^+)^{-1}(K^-)^{-1} = (K^-)^{-1}(K^+)^{-1} =$$

$$= \sum_{\substack{\xi^+\subset\eta^+\\ \xi^-\subset\eta^-}} (-1)^{|\eta^+\setminus\xi^+|+|\eta^-\setminus\xi^-|} F(\xi^+,\xi^-), \quad (\eta^+,\eta^-)\in\Gamma^2_0. \tag{4.5}$$

Означення 4.1. *Нехай μ належить $\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma^2)$. Кореляційною мірою, що відповідає мірі μ, називається міра $\rho_\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{lf}}(\Gamma^2_0)$, визначена рівністю*

$$\rho_\mu(A) := \int_{\Gamma^2} (\mathrm{K}1\!\!1_A)(\gamma^+,\gamma^-)\, d\mu(\gamma^+,\gamma^-), \quad A\in\mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\Gamma^2_0), \tag{4.6}$$

де $1\!\!1_A\colon \Gamma^2_0 \to \mathbb{R}$ — функція-індикатор множини $A\in\mathcal{B}(\Gamma^2_0)$. Зрозуміло, що $\rho_\mu(\{\varnothing\},\{\varnothing\}) = 1$.

Доведення наступних двох тверджень повністю аналогічні доведенням відповідних тверджень для простору Γ.

Твердження 4.2. *Нехай μ належить $\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma^2)$. Тоді для всіх $G\in B_{\mathrm{bs}}(\Gamma^2_0)$ виконується $G\in L^1(\Gamma^2_0,\rho_\mu)$, причому*

$$\int_{\Gamma^2_0} G(\eta^+,\eta^-)\, d\rho_\mu(\eta^+,\eta^-) = \int_{\Gamma^2} (\mathrm{K}G)(\gamma^+,\gamma^-)\, d\mu(\gamma^+,\gamma^-). \tag{4.7}$$

Якщо кореляційна міра ρ_μ міри $\mu\in\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma^2)$ має похідну Радона – Нікодима відносно міри $\lambda^2 := \lambda\otimes\lambda$ на $\bigl(\Gamma^2_0, \mathcal{B}(\Gamma^2_0)\bigr)$, то цю похідну будемо називати *кореляційним функціоналом* k_μ міри μ, тобто

$$k_\mu(\eta^+,\eta^-) := \frac{d\rho_\mu}{d\lambda^2}(\eta^+,\eta^-), \quad (\eta^+,\eta^-)\in\Gamma^2_0.$$

Розглянемо множину $\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm},\pi}(\Gamma^2)$ усіх таких мір з $\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma^2)$, які є локально абсолютно неперервними відносно міри $\pi_z\otimes\pi_z$, $z>0$.

Твердження 4.3. *Нехай міра μ належить $\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm},\pi}(\Gamma^2)$. Тоді існує кореляційний функціонал k_μ, причому $k_\mu(\varnothing,\varnothing)=1$ і*

$$k_\mu(\eta^+,\eta^-) = \int_{\Gamma^+_\Lambda}\int_{\Gamma^-_\Lambda} \frac{d\mu^\Lambda}{d\lambda^2}(\eta^+\cup\xi^+,\eta^-\cup\xi^-)d\lambda(\xi^+)d\lambda(\xi^-) \tag{4.8}$$

для довільного $\Lambda\in\mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X)$ і для λ^2-м. в. $(\eta^+,\eta^-)\in\Gamma^2_\Lambda$.

Твердження 4.4. *Нехай міра μ належить $\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm},\pi}(\Gamma^2)$. Тоді маргінальні міри $\mu^\pm$ належать класу $\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm},\pi}(\Gamma)$. Більше того, якщо k_μ, $k^\pm_\mu$ — кореляційні функціонали мір μ, $\mu^\pm$ відповідно, то для λ-м. в. $\eta^\pm\in\Gamma^\pm$*

$$k_\mu(\eta^+,\varnothing) = k^+_\mu(\eta^+), \quad k_\mu(\varnothing,\eta^-) = k^-_\mu(\eta^-). \tag{4.9}$$

Доведення. Для довільного $\Lambda \in \mathcal{B}_c(X)$ і довільної вимірної функції $F\colon \Gamma_\Lambda^+ \to \mathbb{R}_+$ з (4.2) для всіх $z > 0$ маємо

$$\int\limits_{\Gamma_\Lambda^+} F(\gamma^+)\, d(\mu^+)^\Lambda(\gamma^+) = \int\limits_{\Gamma_\Lambda^+} F(\gamma^+)\, d(\mu^\Lambda)^+(\gamma^+) = \int\limits_{\Gamma_\Lambda^+} F(\gamma^+) \int\limits_{\Gamma_\Lambda^-} d\mu^\Lambda(\gamma^+, \gamma^-) =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_\Lambda^+} F(\gamma^+) \int\limits_{\Gamma_\Lambda^-} \frac{d\mu^\Lambda}{d(\pi_z^\Lambda \otimes \pi_z^\Lambda)}(\gamma^+, \gamma^-)\, d(\pi_z^\Lambda \otimes \pi_z^\Lambda)(\gamma^+, \gamma^-) =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_\Lambda^+} F(\gamma^+) \Bigg(\int\limits_{\Gamma_\Lambda^-} \frac{d\mu^\Lambda}{d(\pi_z^\Lambda \otimes \pi_z^\Lambda)}(\gamma^+, \gamma^-)\, d\pi_z^\Lambda(\gamma^-) \Bigg) d\pi_z^\Lambda(\gamma^+).$$

Отже, міра μ^+ є локально абсолютно неперервною відносно міри Пуассона π_z, $z > 0$, причому для π_z^Λ-м. в. $\gamma^+ \in \Gamma_\Lambda^+$

$$\frac{d(\mu^+)^\Lambda}{d\pi_z^\Lambda}(\gamma^+) = \int\limits_{\Gamma_\Lambda^-} \frac{d\mu^\Lambda}{d(\pi_z^\Lambda \otimes \pi_z^\Lambda)}(\gamma^+, \gamma^-)\, d\pi_z^\Lambda(\gamma^-). \tag{4.10}$$

Очевидна рівність для всіх $\Lambda \in \mathcal{B}_c(X)$, $n \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_{\Gamma^+} \big|\gamma^+ \cap \Lambda\big|^n\, d\mu^+(\gamma^+) = \int\limits_{\Gamma^2} \big|\gamma^+ \cap \Lambda\big|^n \big|\gamma^- \cap \Lambda\big|^0\, d\mu(\gamma^+, \gamma^-) < \infty$$

доводить, що μ^+ належить $\mathcal{M}_{\mathrm{fm}}^1(\Gamma)$.

Тоді з (3.9) випливає, що для λ_z-м. в. $\eta^+ \in \Gamma_\Lambda^+$ і для всіх $\Lambda \in \mathcal{B}_c(X)$

$$k_\mu^+(\eta^+) = \int\limits_{\Gamma_\Lambda^+} \frac{d(\mu^+)^\Lambda}{d\lambda_z^\Lambda}(\eta^+ \cup \xi^+) d\lambda_z(\xi^+). \tag{4.11}$$

Поклавши в (4.8) $\eta^- = \varnothing$, з (4.10) та (4.11) дістанемо

$$k_\mu(\eta^+, \varnothing) = \int\limits_{\Gamma_\Lambda^+} \Bigg(\int\limits_{\Gamma_\Lambda^-} \frac{d\mu^\Lambda}{d\lambda_z^2}(\eta^+ \cup \xi^+, \xi^-) d\lambda_z(\xi^-) \Bigg) d\lambda_z(\xi^+) =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_\Lambda^+} \frac{d(\mu^\Lambda)^+}{d\lambda_z}(\eta^+ \cup \xi^+) d\lambda_z(\xi^+) = k_\mu^+(\eta^+). \tag{4.12}$$

Для k_μ^- доведення аналогічне.

Твердження 4.4 доведено.

***Зауваження* 4.1.** З твердження 4.2 випливає, що якщо k_μ — кореляційний функціонал деякої міри $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{fm}}^1(\Gamma^2)$, то k_μ є позитивно означеним в сенсі Ленарда.

Нагадаємо про наступну згортку між вимірними функціями G_1 та G_2 на Γ_0^2 (див. [2]):

$$(G_1 \circledast G_2)(\eta^+, \eta^-) := \sum_{\substack{\xi_1^+ \sqcup \xi_2^+ \sqcup \xi_3^+ = \eta^+ \\ \xi_1^- \sqcup \xi_2^- \sqcup \xi_3^- = \eta^-}} G_1(\xi_1^+ \cup \xi_2^+, \xi_1^- \cup \xi_2^-)\, G_2(\xi_2^+ \cup \xi_3^+, \xi_2^- \cup \xi_3^-). \tag{4.13}$$

З твердження 3.6 та рівностей (4.4), (4.13) безпосередньо випливає, що для довільних $G_1, G_2 \in L^0_{\mathrm{ls}}(\Gamma_0^2)$

$$\left(\mathrm{K}(G_1 \circledast G_2)\right)(\gamma^+, \gamma^-) = (\mathrm{K}G_1)(\gamma^+, \gamma^-)(\mathrm{K}G_2)(\gamma^+, \gamma^-), \quad (\gamma^+, \gamma^-) \in \Gamma^2. \tag{4.14}$$

***Зауваження* 4.2.** Оскільки внаслідок (4.14) $\mathrm{K}(G \circledast G) = |\mathrm{K}G|^2 \geq 0$, то з позитивної означеності в сенсі Ленарда випливає позитивна означеність в сенсі $\circledast$-згортки (означення див. у [2]).

5. Згортки мір. ***5.1. Основні властивості.*** У цьому пункті будемо використовувати наступні позначення. Нехай $F\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ — вимірна функція. Розглянемо вимірну функцію $\widetilde{F}\colon \Gamma^2 \to \mathbb{R}$, визначену рівністю $\widetilde{F}(\gamma^+, \gamma^-) = F(\gamma^+ \cup \gamma^-)$, $(\gamma^+, \gamma^-) \in \Gamma^2$. Нехай μ_i належить $\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$, $i = 1, 2$. Розглянемо міру $\widehat{\mu}$ на $\left(\Gamma^2, \mathcal{B}(\Gamma^2)\right)$, визначену рівністю $d\widehat{\mu}(\gamma^+, \gamma^-) = d\mu_1(\gamma^+)\, d\mu_2(\gamma^-)$, тобто $\widehat{\mu} = \mu_1 \otimes \mu_2$. Очевидно, що $\widehat{\mu}$ належить $\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma^2)$.

Означення 5.1. *Нехай μ_i належать $\mathcal{M}^1(\Gamma)$, $i = 1, 2$. Міра $\mu \in \mathcal{M}^1(\Gamma)$ називається згорткою мір μ_1 та μ_2, якщо для довільної вимірної функції $F\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ такої, що $\widetilde{F} \in L^1(\Gamma^2, d\widehat{\mu})$, виконується рівність*

$$\int_\Gamma F(\gamma) d\mu(\gamma) = \int_{\Gamma^2} \widetilde{F}(\gamma^+, \gamma^-) d\widehat{\mu}(\gamma^+, \gamma^-) = \int_{\Gamma^+} \int_{\Gamma^-} F(\gamma^+ \cup \gamma^-)\, d\mu_1(\gamma^+)\, d\mu_2(\gamma^-). \tag{5.1}$$

Позначення: $\mu = \mu_1 * \mu_2$.

Твердження 5.1. *Нехай μ_i належать $\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$, $i = 1, 2$, та $\mu = \mu_1 * \mu_2$. Тоді μ належить $\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$. Якщо μ_i належать $\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm},\pi}(\Gamma)$, $i = 1, 2$, то μ належить $\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm},\pi}(\Gamma)$.*

Доведення. Для довільного $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{c}}(X)$, $n \in \mathbb{N}$ маємо

$$\int_\Gamma |\gamma_\Lambda|^n\, d\mu(\gamma) = \int_{\Gamma^+} \int_{\Gamma^-} \left(|\gamma^+_\Lambda| + |\gamma^-_\Lambda|\right)^n\, d\mu_1(\gamma^+)\, d\mu_2(\gamma^-) =$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int_\Gamma |\gamma_\Lambda|^k\, d\mu_1(\gamma) \int_\Gamma |\gamma_\Lambda|^{n-k}\, d\mu_2(\gamma) < \infty,$$

що доводить перше твердження. Далі, для довільної $\mathcal{B}_\Lambda(\Gamma)$-вимірної функції F отримуємо

$$\int_{\Gamma_\Lambda} F(\gamma)\, d\mu^\Lambda(\gamma) = \int_\Gamma F(\gamma)\, d\mu(\gamma) = \int_{\Gamma^+} \int_{\Gamma^-} F(\gamma^+ \cup \gamma^-)\, d\mu_1(\gamma^+)\, d\mu_2(\gamma^-) =$$

$$= \int_{\Gamma^+_\Lambda} \int_{\Gamma^-_\Lambda} F(\gamma^+ \cup \gamma^-)\, d\mu_1^\Lambda(\gamma^+)\, d\mu_2^\Lambda(\gamma^-) =$$

$$= \int_{\Gamma^+_\Lambda} \int_{\Gamma^-_\Lambda} F(\gamma^+ \cup \gamma^-) \frac{d\mu_1^\Lambda}{d\lambda}(\gamma^+) \frac{d\mu_2^\Lambda}{d\lambda}(\gamma^-)\, d\lambda(\gamma^+)\, d\lambda(\gamma^-) =$$

$$= \int_{\Gamma_\Lambda} F(\gamma) \left(\frac{d\mu_1^\Lambda}{d\lambda} * \frac{d\mu_2^\Lambda}{d\lambda}\right)(\gamma)\, d\lambda(\gamma),$$

де використано (1.6). Це доводить друге твердження.

Наступне твердження встановлює зв'язок між згортками на просторах мір над Γ та Γ_0.

Твердження 5.2. *Нехай μ_i належать $\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm},\pi}(\Gamma)$, ρ_i — відповідні кореляційні міри, $i=1,2$. Тоді $\rho=\rho_1*\rho_2$ є кореляційною мірою для міри $\mu=\mu_1*\mu_2$.*

Доведення. Нехай G належить $B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0)$, тоді $\widetilde{G}\in B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0^2)\subset L^1\left(\Gamma_0^2,d\widehat{\rho}\right)$. Нехай $F=KG$. Тоді для довільних $(\gamma^+,\gamma^-)\in\widetilde{\Gamma}^2$ (тобто $\gamma^+\cap\gamma^-=\varnothing$) дістанемо

$$\widetilde{F}(\gamma^+,\gamma^-)=F(\gamma^+\cup\gamma^-)=\sum_{\eta\Subset\gamma^+\cup\gamma^-}G(\eta)=$$

$$=\sum_{\eta^+\Subset\gamma^+}\sum_{\eta^-\Subset\gamma^-}G(\eta^+\cup\eta^-)=\sum_{\eta^+\Subset\gamma^+}\sum_{\eta^-\Subset\gamma^-}\widetilde{G}(\eta^+,\eta^-)=\big(\mathrm{K}\widetilde{G}\big)(\gamma^+,\gamma^-). \tag{5.2}$$

Доведемо, що $\widehat{\rho}=\rho_1\otimes\rho_2\in\mathcal{M}_{\mathrm{lf}}(\Gamma_0^2)$ — кореляційна міра для міри $\widehat{\mu}=\mu_1\otimes\mu_2\in\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma^2)$. Для цього перевіримо справедливість (4.6) з $\mu=\widehat{\mu}$, $\rho_\mu=\widehat{\rho}$. Для довільного $A=A^+\times A^-\in\mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\Gamma_0^2)$, де $A^\pm\in\mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\Gamma_0)$, маємо

$$\int\limits_{\Gamma^2}(\mathrm{K}1\!\!1_A)(\gamma^+,\gamma^-)\,d\widehat{\mu}(\gamma^+,\gamma^-)=\int\limits_{\Gamma^2}\sum_{\eta^+\Subset\gamma^+}\sum_{\eta^-\Subset\gamma^-}1\!\!1_A(\eta^+,\eta^-)\,d\mu_1(\gamma^+)\,d\mu_2(\gamma^-)=$$

$$=\int\limits_{\Gamma^+}\sum_{\eta^+\Subset\gamma^+}1\!\!1_{A^+}(\eta^+)\,d\mu_1(\gamma^+)\int\limits_{\Gamma^-}\sum_{\eta^-\Subset\gamma^-}1\!\!1_{A^-}(\eta^-)\,d\mu_2(\gamma^-)=\rho_1(A^+)\rho_2(A^-)=\widehat{\rho}(A).$$

Отже, за рівністю (4.6) міра $\widehat{\rho}$ дійсно збігається з кореляційною мірою для $\widehat{\mu}$ на всіх множинах вигляду $A=A^+\times A^-\in\mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\Gamma_0^2)$ з $A^\pm\in\mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\Gamma_0)$. Як наслідок, ці міри збігаються між собою на всьому класі множин $\mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\Gamma_0^2)$. Оскільки $\mu_i\in\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm},\pi}(\Gamma)$, $i=1,2$, то міра $\widehat{\mu}$ є локально абсолютно неперервною відносно міри $\pi_z\otimes\pi_z$, $z>0$. Отже, за твердженням 4.1 $\widehat{\mu}(\widetilde{\Gamma}^2)=1$. Таким чином,

$$\int\limits_{\Gamma_0}G(\eta)d\rho(\eta)=\int\limits_{\Gamma_0^+}\int\limits_{\Gamma_0^-}\widetilde{G}(\eta^+,\eta^-)\,d\widehat{\rho}(\eta^+,\eta^-)=\int\limits_{\Gamma^+}\int\limits_{\Gamma^-}\big(\mathrm{K}\widetilde{G}\big)(\gamma^+,\gamma^-)\,d\widehat{\mu}(\gamma^+,\gamma^-)=$$

$$=\iint\limits_{\widetilde{\Gamma}^2}\big(\mathrm{K}\widetilde{G}\big)(\gamma^+,\gamma^-)\,d\widehat{\mu}(\gamma^+,\gamma^-)=\iint\limits_{\widetilde{\Gamma}^2}\widetilde{F}(\gamma^+,\gamma^-)\,d\widehat{\mu}(\gamma^+,\gamma^-)=$$

$$=\int\limits_{\Gamma^+}\int\limits_{\Gamma^-}\widetilde{F}(\gamma^+,\gamma^-)\,d\mu_1(\gamma^+)\,d\mu_2(\gamma^-)=\int\limits_{\Gamma}F(\gamma)\,d\mu(\gamma),$$

що доводить твердження.

Теорема 5.1. *Нехай функції $k_i\colon\Gamma_0\to\mathbb{R}$, $i=1,2$, є вимірними. Тоді функція $k(\eta)=(k_1*k_2)(\eta)$ є позитивно означеною в сенсі Ленарда на Γ_0, якщо тільки функція $\widehat{k}(\eta^+,\eta^-):=k_1(\eta^+)k_2(\eta^-)$ є позитивно означеною в сенсі Ленарда на Γ_0^2.*

Доведення. З рівності (5.2) випливає, що якщо $G\in B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0)$ і $KG\geq 0$, то $\mathrm{K}\widetilde{G}\geq 0$. А оскільки внаслідок (1.6)

$$\int_{\Gamma_0} G(\eta)(k_1 * k_2)(\eta) d\lambda(\eta) = \int_{\Gamma_0^2} \widetilde{G}(\eta^+, \eta^-)\widehat{k}(\eta^+, \eta^-) d\lambda(\eta^+) d\lambda(\eta^-),$$

то з позитивної означеності функції $\widehat{k}$ в сенсі Ленарда на Γ_0^2 випливає позитивна означеність функції k в сенсі Ленарда на Γ_0.

Теорему 5.1 доведено.

5.2. Згортка гіббсівських мір. Нехай $L_+^0(\Gamma \times X)$ позначає клас усіх вимірних невід'ємних функцій $f\colon \Gamma \times X \to \mathbb{R}_+$. Зафіксуємо деяку функцію $r \in L_+^0(\Gamma \times X)$. Міру $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{fm}}^1(\Gamma)$ будемо називати гіббсівською мірою, що відповідає щільності відносної енергії (або інтенсивності Папангелоу) r, якщо для довільної $h \in L_+^0(\Gamma \times X)$ виконується тотожність Георгі – Нгуєна – Цессіна (див. [21]):

$$\int_{\Gamma} \sum_{x\in\gamma} h(\gamma, x) d\mu(\gamma) = \int_{\Gamma} \int_{X} h(\gamma \cup x, x) r(\gamma, x) dx d\mu(\gamma). \tag{5.3}$$

Позначимо клас таких мір $\mathcal{M}_{\mathrm{fm}}^1(\Gamma; r)$. Властивості таких мір та деяку бібліографію див., наприклад, у [7]. Зауважимо, зокрема, що з необхідністю з (5.3) випливає, що

$$r(\gamma \cup y, x) r(\gamma, y) = r(\gamma \cup x, y) r(\gamma, x) \tag{5.4}$$

для $\mu \times dx \times dy$-м.в. $(\gamma, x, y) \in \Gamma \times X \times X$.

Твердження 5.3. *Нехай $\{r_1, r_2, r\} \subset L_+^0(\Gamma \times X)$. Розглянемо міри $\mu_i \in \mathcal{M}_{\mathrm{fm}}^1(\Gamma; r_i)$, $i = 1, 2$, $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{fm}}^1(\Gamma, r)$. Тоді якщо $\mu = \mu_1 * \mu_2$, то з необхідністю для $\mu_1 \times \mu_2 \times dx$-м. в. $(\gamma^+, \gamma^-, x) \in \Gamma \times \Gamma \times X$ виконується рівність*

$$r\left(\gamma^+ \cup \gamma^-, x\right) = r_1\left(\gamma^+, x\right) + r_2\left(\gamma^-, x\right). \tag{5.5}$$

Доведення. Для довільної $h \in L_+^0(\Gamma \times X)$ з (5.1) маємо

$$\int_{\Gamma} \sum_{x\in\gamma} h\left(\gamma, x\right) d\mu\left(\gamma\right) =$$

$$= \int_{\Gamma^+} \int_{\Gamma^-} \sum_{x\in\gamma^+\cup\gamma^-} h\left(\gamma^+ \cup \gamma^-, x\right) d\mu_1\left(\gamma^+\right) d\mu_2\left(\gamma^-\right) =$$

$$= \int_{\Gamma^+} \int_{\Gamma^-} \int_{X} h\left(\gamma^+ \cup x \cup \gamma^-, x\right) r_1\left(\gamma^+, x\right) dx d\mu_1\left(\gamma^+\right) d\mu_2\left(\gamma^-\right) +$$

$$+ \int_{\Gamma^+} \int_{\Gamma^-} \int_{X} h\left(\gamma^+ \cup \gamma^- \cup x, x\right) r_2\left(\gamma^-, x\right) dx d\mu_1\left(\gamma^+\right) d\mu_2\left(\gamma^-\right) =$$

$$= \int_{\Gamma^+} \int_{\Gamma^-} \int_{X} h\left(\gamma^+ \cup x \cup \gamma^-, x\right) \left(r_1\left(\gamma^+, x\right) + r_2\left(\gamma^-, x\right)\right) dx d\mu_1\left(\gamma^+\right) d\mu_2\left(\gamma^-\right).$$

З іншого боку,

$$\int_{\Gamma}\sum_{x\in\gamma}h\left(\gamma,x\right)d\mu\left(\gamma\right)=\int_{\Gamma}\int_{X}h\left(\gamma\cup x,x\right)r\left(\gamma,x\right)dxd\mu\left(\gamma\right)=$$

$$=\int_{\Gamma^{+}}\int_{\Gamma^{-}}\int_{X}h\left(\gamma^{+}\cup x\cup\gamma^{-},x\right)r\left(\gamma^{+}\cup\gamma^{-},x\right)dxd\mu_{1}\left(\gamma^{+}\right)d\mu_{2}\left(\gamma^{-}\right),$$

де знову використано (5.1). Порівнюючи отримані вирази, дістаємо (5.5).

Твердження 5.3 доведено.

***Зауваження* 5.1.** З (5.5) видно, що якщо μ_i є мірами Гіббса, заданими потенціалами $\Phi_i\colon\Gamma_0\to\mathbb{R}$, $i=1,2$, тобто $r_i(\gamma,x)=\exp\left\{-\sum_{\eta\Subset\gamma}\Phi_i(\eta\cup x)\right\}$, $i=1,2$, то $\mu=\mu_1*\mu_2$ не може бути задана в такий спосіб.

***Наслідок* 5.1.** *Нехай умови* (5.5) *виконано. Тоді з* $\mu=\mu_1*\mu_2$ *випливає, що для* $\mu_1\times\mu_2\times\times dx\times dy$*-м. в.* $(\gamma^+,\gamma^-,x,y)\in\Gamma\times\Gamma\times X\times X$ *виконується рівність*

$$r_{1}\left(\gamma^{+},x\right)r_{2}\left(\gamma^{-},x\right)\left[r_{1}\left(\gamma^{+},x\right)r_{2}\left(\gamma^{-},y\right)-r_{1}\left(\gamma^{+},y\right)r_{2}\left(\gamma^{-},x\right)\right]\times$$

$$\times\left[r_{1}\left(\gamma^{+}\cup x,y\right)r_{2}\left(\gamma^{-},y\right)-r_{2}\left(\gamma^{-}\cup x,y\right)r_{1}\left(\gamma^{+},y\right)\right]=0. \tag{5.6}$$

Доведення. З (5.4) випливає (див. також [7]), що вираз

$$r\left(\gamma^{+}\cup\gamma^{-}\cup y,x\right)r\left(\gamma^{+}\cup\gamma^{-},y\right)=\left(r_{1}\left(\gamma^{+},x\right)+r_{2}\left(\gamma^{-}\cup y,x\right)\right)\left(r_{1}\left(\gamma^{+},y\right)+r_{2}\left(\gamma^{-},y\right)\right)=$$

$$=r_{1}\left(\gamma^{+},x\right)r_{1}\left(\gamma^{+},y\right)+r_{1}\left(\gamma^{+},x\right)r_{2}\left(\gamma^{-},y\right)+$$

$$+r_{2}\left(\gamma^{-}\cup y,x\right)r_{1}\left(\gamma^{+},y\right)+r_{2}\left(\gamma^{-}\cup y,x\right)r_{2}\left(\gamma^{-},y\right)$$

є симетричною функцією змінних x та y для $\mu_1\times\mu_2$-м.в. (γ^+,γ^-) і м. в. x,y. Тоді, враховуючи симетричність виразу $r_2\left(\gamma^-\cup y,x\right)r_2\left(\gamma^-,y\right)$, отримуємо

$$r_{1}\left(\gamma^{+},x\right)r_{2}\left(\gamma^{-},y\right)+r_{2}\left(\gamma^{-}\cup y,x\right)r_{1}\left(\gamma^{+},y\right)=$$

$$=r_{1}\left(\gamma^{+},y\right)r_{2}\left(\gamma^{-},x\right)+r_{2}\left(\gamma^{-}\cup x,y\right)r_{1}\left(\gamma^{+},x\right),$$

звідки

$$r_{1}\left(\gamma^{+},x\right)r_{2}\left(\gamma^{-},y\right)-r_{1}\left(\gamma^{+},y\right)r_{2}\left(\gamma^{-},x\right)=$$

$$=r_{2}\left(\gamma^{-}\cup x,y\right)r_{1}\left(\gamma^{+},x\right)-r_{2}\left(\gamma^{-}\cup y,x\right)r_{1}\left(\gamma^{+},y\right). \tag{5.7}$$

З іншого боку,

$$r\left(\gamma^{+}\cup\gamma^{-}\cup y,x\right)r\left(\gamma^{+}\cup\gamma^{-},y\right)=\left(r_{1}\left(\gamma^{+}\cup y,x\right)+r_{2}\left(\gamma^{-},x\right)\right)\left(r_{1}\left(\gamma^{+},y\right)+r_{2}\left(\gamma^{-},y\right)\right)=$$

$$=r_{1}\left(\gamma^{+}\cup y,x\right)r_{1}\left(\gamma^{+},y\right)+r_{1}\left(\gamma^{+}\cup y,x\right)r_{2}\left(\gamma^{-},y\right)+$$

$$+r_{2}\left(\gamma^{-},x\right)r_{1}\left(\gamma^{+},y\right)+r_{2}\left(\gamma^{-},x\right)r_{2}\left(\gamma^{-},y\right).$$

Далі, аналогічно до попереднього,

$$r_{2}\left(\gamma^{-},x\right)r_{1}\left(\gamma^{+},y\right)+r_{1}\left(\gamma^{+}\cup y,x\right)r_{2}\left(\gamma^{-},y\right)=$$

$$= r_2\left(\gamma^-, y\right) r_1\left(\gamma^+, x\right) + r_1\left(\gamma^+ \cup x, y\right) r_2\left(\gamma^-, x\right)$$

і, отже,

$$r_1\left(\gamma^+, x\right) r_2\left(\gamma^-, y\right) - r_1\left(\gamma^+, y\right) r_2\left(\gamma^-, x\right) =$$

$$= r_1\left(\gamma^+ \cup y, x\right) r_2\left(\gamma^-, y\right) - r_1\left(\gamma^+ \cup x, y\right) r_2\left(\gamma^-, x\right). \tag{5.8}$$

Порівнюючи праві частини (5.7) і (5.8), маємо

$$r_1\left(\gamma^+ \cup y, x\right) r_2\left(\gamma^-, y\right) - r_1\left(\gamma^+ \cup x, y\right) r_2\left(\gamma^-, x\right) =$$

$$= r_2\left(\gamma^- \cup x, y\right) r_1\left(\gamma^+, x\right) - r_2\left(\gamma^- \cup y, x\right) r_1\left(\gamma^+, y\right). \tag{5.9}$$

Домножимо тепер обидві частини рівності (5.9) на $r_1\left(\gamma^+, y\right) r_1\left(\gamma^+, x\right) r_2\left(\gamma^-, x\right) r_2\left(\gamma^-, y\right)$:

$$r_1\left(\gamma^+, y\right) r_1\left(\gamma^+, x\right) r_2\left(\gamma^-, x\right) r_2\left(\gamma^-, y\right) r_1\left(\gamma^+ \cup y, x\right) r_2\left(\gamma^-, y\right) -$$

$$-r_1\left(\gamma^+, y\right) r_1\left(\gamma^+, x\right) r_2\left(\gamma^-, x\right) r_2\left(\gamma^-, y\right) r_1\left(\gamma^+ \cup x, y\right) r_2\left(\gamma^-, x\right) =$$

$$= r_1\left(\gamma^+, y\right) r_1\left(\gamma^+, x\right) r_2\left(\gamma^-, x\right) r_2\left(\gamma^-, y\right) r_2\left(\gamma^- \cup x, y\right) r_1\left(\gamma^+, x\right) -$$

$$-r_1\left(\gamma^+, y\right) r_1\left(\gamma^+, x\right) r_2\left(\gamma^-, x\right) r_2\left(\gamma^-, y\right) r_2\left(\gamma^- \cup y, x\right) r_1\left(\gamma^+, y\right).$$

Отже,

$$r_1\left(\gamma^+ \cup x, y\right) r_1\left(\gamma^+, x\right) r_2\left(\gamma^-, y\right) r_2\left(\gamma^-, x\right) \left[r_1\left(\gamma^+, x\right) r_2\left(\gamma^-, y\right) - r_1\left(\gamma^+, y\right) r_2\left(\gamma^-, x\right)\right] =$$

$$= r_2\left(\gamma^- \cup x, y\right) r_2\left(\gamma^-, x\right) r_1\left(\gamma^+, y\right) r_1\left(\gamma^+, x\right) \left[r_2\left(\gamma^-, y\right) r_1\left(\gamma^+, x\right) - r_2\left(\gamma^-, x\right) r_1\left(\gamma^+, y\right)\right],$$

звідки випливає (5.6).

Наслідок доведено.

Рівність (5.6) „підказує”, в якому класі функцій варто шукати щільності відносних енергій $r_i(\gamma, x)$. Можна, наприклад, розглядати такі щільності, що $r_i(\gamma, x) = r_i(\gamma)$ для $\mu_i \times dx$-м. в. $(\gamma, x) \in \Gamma \times X$. Тоді вираз у перших дужках в (5.6) буде дорівнювати 0. Інший можливий варіант: $r_i(\gamma \cup y, x) = r_i(\gamma, x)$ для $\mu_i \times dx \times dy$-м. в. $(\gamma, x, y) \in \Gamma \times X \times X$. Тоді дорівнювати 0 буде вираз у других дужках в (5.6).

***Приклад* 5.1.** Обом цим випадкам відповідає, наприклад, так звана мішана міра Пуассона. А саме, нехай $p\colon (0; +\infty) \to (0; +\infty)$, причому $\int_0^\infty p(z)dz = 1$ і p є неперервною на $(0; +\infty)$. Розглянемо міру $\nu \in \mathcal{M}^1(\Gamma)$, задану рівністю $\nu(A) = \int_0^\infty \pi_z(A)p(z)dz$, $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$. Вона є сумішшю мір Пуассона з різними інтенсивностями. З (2.2) випливає, що

$$\int_\Gamma \sum_{x\in\gamma} h(\gamma, x)d\nu(\gamma) = \int_0^\infty \int_\Gamma \sum_{x\in\gamma} h(\gamma, x)d\pi_z(\gamma)p(z)dz =$$

$$= \int_0^\infty z \int_\Gamma \int_X h(\gamma \cup x, x)dm(x)d\pi_z(\gamma)p(z)dz =$$

$$= \int\limits_{\Gamma} \int\limits_{X} h(\gamma \cup x, x) q(\gamma, x) dm(x) d\nu(\gamma),$$

де $q(\gamma, x) = z$ для π_z-м. в. $\gamma \in \Gamma$, для м. в. $z \in (0; +\infty)$ і для всіх $x \in X$. Більш детально, як зазначено в зауваженні 2.1, $\pi_{z_1} \perp \pi_{z_2}$ при $z_1 \neq z_2$. З іншого боку, як показано, наприклад, у [9],

$$\lim_{\Lambda \uparrow X} \frac{|\gamma \cap \Lambda|}{m(\Lambda)} = z \quad \text{для} \quad \pi_z\text{-м. в.} \quad \gamma \in \Gamma, \quad z > 0. \tag{5.10}$$

Отже, якщо A_z є множиною конфігурацій, для яких виконано (5.10), то $\pi_{z_1}(A_{z_2}) = \delta_{z_1, z_2}$ (символ Кронекера). Як наслідок, $\nu(A) = 1$, де $A = \bigcup_{z>0} A_z$. Отже,

$$q(\gamma, x) = \lim_{\Lambda \uparrow X} \frac{|\gamma \cap \Lambda|}{m(\Lambda)} \quad \text{для} \quad \nu\text{-м. в.} \quad \gamma \in \Gamma \quad \text{і для всіх} \quad x \in X. \tag{5.11}$$

Зауважимо, що q не залежить від p, тобто функція q не визначає міру ν однозначно. Зрозуміло, що $q(\gamma, x) = q(\gamma \cup \eta, x)$ для всіх $\eta \in \Gamma_0$, $\gamma \cap \eta = \varnothing$. Аналогічно виконується рівність $q(\gamma_1 \cup \cup \gamma_2, x) = q(\gamma_1, x) + q(\gamma_2, x)$, якщо тільки $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \varnothing$. Таким чином, якщо μ, μ_1, μ_2 будуть мішаними мірами Пуассона, визначеними функціями p, p_1, p_2 відповідно, то рівність (5.5) буде виконуватись, оскільки $r_1 = r_2 = r = q$. Щоб показати, що згортка мішаних мір Пуассона буде також мірою цього типу, нагадаємо (див., наприклад, [3]), що міра Пуассона однозначно визначається своїми значеннями на множинах $C(\Lambda, n) = \big\{\gamma \in \Gamma \;\big|\; |\gamma \cap \Lambda| = n\big\}$, $\Lambda \in \mathcal{B}_c(X)$, $n \in \mathbb{N}_0$, причому

$$\pi_z(C(\Lambda, n)) = \frac{(zm(\Lambda))^n}{n!} e^{-zm(\Lambda)}.$$

Отже, за означенням згортки мір, якщо $\mu = \mu_1 * \mu_2$, то

$$\int\limits_{\Gamma} 1\!\!1_{C(\Lambda,n)}(\gamma)\, d\mu(\gamma) = \int\limits_{\Gamma} \int\limits_{\Gamma} 1\!\!1_{C(\Lambda,n)}(\gamma_1 \cup \gamma_2)\, d\mu_1(\gamma_1)\, d\mu_2(\gamma_2) =$$

$$= \int\limits_{\Gamma} \int\limits_{\Gamma} 1\!\!1_{|\gamma_1 \cap \Lambda| + |\gamma_2 \cap \Lambda| = n} d\mu_1(\gamma_1)\, d\mu_2(\gamma_2) = \int\limits_{\Gamma} \int\limits_{\Gamma} \sum_{k=0}^{n} 1\!\!1_{|\gamma_1 \cap \Lambda| = k} 1\!\!1_{|\gamma_2 \cap \Lambda| = n-k} d\mu_1(\gamma_1)\, d\mu_2(\gamma_2) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{\Gamma} 1\!\!1_{|\gamma_1 \cap \Lambda| = k} d\mu_1(\gamma_1) \int\limits_{\Gamma} 1\!\!1_{|\gamma_2 \cap \Lambda| = n-k} d\mu_2(\gamma_2) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \int\limits_{0}^{\infty} (zm(\Lambda))^k e^{-zm(\Lambda)} p_1(z)\, dz \int\limits_{0}^{\infty} (zm(\Lambda))^{n-k} e^{-zm(\Lambda)} p_2(z)\, dz =$$

$$= \frac{(m(\Lambda))^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} z_1^k z_2^{n-k} e^{-(z_1+z_2)m(\Lambda)} p_1(z_1)\, dz_1 p_2(z_2)\, dz_2 =$$

$$= \frac{(m(\Lambda))^n}{n!} \int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} (z_1 + z_2)^n e^{-(z_1+z_2)m(\Lambda)} p_1(z_1)\, p_2(z_2)\, dz_1 dz_2 =$$

$$= \int_0^\infty e^{-zm(\Lambda)} \frac{(zm(\Lambda))^n}{n!} \int_0^\infty p_1(z_1)\, p_2(z - z_1)\, dz_1 dz.$$

Отже, μ є мішаною мірою Пуассона, визначеною функцією $p(z) = \int_0^\infty p_1(z_1)\, p_2(z - z_1)\, dz_1$, тобто $p = p_1 * p_2$ в сенсі звичайної згортки на прямій.

Таким чином, згортка двох мішаних мір Пуассона є мішаною мірою Пуассона, ці міри є мірами Гіббса в сенсі (5.3), а щільності відносних енергій для них визначені формулою (5.11).

6. Інваріантні міри та приклади операторів диференціювання відносно $*$-згортки функцій на Γ_0. Нагадаємо, що міра $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$ називається *інваріантною* для оператора L, заданого на деякому класі функцій на Γ, якщо для довільної такої функції F виконується рівність

$$\int_\Gamma (LF)(\gamma) d\mu(\gamma) = 0. \tag{6.1}$$

Якщо припустити, що інтеграл у лівій частині (6.1) є скінченним для довільного $F \in \mathcal{F}_{\mathrm{cyl}}(\Gamma)$ і при цьому $|LF(\eta)| < \infty$ принаймні для всіх $\eta \in \Gamma_0$, то для довільного $G \in B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0)$ $F = KG \in \mathcal{F}_{\mathrm{cyl}}(\Gamma)$ і вираз $K^{-1}LF$, заданий аналогічно до (3.2), буде визначеним поточково (детальніше див. пункт 3). Як наслідок, можна розглянути оператор

$$\hat{L}G := K^{-1}LKG, \quad G \in B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0).$$

Тоді, якщо виконано (6.1) і існує кореляційний функціонал k_μ міри μ, з (3.6) маємо

$$\langle\!\langle \hat{L}G, k_\mu \rangle\!\rangle = \int_{\Gamma_0} (\hat{L}G)(\eta) k_\mu(\eta)\, d\lambda(\eta) = 0$$

для всіх $G \in B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0)$ (див. також пункт 4 [1]). Як наслідок, рівняння для спряженого оператора

$$\widehat{L}^* k = 0 \tag{6.2}$$

можна розуміти в слабкому сенсі або ж, наприклад, у банаховому просторі $\mathcal{K}_{C,\delta}$ (детальніше див. також у [8]). З іншого боку, рівняння (6.1) не визначає міру однозначно. Дійсно, нехай μ_i, $i = 1, 2,$ — дві міри, інваріантні відносно оператора L (зокрема, може бути, що $\mu_1 = \mu_2$), і $k_{1,2}$ — відповідні кореляційні функції. Згідно з твердженням 5.2 і [2] (твердження 5.2) функція $k = k_1 * k_2$ буде кореляційною функцією міри $\mu := \mu_1 * \mu_2$. Припустимо додатково, що оператор $\widehat{L}^*$ є оператором диференціювання відносно згортки (1.3) (див. підпункт 5.3 з [2]). Тоді

$$\widehat{L}^* k = (\widehat{L}^* k_1) * k_2 + k_1 * (\widehat{L}^* k_2) = 0,$$

тобто $\mu = \mu_1 * \mu_2$ також буде інваріантною мірою для оператора L. Зокрема, в цьому випадку μ^{*n} буде інваріантною мірою для оператора L для всіх $n \in \mathbb{N}$.

***Приклад* 6.1.** У статті [12] показано, що в моделі контактів (уведеній у [13]) з генератором

$$(L_{\mathrm{CM}}F)(\gamma) = \sum_{x\in\gamma} [F(\gamma \setminus x) - F(\gamma)] + \sum_{y\in\gamma} \int_{\mathbb{R}^d} a(x - y)\, [F(\gamma \cup x) - F(\gamma)]\, dx, \tag{6.3}$$

$0 \le a \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $a(-x) = a(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, існує сім'я інваріантних мір μ_{inv}, параметризованих їхніми першими кореляційними функціями $k_{\text{inv}}^{(1)} = c$, $c > 0$. Таким чином, для $c_i > 0$, $i = 1, 2$, існують дві інваріантні міри $\mu_{1,2}$ для оператора (6.3). Розглянемо міру $\mu = \mu_1 * \mu_2$. З попереднього випливає, що її перша кореляційна функція дорівнює $c_1 + c_2$ і для доведення її інваріантності достатньо показати, що оператор L_{CM}^* є диференціюванням відносно згортки (1.3). Нижче ми покажемо це у значно більш загальній ситуації.

Розглянемо два оператори

$$(L_- F)(\gamma) = \sum_{x \in \gamma} \int_{\Gamma_0} d(x, \omega) \left[F(\gamma \setminus x \cup \omega) - F(\gamma) \right] d\lambda(\omega),$$

$$(L_+ F)(\gamma) = \sum_{x \in \gamma} \int_{\Gamma_0} b(x, \omega) \left[F(\gamma \cup \omega) - F(\gamma) \right] d\lambda(\omega)$$

(тут і в подальшому будемо писати x замість $\{x\}$). Функції b та d є вимірними та невід'ємними на $X \times \Gamma_0$, причому $\displaystyle\int_{\Gamma_\Lambda} (b(x,\omega) + d(x,\omega))\, d\lambda(\omega) < \infty$. Тоді $|LF(\eta)| < \infty$, $\eta \in \Gamma_0$. Позначимо, для зручності,

$$\left(L_-^{(n)} F \right)(\gamma) = \sum_{x \in \gamma} \int_{X^n} d(x, \{y_1, \ldots, y_n\}) \left[F(\gamma \setminus x \cup \{y_1, \ldots, y_n\}) - F(\gamma) \right] dy_1 \ldots dy_n,$$

$$\left(L_+^{(n)} F \right)(\gamma) = \sum_{x \in \gamma} \int_{X^n} d(x, \{y_1, \ldots, y_n\}) \left[F(\gamma \cup \{y_1, \ldots, y_n\}) - F(\gamma) \right] dy_1 \ldots dy_n,$$

тобто $L_\pm = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} L_\pm^{(n)}$. Наприклад,

$$\left(L_-^{(0)} F \right)(\gamma) = \sum_{x \in \gamma} d(x, \varnothing) \left[F(\gamma \setminus x) - F(\gamma) \right],$$

$$\left(L_-^{(1)} F \right)(\gamma) = \sum_{x \in \gamma} \int_X d(x, y) \left[F(\gamma \setminus x \cup y) - F(\gamma) \right] dy,$$

$$\left(L_+^{(0)} F \right)(\gamma) = 0,$$

$$\left(L_+^{(1)} F \right)(\gamma) = \sum_{x \in \gamma} \int_X d(x, y) \left[F(\gamma \cup y) - F(\gamma) \right] dy.$$

Зокрема, якщо $d(x, \varnothing) = 1$, $d(x, y) = a(x - y)$, то $L_{\text{CM}} = L_-^{(0)} + L_+^{(1)}$.

Обчислимо $\hat{L}_\pm$. Маємо

$$(KG)(\gamma \setminus x \cup \omega) - (KG)(\gamma) = \sum_{\eta \Subset \gamma \setminus x} \sum_{\varnothing \neq \zeta \subset \omega} G(\eta \cup \zeta) - \sum_{\eta \Subset \gamma \setminus x} G(\eta \cup x) =$$

$$= K \left[\sum_{\varnothing \neq \zeta \subset \omega} G(\cdot \cup \zeta) - G(\cdot \cup x) \right] (\gamma \setminus x),$$

тоді

$$(\hat{L}_{-}G)(\eta) = \left(K^{-1}\left(L_{-}KG\right)\right)(\eta) =$$

$$= \sum_{x\in\eta}\int_{\Gamma_0} d\,(x,\omega)\left[\sum_{\varnothing\neq\zeta\subset\omega} G\,(\eta\setminus x\cup\zeta) - G\,(\eta)\right] d\lambda\,(\omega) =$$

$$= -\sum_{x\in\eta} d\,(x)\,G\,(\eta) - \sum_{x\in\eta} d\,(x)\,G\,(\eta\setminus x) + \sum_{x\in\eta}\int_{\Gamma_0} d\,(x,\omega)\sum_{\zeta\subset\omega} G\,(\eta\setminus x\cup\zeta)\,d\lambda\,(\omega) =$$

$$= -D\,(\eta)\,G\,(\eta) - \sum_{x\in\eta} d\,(x)\,G\,(\eta\setminus x) + \sum_{x\in\eta}\int_{\Gamma_0}\left(\int_{\Gamma_0} d\,(x,\omega\cup\xi)\,d\lambda\,(\omega)\right) G\,(\eta\setminus x\cup\zeta) = d\lambda\,(\xi) =$$

$$= -D\,(\eta)\,G\,(\eta) - \sum_{x\in\eta} d\,(x)\,G\,(\eta\setminus x) + \sum_{x\in\eta}\int_{\Gamma_0} d_1\,(x,\xi)\,G\,(\eta\setminus x\cup\zeta)\,d\lambda\,(\xi)\,,$$

де

$$d\,(x) = \int_{\Gamma_0} d\,(x,\omega)\,d\lambda\,(\omega)\,, \quad D\,(\eta) = \sum_{x\in\eta} d\,(x)\,, \quad d_1\,(x,\xi) = \int_{\Gamma_0} d\,(x,\omega\cup\xi)\,d\lambda\,(\omega)\,.$$

Аналогічно, враховуючи рівність

$$(KG)\,(\gamma\cup\omega) - (KG)\,(\gamma) = \sum_{\eta\Subset\gamma}\sum_{\varnothing\neq\zeta\subset\omega} G\,(\eta\cup\zeta) = K\left[\sum_{\varnothing\neq\zeta\subset\omega} G\,(\cdot\cup\zeta)\right](\gamma)\,,$$

отримуємо

$$(\hat{L}_{+}G)(\eta) = \left(K^{-1}\left(L_{+}KG\right)\right)(\eta) =$$

$$= \sum_{x\in\eta}\int_{\Gamma_0} b\,(x,\omega)\sum_{\varnothing\neq\zeta\subset\omega} G\,(\eta\setminus x\cup\zeta)\,d\lambda\,(\omega) + \sum_{x\in\eta}\int_{\Gamma_0} b\,(x,\omega)\sum_{\varnothing\neq\zeta\subset\omega} G\,(\eta\cup\zeta)\,d\lambda\,(\omega) =$$

$$= \sum_{x\in\eta}\int_{\Gamma_0} b\,(x_1,\zeta)\,G\,(\eta\setminus x\cup\zeta)\,d\lambda\,(\zeta) + \sum_{x\in\eta}\int_{\Gamma_0} b_1\,(x,\zeta)\,G\,(\eta\cup\zeta)\,d\lambda\,(\zeta) -$$

$$-\sum_{x\in\eta} G\,(\eta\setminus x)\,b\,(x) - B\,(\eta)\,G\,(\eta)\,,$$

де

$$b\,(x) = \int_{\Gamma_0} b\,(x,\omega)\,d\lambda\,(\omega)\,, \quad B\,(\eta) = \sum_{x\in\eta} b\,(x)\,, \quad b_1\,(x,\xi) = \int_{\Gamma_0} b\,(x,\omega\cup\xi)\,d\lambda\,(\omega)\,.$$

Як легко бачити, обидва отримані вирази задовольняють рівності

$$(\hat{L}_{\pm}G)(\eta\cup\xi) = \Big((\hat{L}_{\pm}G)(\cdot\cup\xi)\Big)\,(\eta) + \Big((\hat{L}_{\pm}G)(\cdot\cup\eta)\Big)\,(\xi), \tag{6.4}$$

а отже, згідно з твердженням 5.4 з [2], відповідні оператори $\hat{L}^*_{\pm}$ будуть операторами диференціювання відносно згортки (1.3).

Автор висловлює щиру вдячність д-ру фіз.-мат. наук проф. Ю. Г. Кондратьєву за корисні обговорення та цінні поради.

1. *Скороход А. В.* О дифференцируемости мер, соответствующих случайным процессам. I. Процессы с независимыми приращениями // Теория вероятностей и ее применения. – 1957. – **2**. – С. 417 – 443.
2. *Фінкельштейн Д. Л.* Про згортки на просторах конфігурацій. I. Простори скінченних конфігурацій // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 11. – С. 1547 – 1567.
3. *Albeverio S., Kondratiev Y., Röckner M.* Analysis and geometry on configuration spaces // J. Funct. Anal. – 1998. – **154**, № 2. – P. 444 – 500.
4. *Campbell N. R.* The study of discontinuous problem // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1909. – **15**. – P. 117 – 136.
5. *Campbell N. R.* Discontinuities in light emission // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1910. – **15**. – P. 310 – 328.
6. *Finkelshtein D.* Measures on two-component configuration spaces // Condensed Matter Phys. – 2009. – **12**, № 1. – P. 5 – 18.
7. *Finkelshtein D., Kondratiev Y.* Measures on configuration spaces defined by relative energies // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2005. – **11**, № 2. – P. 126 – 155.
8. *Finkelshtein D., Kondratiev Y., Kutoviy O.* Semigroup approach to non-equilibrium birth-and-death stochastic dynamics in continuum // J. Funct. Anal. – 2012. – **262**, № 3. – P. 1274 – 1308.
9. *Finkelshtein D., Us G.* On exponential model of Poisson spaces // Meth. Funct. Anal. and Top. – 1998. – **4**, № 4. – P. 5 – 21.
10. *Folland G. B.* Real analysis. – Second ed. – New York: John Wiley & Sons Inc., 1999.
11. *Kondratiev Y., Kuna T.* Harmonic analysis on configuration space. I. General theory // Infinite Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. – 2002. – **5**, № 2. – P. 201 – 233.
12. *Kondratiev Y., Kutoviy O., Pirogov S.* Correlation functions and invariant measures in continuous contact model // Infinite Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. – 2008. – **11**, № 2. – P. 231 – 258.
13. *Kondratiev Y., Skorokhod A.* On contact processes in continuum // Infinite Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. – 2006. – **9**, № 2. – P. 187 – 198.
14. *Kuna T.* Studies in configuration space analysis and applications: Dissertation // Bonn. math. Schr. – 1999. – **324**.
15. *Kuna T., Kondratiev Y., da Silva J. L.* Marked Gibbs measures via cluster expansion // Meth. Funct. Anal. and Top. – 1998. – **4**, № 4. – P. 50 – 81.
16. *Lenard A.* Correlation functions and the uniqueness of the state in classical statistical mechanics // Communs Math. Phys. – 1973. – **30**. – P. 35 – 44.
17. *Lenard A.* States of classical statistical mechanical systems of infinitely many particles. I // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1975. – **59**, № 3. – P. 219 – 239.
18. *Lenard A.* States of classical statistical mechanical systems of infinitely many particles. II. Characterization of correlation measures // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1975. – **59**, № 3. – P. 241 – 256.
19. *Matthes K., Kerstan J., Mecke J.* Infinitely divisible point processes. – Chichester etc.: John Wiley & Sons, 1978.
20. *Mecke J.* Eine charakteristische Eigenschaft der doppelt stochastischen Poissonschen Prozesse // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. – 1968. – **11**. – S. 74 – 81.
21. *Nguyen X.-X., Zessin H.* Integral and differential characterizations of the Gibbs process // Math. Nachr. – 1979. – **88**. – S. 105 – 115.
22. *Parthasarathy K. R.* Probability measures on metric spaces // Probab. and Math. Statistics. – 1967. – № 3.
23. *Takahashi Y.* Absolute continuity of Poisson random fields // Publ. Res. Inst. Math. Sci. – 1990. – **26**, № 4. – P. 629 – 647.

Одержано 09.04.12