УДК 517.5

В. Н. Коновалов

Продолжение функций многих переменных с сохранением дифференциально-разностных свойств

В данной статье решается задача о продолжении функций за пределы ограниченных областей с липшицевой границей с сохранением (с точностью до постоянного множителя) поведения в метрике L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ модулей непрерывности определенных порядков всех производных продолжаемых функций. Основной результат — теорема 1, обобщающая и несколько усиливающая соответствующие теоремы о продолжении из [1—6].

1. В дальнейшем будут использоваться понятия и обозначения, указанные в [7]. Но, в отличие от [7], в данной статье величина $\omega_k^{(r)}(f, \delta)_{L_p(\Omega)}$ будет называться функцией типа k-го модуля непрерывности, если она обладает свойствами, указанными в [7], и, кроме того, при $k > 0$ она непрерывна и удовлетворяет условию $\lim\limits_{\delta\to 0} \omega_k^{(r)}(f, \delta)_{L_p(\Omega)} = 0$. Через $W_p^{(r)}(\Omega)$ обозначается изотропное пространство Соболева с нормой $\|f\|_{W_p^{(r)}(\Omega)} = \max\limits_{s=0,\ldots,r} \|f\|_{w_p^{(s)}(\Omega)}$, а через $\Omega^{(\varepsilon)}$ — множество всех точек $\mathbf{x} \in \Omega$ таких, что $\rho(\mathbf{x}, \Omega) \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$.

2. Приведем формулировки теорем и вспомогательных утверждений.

Теорема 1. *Если Ω — ограниченная область с липшицевой границей, r и k — целые $\geqslant 0$ такие, что $r + k > 0$, и для функции $f(\mathbf{x})$, определенной на Ω, величина $\omega_k^{(r)}(f, \delta)_{L_p(\Omega)}$ — функция типа k-го модуля непрерывности, то существует функция $E(\mathbf{x}, f)$, имеющая на всем $\mathbf{R}^n$ обобщенные в смысле Соболева производные порядка r и обладающая свойствами $E(\mathbf{x}, f) \equiv f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $\omega_l^{(s)}(E(f), \delta)_{L_p(\Omega^{(\varepsilon)})} \leqslant c\omega_l^{(s)}(f, \delta)_{L_p(\Omega)}$, $0 \leqslant l \leqslant r - s + k$, $0 \leqslant s \leqslant r$, где $c = c(n, r, k, \Omega, \varepsilon)$, при $0 \leqslant l + s < r + k$, $0 \leqslant s \leqslant r$ не зависит от f, δ и p, а при $l + s = r + k$, $0 \leqslant s \leqslant r$ — также и от ε.*

Теорема 2. *Если выполнены предположения теоремы 1, то при каждом m, удовлетворяющем условию $r + k \leqslant m \leqslant \infty$, можно указать последовательность функций $E_N(\mathbf{x}, f) \in C^{(m)}(\mathbf{R}^n)$, $N = 1, 2, \ldots$, фундаментальную в пространстве $W_p^{(r')}(\mathbf{R}^n)$, где $r' = r - [1 - p^{-1}]$, если $k = 0$ и $r' = r$, если $k > 0$, и обладающую свойствами*

$$\|f - E_N(f)\|_{w_p^{(s)}(\Omega)} \leqslant c\omega_{r-s+k}^{(s)}(f, 2^{-N})_{L_p(\Omega)}, \quad 0 \leqslant s \leqslant r, \tag{1}$$

$$\omega_l^{(s)}(E_N(f), \delta)_{L_p(\Omega^{(\varepsilon)})} \leqslant C\omega_l^{(s)}(f, \delta)_{L_p(\Omega)}, \quad 0 \leqslant l \leqslant r - s + k, \quad 0 \leqslant s \leqslant r, \tag{2}$$

где $c = c(n, r, k, \Omega)$ не зависит от f, N и p, а $C = C(n, r, k, \Omega, \varepsilon)$ при $0 \leqslant l + s < r + k$, $0 \leqslant s \leqslant r$ не зависит от f, δ, N и p, и при $l + s = r + k$ — также и от ε.

Лемма 1. *Для произвольного множества Ω из $\mathbf{R}^n$ можно указать последовательность $\mathcal{R}_N = \{Q_{\nu,N}\}_{\nu=1}^{\infty}$, $N = 1, 2, \ldots$, разбиений $\mathbf{R}^n$ на попарно непересекающиеся кубы $Q_{\nu,N}$, обладающую свойствами:*

а) *если $Q_{\nu,N} \in \mathcal{R}_N$, то $n^{1/2}2^{-N} \leqslant |Q_{\nu,N}| \leqslant \rho(Q_{\nu,N}, \Omega) + n^{1/2}2^{-N} \leqslant 4|Q_{\nu,N}| + n^{1/2}2^{-N}$;*

б) *если кубы $Q_{\nu',N}, Q_{\nu'',N} \in \mathcal{R}_N$ имеют общие предельные точки, то $4^{-1}|Q_{\nu',N}| \leqslant |Q_{\nu'',N}| \leqslant 4|Q_{\nu',N}|$;*

в) *произвольный куб $Q_{\nu,N} \in \mathcal{R}_N$ имеет общие предельные точки не более чем с 12^n кубами из $\mathcal{R}_N$;*

г) *если кубы $Q_{\nu',N'} \in \mathcal{R}_{N'}$, $Q_{\nu'',N''} \in \mathcal{R}_{N''}$ имеют общие внутренние точки и $\rho(Q_{\nu',N'}, \Omega) > n^{1/2}2^{-N}$, $\rho(Q_{\nu'',N''}, \Omega) > n^{1/2}2^{-N}$, где $N = \min\{N', N''\}$, то $Q_{\nu',N'} = Q_{\nu'',N''}$.*

Л е м м а 2. *Если* Ω — *произвольное множество в* $\mathbf{R}^n$ *и* $\mathcal{R}_N = \{Q_{\nu,N}\}_{\nu=1}^{\infty}$, $N = 1, 2, \ldots,$ — *последовательность разбиений* $\mathbf{R}^n$ *на кубы, обладающая свойствами* а) — г) *леммы* 1, *то при каждом фиксированном* m *можно построить последовательность* $\mathcal{E}_N = \{F(\mathbf{x})_{\nu,N}\}_{\nu=1}^{\infty}$, $N = 1, 2, \ldots,$ *разбиений единицы на функции* $F(\mathbf{x})_{\nu,N} \in C^{(m)}(\mathbf{R}^n)$ *соответствующую последовательности* $\mathcal{R}_N$, $N = 1, 2, \ldots$, *и обладающую свойствами:*

а) *при всех* N *выполняются тождества* $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} F(\mathbf{x})_{\nu,N} \equiv 1,\ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$;

б) *при произвольных* N *и* ν *носитель функции* $F(\mathbf{x})_{\nu,N}$ *содержится в замыкании куба* $Q^*_{\nu,N}$, *концентрического с* $Q_{\nu,N}$ *и имеющего диаметр* $|Q^*_{\nu,N}| = 5/4\,|Q|_{\nu,N}$;

в) *при всех* $s = 0, \ldots, m$ *выполняются неравенства* $\|F(\mathbf{x})_{\nu,N}\|_{w_{\infty}^{(s)}(\mathbf{R}^n)} \leqslant \leqslant c\,|Q_{\nu,N}|^{-s}$, *где* $c = c(n, s)$ *не зависит от* ν *и* N;

г) *если* $Q_{\nu',N}, Q_{\nu'',N} \in \mathcal{R}_N$, *то носители* $F(\mathbf{x})_{\nu',N}$ *и* $F(\mathbf{x})_{\nu'',N}$ *пересекаются лишь тогда, когда кубы* $Q_{\nu',N}$ *и* $Q_{\nu'',N}$ *имеют общие предельные точки;*

д) *при каждом* N *в произвольной точке* $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ *пересекаются не более чем* 12^n *носителей функций из* $\mathcal{E}_N$;

е) *если кубы* $Q_{\nu',N'} \in \mathcal{R}_{N'}$, $Q_{\nu'',N''} \in \mathcal{R}_{N''}$ *имеют общие внутренние точки и* $\rho(Q_{\nu',N'}, \Omega) > n^{1/2}2^{-N}$, $\rho(Q_{\nu'',N''}, \Omega) > n^{1/2}2^{-N}$, *где* $N = \min\{N', N''\}$, *то* $F(\mathbf{x})_{\nu',N'} = F(\mathbf{x})_{\nu'',N''}$.

3. Приведем краткие доказательства утверждений раздела 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 1. Обозначив через $\overline{\Omega}$ замыкание области Ω, обозначим через $\mathcal{R}(\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}) = \{Q_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ разбиение (построенное в [8, гл. 6]) открытого множества $\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ на попарно непересекающиеся кубы такие, что $|Q_\nu| \leqslant \rho(Q_\nu, \Omega) \leqslant 4\,|Q_\nu|$. Обозначив через $S_N(\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega})$ множество кубов $Q \in \mathcal{R}(\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega})$ таких, что $|Q| > n^{1/2}2^{-N}$, разобъем множество $\mathbf{R}^n \setminus S_N \times \times (\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega})$ на попарно непересекающиеся кубы диаметра $n^{1/2}2^{-N}$. Множество полученных кубов обозначим через $\mathcal{T}_N(\overline{\Omega})$. Полагая $\mathcal{R}_N = S_N(\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}) \cup \cup \mathcal{T}_N(\overline{\Omega})$, получим разбиение всего R^n на попарно непересекающиеся кубы, обладающие свойствами а) — г) леммы 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 2. Зафиксируем какую-нибудь функцию $\xi(\mathbf{x}) \in C_0^{(m)}(\mathbf{R}^1)$ одной вещественной переменной такую, что $\xi(\mathbf{x}) \equiv 1$, если $|\mathbf{x}| \leqslant 1$; $\xi(\mathbf{x}) \equiv 0$, если $|\mathbf{x}| \geqslant 5/4$ и $0 < \xi(\mathbf{x}) < 1$, если $1 < |\mathbf{x}| < 5/4$ Полагая $\xi(\mathbf{x}) = \prod\limits_{i=1}^{n} \xi(x_i)$, получим функцию из $C_0^{(m)}(\mathbf{R}^n)$, носитель которой сосредоточен в кубе $Q_0^* = \{\mathbf{x} : |x_i| \leqslant 5/4,\ i = 1, \ldots, n\}$, такую, что $\xi(\mathbf{x}) \equiv 1$, если $\mathbf{x} \in Q_0 = \{\mathbf{x} : |x_i| \leqslant 1,\ i = 1, \ldots, n\}$. Если Q — произвольный куб в $\mathbf{R}^n$ с центром в точке $\mathbf{x}^0$, то полагаем $\xi(\mathbf{x}, Q) = \xi(n^{1/2}|Q|^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))$ и $\eta(\mathbf{x}, Q) = = 1 - \xi(\mathbf{x}, Q)$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. Очевидно, что $\eta(\mathbf{x}, Q) \equiv 1$, если $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \setminus Q^*$, где $Q^* = = \{\mathbf{x} : |x_i - x_i^0| \leqslant 5/4n^{1/2}|Q|,\ i = 1, \ldots, n\}$, и что $\eta(\mathbf{x}, Q) \equiv 0$, если $\mathbf{x} \in Q$.

При каждом $N = 1, 2, \ldots$ кубы $Q_{\nu,N}$ разбиения $\mathcal{R}_N$ занумеруем так, что если кубы Q_1, Q_2 входят как в разбиение $\mathcal{R}_{N'}$, так и в разбиение $\mathcal{R}_{N''}$, совпадая в $\mathcal{R}_{N'}$ соответственно с $Q_{\nu'_1,N'}$, $Q_{\nu'_2,N'}$, а в $\mathcal{R}_{N''}$ — соответственно с $Q_{\nu''_1,N''}$, $Q_{\nu''_2,N''}$, то $\nu''_1 < \nu''_2$, если $\nu'_1 < \nu'_2$, или $\nu''_1 > \nu''_2$, если $\nu'_1 > \nu'_2$.

Разбиение единицы $\mathcal{E}_N = \{F(\mathbf{x})_{\nu,N}\}_{\nu=1}^{\infty}$, соответствующее разбиению $\mathcal{R}_N = \{Q_{\nu,N}\}_{\nu=1}^{\infty}$, определим с помощью соотношений

$$F(\mathbf{x})_{1,N} = \xi(\mathbf{x}, Q_{1,N}),\ F(\mathbf{x})_{\nu,N} = \xi(\mathbf{x}, Q_{\nu,N}) \prod_{\mu=1}^{\nu-1} \eta(\mathbf{x}, Q_{\mu,N}), \quad \nu = 2, 3, \ldots \tag{3}$$

Полученные разбиения единицы обладают свойствами а) — е) леммы 2, что несложно проверить, используя утверждения леммы 1.

Доказательство теоремы 2. Обозначим через $\mathcal{R}(\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega})$ и $\mathcal{R}(\Omega)$ разбиения (построенные в [8, гл. 6]) открытых множеств $\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ и Ω на попарно непересекающиеся кубы, и определим соответствие мужду кубами этих разбиений. Пусть Q_0' — один из кубов разбиения $\mathcal{R}(\Omega)$, имеющих максимальный диаметр (Ω ограничено, поэтому такой куб существует). Зафиксировав этот куб, поставим его в соответствие каждому кубу разбиения $\mathcal{R}(\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega})$, имеющему диаметр не меньше чем $|Q_0'|$. Каждому кубу $Q \in \mathcal{R} \times \times (\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega})$ такому, что $|Q| < |Q_0'|$, поставим в соответствие один и только один из ближайших к нему кубов Q' разбиения $\mathcal{R}(\Omega)$, удовлетворяющих условию $|Q| \leqslant \rho(Q', \mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}) \leqslant 4|Q|$. Так как Ω — ограниченная область с липшицевой границей, то существует постоянная $K = K(\Omega)$, зависящая лишь от Ω, такая, что произвольный куб $Q' \in \mathcal{R}(\Omega)$, имеющий диаметр меньше чем $|Q_0'|$, будет поставлен в соответствие не более чем K кубам из $\mathcal{R}(\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega})$.

Если каждому кубу $Q \in \mathcal{R}(\Omega)$ поставлен в соответствие некоторый алгебраический многочлен $p(\mathbf{x}, Q)$, то определенное выше соответствие между кубами разбиений $\mathcal{R}(\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega})$ и $\mathcal{R}(\Omega)$ задает соответствие между кубами разбиения $\mathcal{R}(\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega})$ и многочленами $p(\mathbf{x}, Q)$.

Пусть $\mathcal{C}_N(\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega})$ — множество кубов разбиения $\mathcal{R}(R^n \setminus \overline{\Omega})$ таких, что $|Q| > n^{1/2}2^{-N}$, $\mathcal{T}_N(\overline{\Omega})$ — разбиение множества $\mathbf{R}^n \setminus \mathcal{C}_N(\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega})$ на попарно непересекающиеся кубы диаметра $n^{1/2}2^{-N}$, и $\mathcal{P}_N(\Omega)$ — разбиение области Ω на попарно непересекающиеся множества $\Omega_{\mu,\varepsilon_N}$, $\mu = 1, \ldots, M(N, \Omega)$, удовлетворяющие при $\varepsilon_N = N^{-1}|\Omega|$ условиям леммы 5 из [7]. Поставив в соответствие каждому кубу $Q \in \mathcal{T}_N(\overline{\Omega})$ одно и только одно из ближайших к нему множеств $\Omega_{\mu,\varepsilon_N} \in \mathcal{P}_N(\Omega)$, установим при каждом фиксированном N соответствие между множеством кубов $\mathcal{T}_N(\overline{\Omega})$ и разбиением $\mathcal{P}_N(\Omega)$ области Ω. Если каждому множеству $\Omega_{\mu,\varepsilon_N} \in \mathcal{P}_N(\Omega)$ поставлен в соответствие некоторый алгебраический многочлен $p(\mathbf{x}, \Omega_{\mu,\varepsilon_N})$, то описанное выше соответствие между $\mathcal{T}_N(\overline{\Omega})$ и $\mathcal{P}_N(\Omega)$ задает соответствие между кубами из $\mathcal{T}_N(\overline{\Omega})$ и этими многочленами.

Отправляясь от последовательности $\mathcal{R}_N = \{Q_{\nu,N}\}_{\nu=1}^{\infty}$, $N = 1, 2, \ldots$, разбиений $\mathbf{R}^n$ на кубы, удовлетворяющей условиям леммы 1, определим соответствующую последовательность $\mathcal{E}_N = \{F(\mathbf{x})_{\nu,N}\}_{\nu=1}^{\infty}$, $N = 1, 2, \ldots$, разбиений единицы, удовлетворяющую условиям леммы 2. Операторы «приближенного» продолжения $E_N(\mathbf{x}, f)$ построим с помощью соотношений

$$E_N(\mathbf{x}, f) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p(\mathbf{x}, f)_{\nu,N} F(\mathbf{x})_{\nu,N}, \tag{4}$$

где $p(\mathbf{x}, f)_{\nu,N}$ — некоторые специальным образом выбранные многочлены, определяемые ниже.

Пусть $k > 0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ или $k = 0$, $p = \infty$. Поставив в соответствие каждому кубу $Q' \in \mathcal{R}(\Omega)$ алгебраический многочлен $p_{r+k-1}(\mathbf{x}, f, Q')$ степени не выше $r + k - 1$, удовлетворяющий для Q' условиям леммы 2 из [7], где $\varepsilon = c|Q'|$ ($c = c(\Omega)$ — достаточно малое число, зависящее от Ω), получим соответствие между кубами разбиения $\mathcal{R}(\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega})$ и многочленами, соответствующими разбиению $\mathcal{R}(\Omega)$. Поставив в соответствие каждому из множеств $\Omega_{\mu,\varepsilon_N} \in \mathcal{P}_N(\Omega)$ алгебраический многочлен $p_{r+k-1}(\mathbf{x}, f, \Omega_{\mu,\varepsilon_N})$ степени не выше $r + k - 1$, удовлетворяющий условиям леммы 2 из [7], получим соответствие между кубами из $\mathcal{T}_N(\overline{\Omega})$ и этими многочленами. Учитывая, что каждое разбиение $\mathcal{R}_N$ пространства $\mathbf{R}^n$ имеет вид $\mathcal{R}_N = \mathcal{C}_N(\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}) \cup \mathcal{T}_N(\overline{\Omega})$, констатируем, что каждому кубу $Q_{\nu,N}$ из $\mathcal{R}_N$ поставлен в соответствие многочлен $p(\mathbf{x}, f)_{\nu,N}$ степени не выше $r + k - 1$, и именно эти многочлены подставляются в формулу (4).

Для случаев $k > 0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ или $k = 0$, $p = \infty$ операторы (4) определены. Если же $k = 0$, $1 \leqslant p < \infty$, то в (4) для ν и N таких, что диаметры соответствующих кубов $Q_{\nu,N} \in \mathcal{R}_N$ меньше диаметра максимального куба $|Q_0'|$ в разбиении $\mathcal{R}(\Omega)$ области Ω, в качестве многочленов $p(\mathbf{x}, f)_{\nu,N}$ будем брать многочлены степени r, а для остальных ν и N — многочлены степени $r - 1$.

Теперь операторы (4) определены для всех случаев, рассматриваемых в теореме 2. По построению, функции $E_N(\mathbf{x}, f)$ «вдали» от Ω совпадают при всех $N = 1, 2, \ldots$ с некоторым фиксированным многочленом $p(\mathbf{x}, f)$ степени не выше $r + k - 1$, и при произвольных N', N'' и всех $\mathbf{x}$ таких, что $\rho(\mathbf{x}, \Omega) > n^{1/2} 2^{-N}$; где $N = \min\{N', N''\}$, функции $E_{N'}(\mathbf{x}, f)$ и $E_{N''}(\mathbf{x}, f)$ совпадают.

Получим ряд равенств, используемых при доказательстве утверждений теоремы 2.

Зафиксировав единичный вектор $\mathbf{e} \in \mathbf{R}^n$ и считая, что $0 \leqslant s \leqslant r$, для всех $\mathbf{x} \in \Omega$ получим равенство

$$D^{(s)}(\mathbf{e}) f(\mathbf{x}) - D^{(s)}(\mathbf{e}) E_N(\mathbf{x}, f) = \sum_{s'=0}^{s} \binom{s}{s'} \sum_{\nu=1}^{\infty} (D^{(s-s')}(\mathbf{e}) f(\mathbf{x}) - D^{(s-s')}(\mathbf{e}) p(\mathbf{x}, f)_{\nu,N}) D^{(s')}(\mathbf{e}) F(\mathbf{x})_{\nu,N}. \tag{5}$$

Зафиксировав N' и N'', для всех $s = 0, \ldots, r$ получаем

$$\begin{aligned} D^{(s)}(\mathbf{e}) E_{N'}(\mathbf{x}, f) - D^{(s)}(\mathbf{e}) E_{N''}(\mathbf{x}, f) = \sum_{\nu'=1}^{\infty} \sum_{\nu''=1}^{\infty} (D^{(s)}(\mathbf{e}) p(\mathbf{x}, f)_{\nu',N'} - \\ - D^{(s)}(\mathbf{e}) p(\mathbf{x}, f)_{\nu'',N''}) F(\mathbf{x})_{\nu',N'} F(\mathbf{x})_{\nu'',N''} + \\ + \sum_{s'=1}^{s} \binom{s}{s'} \sum_{\nu'=1}^{\infty} \sum_{\nu''=1}^{\infty} (D^{(s-s')}(\mathbf{e}) p(\mathbf{x}, f)_{\nu',N'} - D^{(s-s')}(\mathbf{e}) p(\mathbf{x}, f)_{\nu'',N'}) \times \\ \times D^{(s')}(\mathbf{e}) F(\mathbf{x})_{\nu',N'} F(\mathbf{x})_{\nu'',N'} + \sum_{s'=1}^{s} \binom{s}{s'} \sum_{\nu'=1}^{\infty} \sum_{\nu''=1}^{\infty} (D^{(s-s')}(\mathbf{e}) p(\mathbf{x}, f)_{\nu',N''} - \\ - D^{(s-s')}(\mathbf{e}) p(\mathbf{x}, f)_{\nu'',N''}) F(\mathbf{x})_{\nu',N''} D^{(s')}(\mathbf{e}) F(\mathbf{x})_{\nu'',N''}. \end{aligned} \tag{6}$$

При всех N, $0 \leqslant l \leqslant r - s + k$, $0 \leqslant s \leqslant r$ и $0 < \delta \leqslant 2^{-N}$ получим равенства

$$\begin{aligned} \Delta^{(l)}(\delta\mathbf{e}) D^{(s)}(\mathbf{e}) E_N(\mathbf{x}, f) = \int_{Q(\delta)} D^{(s+l)}(\mathbf{e}) E_N(\mathbf{x} + \|\tau\| \mathbf{e}, f) d\tau = \\ = \int_{Q(\delta)} \sum_{s'=0}^{s+l} \binom{s+l}{s'} \sum_{\nu=1}^{\infty} D^{(s+l-s')}(\mathbf{e}) p(\mathbf{x} + \|\tau\| \mathbf{e}, f)_{\nu,N} D^{(s')}(\mathbf{e}) F(\mathbf{x} + \|\tau\| \mathbf{e})_{\nu,N} d\tau, \end{aligned} \tag{7}$$

где $Q(\delta) = \{\tau : \tau \in \mathbf{R}^l,\ 0 < \tau_i < \delta,\ i = 1, \ldots, l\}$, $\|\tau\| = \tau_1 + \ldots + \tau_l$.

Если $\delta > 2^{-N}$, то

$$\begin{aligned} \Delta^{(l)}(\delta\mathbf{e}) D^{(s)}(\mathbf{e}) E_N(\mathbf{x}, f) = \Delta^{(l)}(\delta\mathbf{e}) D^{(s)}(\mathbf{e}) E_{N(\delta)}(\mathbf{x}, f) + \Delta^{(l)}(\delta\mathbf{e}) (D^{(s)}(\mathbf{e}) E_N(\mathbf{x}, f) - \\ - D^{(s)}(\mathbf{e}) E_{N(\delta)}(\mathbf{x}, f)) = \Delta^{(l)}(\delta\mathbf{e}) D^{(s)}(\mathbf{e}) E_{N(\delta)}(\mathbf{x}, f) + \\ + \sum_{m=0}^{l} (-1)^{l-m} \binom{l}{m} (D^{(s)}(\mathbf{e}) E_N(\mathbf{x} + m\delta\mathbf{e}, f) - D^{(s)}(\mathbf{e}) E_{N(\delta)}(\mathbf{x} + m\delta\mathbf{e}, f)), \end{aligned} \tag{8}$$

где $N(\delta)$ — натуральное число, удовлетворяющее неравенству $2^{-N(\delta)-1} < \delta \leqslant 2^{-N(\delta)}$.

Используя леммы 2—5 из [7], лемму 2 данной статьи и обобщенное неравенство Минковского, из равенства (5) можно получить неравенство (1) теоремы 2, а из равенства (6) — неравенства

$$\| E_{N'}(f) - E_{N''}(f) \|_{w_p^{(s)}(\mathbf{R}^n)} \leqslant c\omega_{r-s+k}^{(s)}(f, 2^{-N})_{L_p(\Omega)}, \qquad s = 0, \ldots, r, \tag{9}$$

если $k > 0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ или $k = 0$, $p = \infty$, и неравенства

$$\| E_{N'}(f) - E_{N''}(f) \|_{w_p^{(s)}(\mathbf{R}^n)} \leqslant c\omega_{r-s+1}^{(s)}(f, 2^{-N})_{L_p(\Omega)}, \qquad s = 0, \ldots, r, \tag{10}$$

если $k = 0$, $1 \leqslant p < \infty$, где $N = \min\{N', N''\}$, $c = c(n, r, k, \Omega)$ — постоянная, не зависящая от f, N', N'' и p.

Из равенства (7) можно получить неравенство (2) для случая $\delta \leqslant 2^{-N}$, а затем, используя полученное неравенство и неравенство (1), из равенства (8) можно получить (2) для случая $\delta > 2^{-N}$.

Фундаментальность последовательности $E_N(\mathbf{x}, f)$, $N = 1, 2, \ldots$, в пространствах Соболева, указанных в условии теоремы 2, следует из неравенств (9) и (10).

Доказательство теоремы 1. Если $k > 0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ или $k = 0$, $p = \infty$, то последовательность $E_N(\mathbf{x}, f)$, $N = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющая условиям теоремы 2, фундаментальна в пространстве $W_p^{(r)}(\mathbf{R}^n)$ и, следовательно, сходится к некоторой функции $E(\mathbf{x}, f)$, удовлетворяющей условиям теоремы 1. Если же $k = 0$ и $p = \infty$, то эта последовательность является фундаментальной в пространстве $W_\infty^{(r-1)}(\mathbf{R}^n)$ и равномерно ограниченной в пространстве $w_\infty^{(r)}(\mathbf{R}^n)$. Но тогда из теоремы 4 в [9] следует, что утверждения теоремы 1 выполняются и при $k = 0$, $p = \infty$.

Замечание. Если при определении функций $F(\mathbf{x})_{\nu,N}$ в разбиениях единицы $\mathscr{E}_N = \{F(\mathbf{x})_{\nu,N}\}_{\nu=1}^{\infty}$, $N = 1, 2, \ldots$ (см. доказательство леммы 2) отправляться от функции $\xi(x) = \sum\limits_{k=-4}^{4} \delta_{m+1}(4x + k)$, где $\delta_{m+1}(x)$ — функция, построенная по индукции с помощью соотношений

$$\delta_l(x) = 2\int\limits_{-\infty}^{x} (\delta_{l-1}(2y+1) - \delta_{l-1}(2y-1))\,dy, \qquad l = 1, \ldots, m+1,$$

где $\delta_0(x) \equiv 1$ при $|x| \leqslant 1$, и $\delta_0(x) \equiv 0$ при $|x| > 1$, то носитель $Q_{\nu,N}^*$ каждой функции $F(\mathbf{x})_{\nu,N}$ из разбиения единицы $\mathscr{E}_N$ может быть разбит на попарно непересекающиеся кубы диаметра ${}^{-m-1}n^{-1/2}|Q_{\nu,N}|$, на каждом из которых $F(\mathbf{x})_{\nu,N}$ совпадает с алгебраическим многочленом степени не выше $(m+1)n\,12^n$. При таком выборе разбиений единицы функции $E_N(\mathbf{x}, f)$, построенные при доказательстве теоремы 2, будут гладкими алгебраическими сплайнами.

1. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М. : Наука, 1977.— 455 с.
2. *Бесов О. В.* Продолжение функций за пределы области с сохранением дифференциально-разностных свойств в L_p.— Мат. сборник, 1965, **66**, № 1, с. 80—96.
3. *Брудный Ю. А.* Теорема продолжения для одного семейства функциональных пространств.— Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1976, **56**, с. 170—173.
4. *Буренков В. И.* О продолжении функций с сохранением полунормы.— Докл. АН СССР, 1976, **228**, № 4, с. 779—782.
5. *Jonen H., Scherer K.* On the equivalence of the K-functional and moduli of continuity.— Lect. Notes, 1977, **571**, p. 119—140.
6. *Брудный Ю. А.* Продолжение функции с сохранением порядка убывания модулей непрерывности.— В кн.: Исследования по теории функций многих вещественных переменных. Ярославль : Яpослав. ун-т, 1978, вып. 2, с. 33—69.
7. *Коновалов В. Н.* Приближение функций многих переменных с сохранением дифференциально-разностных свойств.— Укр. мат. журн., 1984, **36**, № 2, с. 154—159.
8. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.— М. : Мир, 1973.— 342 с.
9. *Коновалов В. Н.* Дифференциальные свойства и приближение функций многих переменных.— Киев, 1979.— 42 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики)

Ин-т матем. АН УССР, Киев

Поступила в редакцию 02.12.82