УДК 517.948+512.13

Е. П. Гомозов

О ростках гладких отображений, ω-определенных относительно некоторого класса групп преобразований

Обозначим через $I(n, m)$ пространство ростков C^∞-отображений f: $:(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^m, 0)$ и через $\mathcal{G}$ — группу преобразований координат, действующую на $I(n, m)$. Пусть $\mathcal{G}_f : \mathcal{G}\to I(n, m)$ — отображение, определенное формулой $\mathcal{G}_f : g\mapsto g.f$, $f\in I(n, m)$, и пусть $T\mathcal{G}_f : T_e\mathcal{G}\to T_fI(n, m)$ — касательное к $\mathcal{G}_f$ отображение в единице.

Росток $f\in I(n, m)$ называется k-определенным относительно группы $\mathcal{G}$, если орбита этого ростка под действием $\mathcal{G}$ определяется k-струей f. Говорят, что росток f конечно (ω-) определен относительно $\mathcal{G}$, если f k-определен для некоторого натурального k $(k=\infty)$.

В [1] установлены критерии конечной определенности ростка относительно групп, задающих следующие типы эквивалентности: левую $(\mathcal{L})$, правую $(\mathcal{R})$, лево-правую $(\mathcal{A})$, контактную $(\mathcal{K})$. Приведем их в единой формулировке. Пусть $\mathcal{G}$ — одна из этих групп. Росток $f\in I(n, m)$ конечно определен относительно группы $\mathcal{G}$ тогда и только тогда, когда для любого ростка $\tau\in T_fI(n, m)$ с нулевой струей фиксированной конечной длины разрешимо уравнение

$$T\mathcal{G}_f(h)=\tau,\quad h\in T_e\mathcal{G}. \tag{1}$$

Однако развитая в [1] алгебраическая техника не может быть непосредственно использована для произвольной группы преобразований (например, если $\mathcal{G}$ — группа диффеоморфизмов $\varphi\in I(n, n)$, действующая на $I(n; n)$ сопряжением $\varphi.f=\varphi\circ f\circ\varphi^{-1}$ или по правилу $\varphi.f=(\varphi_*f)\circ\varphi^{-1}$) и в задачах об ω-определенности.

ω-определенность относительно групп $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{K}$ и сопряженности изучалась в [2—8]. Наиболее завершенный вид в этих работах имеют результаты для групп $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{K}$, однако даже и здесь доказательства зависят от вида конкретной группы.

Отметим, что все упомянутые в этой заметке группы естественным образом отождествляются с некоторыми подгруппами группы $\mathcal{K}$, при этом их действие — ограничение действия $\mathcal{K}$.

Пусть $f\in I(n, m)$. Пространство $T_fI(n, m)$ естественно отождествляется с $I(n, m)$ и представляет собой конечно порожденный свободный $I(n, 1)$-модуль. Пусть, далее, $\mathcal{G}$ — такая подгруппа группы $\mathcal{K}$, что $T_e\mathcal{G}$ — конечно порожденный свободный $I(n, 1)$-модуль, а $T\mathcal{G}_f$ — гомоморфизм модулей. Обозначим $[T\mathcal{G}_f]$ матрицу гомоморфизма $T\mathcal{G}_f$ в стандартных базисах касательных пространств $T_e\mathcal{G}$ и $T_fI(n, m)$. Элементы этой матрицы — ростки из $I(n, 1)$. Например, если $\mathcal{G}=\mathcal{R}$, то $T_e\mathcal{R}\simeq I(n, n)$ и матрица $[T\mathcal{R}_f]$ — это просто матрица Якоби ростка f.

Теорема. При сделанных выше предположениях относительно действия группы $\mathcal{G}$ следующие утверждения для ростка $f\in I(n, m)$ эквивалентны:

1) f ω-определен относительно $\mathcal{G}$;

2) уравнение (1) имеет решение при любой правой части τ с нулевым рядом Тейлора;

3) росток функции $d(x)=\det\{[T\mathcal{G}_f(x)][T\mathcal{G}_f(x)]^t\}$ (t означает транспонирование) имеет в начале координат нуль конечного порядка: $|d(x)|>C\|x\|^\alpha$, $C>0$, $\alpha>0$;

4) для любого ростка $h\in I(n, m)$ с нулевым рядом Тейлора $T\times\mathcal{G}_{f+h}(T_d\mathcal{G})=T\mathcal{G}_f(T_e\mathcal{G})$;

5) $T_fI(n, m)/T\mathcal{G}_f(T_e\mathcal{G})$ — нетеров модуль;

6) для любого натурального s росток f конечно определен относительно группы $\mathcal{G}$ в классе C^s.

Замечания. 1. Из теоремы вытекает также критерий k-определенности для рассматриваемых нами групп. Росток $f \in I(n, m)$ k-определен относительно группы $\mathcal{G}$ тогда и только тогда, когда уравнение (1) разрешимо для любой правой части, являющейся однородным многочленом степени k.

2. Для рассмотренных групп теорема дает критерий совпадения формальной и гладкой классификации.

3. Результаты работ [2—8] для групп $\mathcal{R}$ и $\mathcal{K}$ непосредственно следуют из теоремы. Однако условие 3 в приведенной формулировке проверяется проще, чем аналогичные условия в [4, 5].

Рассмотрим теперь несколько примеров применения теоремы.

Пусть $I(n, pq)$ — пространство $p \times q$ матриц $F = (f_{ij})$, $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, q$, элементы которых — ростки $f_{ij} \in I(n, 1)$. Рассмотрим группу всевозможных пар (V, W), где V — росток отображения $(\mathbb{R}^n, 0) \to GL(p)$, W — росток отображения $(\mathbb{R}^n, 0) \to GL(q)$, а действие этой группы на $I(n, pq)$ определяется формулой $(V, W).F = VFW$, $F \in I(n, pq)$. Отметим, что классификация орбит этого действия тесно связана с классификацией модулей.

Касательное отображение $T\mathcal{G}_F$ действует по правилу $(v, w) \mapsto vF + Fw$, $(v, w) \in T_e\mathcal{G}$. Условие 3, которое в данном случае проверяется проще всего, выглядит так: найдутся такие $C > 0$, $\alpha > 0$, $\delta > 0$, что $\sum\limits_{i,j} f_{ij}^2(x) \geq C \| x \|^\alpha$ $\forall x$, $\| x \| < \delta$. В частности, росток F аналитического отображения $(\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^{pq}, 0)$ ω-определен относительно данной группы тогда и только тогда, когда $F^{-1}(0) = 0$.

Рассмотрим группу ростков диффеоморфизмов $\varphi \in I(n, n)$, оставляющих инвариантным росток подпространства $(\mathbb{R}^k, 0)$, $k < n$, которая действует на $I(n, m)$ преобразованием координат в прообразе. Для такой группы пространство $T_e\mathcal{G}$ будет подпространством в $T_e\mathcal{R}$, а отображение $T\mathcal{G}_f$ — сужением $T\mathcal{R}_f$ на это подпространсто. Поэтому, например, условия 2 и 3 теоремы для этой группы относительно ростка $f \in I(n, m)$ состоят в выполнении условий 2 и 3 для группы $\mathcal{R}$ относительно и f, и сужения f на $(\mathbb{R}^k, 0)$.

1. *Мазер Дж.* Устойчивость C^∞-отображений. III. — Математика, 1970, **14**, № 1, с. 145—175.
2. *Белицкий Г. Р.* Ростки отображений, ω-определенные осноительно данной группы. — Мат. сб., 1974, **94**, вып. 7, с. 452—463.
3. *Гомозов Е. П.* Ростки, ω-определенные относительно преобразований координат в прообразе. — В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, 1979, вып. 32, с. 30—33.
4. *Kucharz W.* Jets suffisants et fonktions de determination finie. — C. R. Acad. Cs., ser. A. Paris. 1977, **284**, p. 877—879.
5. *Wilson L. C.* Infinitly determined mapgerms. — Preprint University of Hawaii, 1980.
6. *Wilson L. C.* Margerms infinitely determined with respect to right-left equivalens. — Preprint University of Hawaii, 1980.
7. *Nguyen Tu Cuong, Nguen Huu Duc, Nguyen Si Minh, Ha Huy Vui.* Sur les germes de fonctions infiniment determines. — C. R. Acad. Sc., ser. A. Paris., 1977, **285**, p. 1045—1048.
8. *Nguyen Tu Cuong, Nguyen Huu Duc, Nguyen Si Minh, Ha Huy Vui.* Sur les germes de fonctions infiniment determines. — Acta math. Vietnamica, 1978, **3**, N 1, p. 43—50.

Харьков. политехн. ин-т Поступила в редакцию 21.06.83