УДК 517.5

К. В. Соліч (Ін-т математики НАН України, Київ)

КОЛМОГОРОВСЬКІ ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАСІВ $B^{\Omega}_{p,\theta}$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ У ПРОСТОРІ L_q

We obtain exact-order estimates for the Kolmogorov widths of the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic functions of many variables in the space L_q for $1 \leq p, q \leq \infty$.

Получены точные по порядку оценки колмогоровских поперечников классов $B^{\Omega}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q при $1 \leq p,\ q \leq \infty$.

Вступ. У роботі досліджуються колмогоровські поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q при різних співвідношеннях між p і q.

Спочатку наведемо необхідні позначення, а також дамо означення класів і апроксимативної характеристики, що буде досліджуватись.

Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, означає d-вимірний евклідів простір з елементами $x = (x_1, \ldots, x_d)$ і $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^{d} [-\pi; \pi)$, — простір 2π-періодичних по кожній змінній і сумовних у степені p, $1 \leq p < \infty$ (відповідно суттєво обмежених при $p = \infty$) функцій $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$. Норма в цьому просторі визначається таким чином:

$$||f||_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$||f||_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)|.$$

Означимо простори $B^{\Omega}_{p,\theta} \subset L_p(\pi_d)$, властивості яких визначаються за допомогою: $\Omega(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, — мажорантної функції для модуля неперервності l-го порядку ($l \in \mathbb{N}$) функції $f \in L_p(\pi_d)$; числових параметрів p і θ, $1 \leq p, \theta \leq \infty$.

Для довільної функції $f \in L_p(\pi_d)$ позначимо через

$$\Omega_l(f, t)_p = \sup_{|h| \leq t} \| \Delta^l_h f(\cdot) \|_p$$

модуль неперервності порядку l функції f, де $\Delta^l_h f(x) = \Delta_h \Delta^{l-1}_h f(x)$, $\Delta^0_h f(x) = f(x)$, $h = (h_1, ..., h_d)$, — кратна l-та різниця з кроком h_j за змінною x_j, $j = \overline{1, d}$, яку можна записати ще так:

$$\Delta^l_h f(x) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} C^n_l f(x + nh).$$

Нехай далі $\Omega(t)$ — задана функція типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови:

1) $\Omega(t) > 0$, $t > 0$; $\Omega(t) = 0$, $t = 0$;

2) $\Omega(t)$ є неперервною;

3) $\Omega(t)$ зростає;

4) для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ $\Omega(nt) \le Cn^l\Omega(t)$, де $C > 0$ не залежить від n і t.

Множину таких функцій Ω позначимо через Ψ_l. Зауважимо, що якщо $f \in L_p(\pi_d)$, то $\Omega_l(f,\cdot) \in \Psi_l$.

Підпорядкуємо функції $\Omega \in \Psi_l$ додатковим умовам, які опишемо у термінах двох понять, уведених С. Н. Бернштейном [1]:

а) невід'ємна функція $\varphi(\tau)$, $\tau \in [0;\infty)$, майже зростає, якщо існує стала $C_1 > 0$ така, що $\varphi(\tau_1) \le C_1\varphi(\tau_2)$ для будь-яких τ_1, τ_2, $0 \le \tau_1 < \tau_2$;

б) додатна функція $\varphi(\tau)$, $\tau \in (0;\infty)$, майже спадає, якщо існує стала $C_2 > 0$ така, що $\varphi(\tau_1) \ge C_2\varphi(\tau_2)$ для будь-яких τ_1, τ_2, $0 < \tau_1 < \tau_2$.

Будемо вважати, що $\Omega(t)$ належить множинам S^α і S_l. Умови належності до цих множин часто називають умовами Барі – Стєчкіна [2]. Це означає наступне:

i) $\Omega \in S^\alpha$ $(\alpha > 0)$, якщо функція $\dfrac{\Omega(\tau)}{\tau^\alpha}$ майже зростає при $\tau > 0$;

ii) $\Omega \in S_l$, якщо існує γ, $0 < \gamma < l$, таке, що функція $\dfrac{\Omega(\tau)}{\tau^\gamma}$ майже спадає при $\tau > 0$.

Покладемо також $\Phi_{\alpha,l} = \Psi_l \cap S^\alpha \cap S_l$.

Варто зазначити, що функції $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$ можуть мати, наприклад, вигляд

$$\Omega(t) = \begin{cases} t^r\left(\log^+\left(\dfrac{1}{t}\right)\right)^\beta, t > 0, \\ 0, \qquad\qquad\qquad t = 0, \end{cases}$$

де $\log^+(t) = \max\{1, \log(t)\}$, $0 < r < l$, а β — фіксоване дійсне число.

Для $1 \le p$, $\theta \le \infty$ і заданої функції $\Omega(t)$ типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови $1 - 4$, простір $B^{\Omega}_{p,\theta}$ визначається таким чином:

$$B^{\Omega}_{p,\theta} = \{f \in L_p(\pi_d)\colon \ \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \overset{\text{df}}{=} \|f\|_p + |f|_{b^{\Omega}_{p,\theta}} < \infty\},$$

де напівнорма $|f|_{b^{\Omega}_{p,\theta}}$ визначається співвідношенням

$$|f|_{b^{\Omega}_{p,\theta}} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}\right)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{1/\theta}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \displaystyle\sup_{t>0} \frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}, & \theta = \infty. \end{cases} \tag{1}$$

Нехай

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} := \|f\|_p + |f|_{b^{\Omega}_{p,\theta}}, \ \ 1 \le p, \quad \theta \le \infty,$$

— норма у просторі $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Якщо $\Omega(t) = t^r$, то класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ збігаються з класами О. В. Бєсова $B^{r}_{p,\theta}$ [3] і, зокрема, при $\theta = \infty$ та $\Omega(t) = t^r$ $B^r_{p,\infty} = H^r_p$, де H^r_p — класи, введені С. М. Нікольським [4]. Таким чином, класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ є узагальненням (за гладкісним параметром) відомих класів

Нікольського – Бєсова. З точки зору теорем вкладення ці класи розглядались у роботах М. Л. Гольдмана [5] і Г. А. Калябіна [6]. Пізніше їх апроксимативні характеристики досліджувались у роботах Li Yongping та Xu Guiqiao [7], Xu Guiqiao [8], С. А. Стасюка [9], С. П. Войтенка [10, 11] та інших.

У наступних міркуваннях ми будемо використовувати порядкові співвідношення. Запис $A \asymp B$ означає двосторонню нерівність між виразами A і B, тобто $C_3 B \le A \le \le C_4 B$, де $C_3,\ C_4 > 0$ — сталі, значення яких можуть бути різними в різних місцях. Також якщо $A \le C_5 B$, $C_5 > 0$, та $A \ge C_6 B$, $C_6 > 0$, будемо писати $A \ll B$ і $A \gg B$ відповідно. Із контексту буде зрозуміло, від яких параметрів ці сталі не залежать. Ми не будемо акцентувати на цьому увагу щоразу при використанні символів $\asymp, \ll, \gg$.

Зауважимо, що зі збільшенням параметра θ простори $B^{\Omega}_{p,\theta}$ розширюються, тобто при $1 \le \theta \le \theta' \le \infty$ мають місце вкладення

$$B^{\Omega}_{p,1} \subset B^{\Omega}_{p,\theta} \subset B^{\Omega}_{p,\theta'} \subset B^{\Omega}_{p,\infty} = H^{\Omega}_{p}. \tag{2}$$

При доведенні теореми нам буде зручніше користуватись еквівалентним (з точністю до абсолютних сталих) означенням норм у просторах $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Позначимо через $V_m(t)$, $m \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, ядро Валле Пуссена вигляду

$$V_m(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kt + 2\sum_{k=m+1}^{2m} \left(\frac{2m-k}{m}\right) \cos kt.$$

Тоді багатовимірне ядро $V_m(x)$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^d$, означимо згідно з формулою

$$V_m(x) = \prod_{j=1}^{d} V_m(x_j).$$

Нехай $\mathbf{V}_m$ — оператор, який задає згортку функцій $f \in L_p(\pi_d)$ з багатовимірним ядром $V_m(x)$:

$$\mathbf{V}_m f \overset{\mathrm{df}}{=} f * V_m = V_m(f,x).$$

Таким чином, $V_m(f,x)$ — кратна сума Валле Пуссена функції f.

Для $f \in L_p(\pi_d)$ покладемо

$$\Phi_0(f,x) = V_1(f,x),\ \Phi_s(f,x) = V_{2^s}(f,x) - V_{2^{s-1}}(f,x),\ \ s \in \mathbb{N}.$$

У прийнятих позначеннях (з точністю до абсолютних сталих) простори $B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 \le \le p \le \infty$, можна означити таким чином (див., наприклад, [8]):

$$B^{\Omega}_{p,\theta} = \left\{ f : \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{\|\Phi_s(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \right)^{\theta} \right)^{1/\theta} < \infty \right\}, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

$$B^{\Omega}_{p,\infty} = \left\{ f : \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} = \sup_{s} \frac{\|\Phi_s(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} < \infty \right\}. \tag{3}$$

Зазначимо, що у випадку $1 < p < \infty$ можна записати еквівалентні (з точністю до абсолютних сталих) означення норм функцій із класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, використовуючи в (3) замість $\|\Phi_s(f,\cdot)\|_p$ норми відповідних „блоків" ряду Фур'є функції f.

Для $f \in L_p(\pi_d)$ і $s \in \mathbb{Z}_+$ введемо позначення

$$f_0(x) = \widehat{f}(0), \quad f_s(x) = \sum_{\substack{2^{s-1} \le \max |k_j| < 2^s \\ j=\overline{1,d}}} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)}, \quad s = 1, 2, \ldots,$$

де $(k,x) = k_1x_1 + \ldots + k_dx_d$, а

$$\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$$

— коефіцієнти Фур'є функції f. Тоді при $1 < p < \infty$ будемо мати

$$B^{\Omega}_{p,\theta} = \left\{ f : \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{\|f_s(\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \right)^{\theta} \right)^{1/\theta} < \infty \right\}, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

$$B^{\Omega}_{p,\infty} = \left\{ f : \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} = \sup_s \frac{\|f_s(\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} < \infty \right\}. \tag{4}$$

Надалі, для одиничної кулі у просторі $B^{\Omega}_{p,\theta}$ будемо використовувати те ж позначення, що і для самого простору $B^{\Omega}_{p,\theta}$, тобто

$$B^{\Omega}_{p,\theta} := \{ f \in B^{\Omega}_{p,\theta} \colon \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \le 1 \}.$$

Тепер дамо означення апроксимативної характеристики, яку будемо досліджувати.

Нехай Φ — центрально-симетрична множина банахового простору $\mathcal{X}$ і $\mathcal{L}_m$ — довільний підпростір у $\mathcal{X}$ розмірності m. Тоді величина

$$d_m(\Phi, \mathcal{X}) := \inf_{\mathcal{L}_m} \sup_{f \in \Phi} \inf_{u \in \mathcal{L}_m} \|f - u\|_{\mathcal{X}} \tag{5}$$

називається колмогоровським поперечником. Нагадаємо, що поперечник $d_m(\Phi, \mathcal{X})$ був введений у 1936 р. А. М. Колмогоровим [12].

Також будемо вважати, що

$$d_0(\Phi, \mathcal{X}) = \sup_{f \in \Phi} \|f\|_{\mathcal{X}}.$$

На даний час для різного роду класів функцій як однієї, так і багатьох змінних, відомі не лише порядкові оцінки колмогоровських поперечників, але й в деяких важливих випадках їх точні значення. З відповідними результатами можна ознайомитись у книгах [13 – 18].

Далі нам знадобляться деякі допоміжні означення та твердження.

Нехай

$$C^d(N) = \left\{k = (k_1, \ldots, k_d),\ |k_j| \le N,\ k_j \in \mathbb{Z},\ j = \overline{1, d}\right\}.$$

Позначимо через $T(C^d(N))_q$ підмножину функцій з

$$T(C^d(N)) = \left\{ t \colon t(x) = \sum_{k \in C^d(N)} c_k e^{i(k,x)} \right\},$$

які задовольняють умову $\|t\|_q \le 1$, $1 \le q \le \infty$.

Теорема А. *Нехай* $t \in T(C^d(2^n))$. *Тоді при* $1 \le q \le p \le \infty$ *має місце співвідношення*

$$\|t\|_p \le 2^{nd(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} \|t\|_q. \tag{6}$$

Нерівність (6) була встановлена С. М. Нікольським [4] і отримала назву „нерівності різних метрик”. У випадку $d = 1$ і $p = \infty$ відповідну нерівність довів Джексон [19].

Має місце наступне твердження.

Теорема Б [14, с. 122]. *Нехай* $m,\ n \in \mathbb{N}$ *такі, що* $m \asymp 2^{nd}$ *і* $m < 2^{nd+1}$. *Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$d_m(T(C^d(2^n))_2, L_\infty) \ll \left(2^{nd}/m\right)^{1/2} \left(\log(e 2^{nd}/m)\right)^{1/2}. \tag{7}$$

Лема А [8]. *Нехай* $1 \le p < q \le \infty$ *і* $\Omega(t)/t^\alpha$ *при* $\alpha > d\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}\right)$ *майже зростає. Тоді* $B^{\Omega}_{p,\theta} \subset B^{\Omega_1}_{q,\theta}$, *де* $\Omega_1(t) = \Omega(t)/t^{d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})}$ *і*

$$\|f\|_{B^{\Omega_1}_{q,\theta}} \ll \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}}.$$

Також нами будуть використовуватись оцінки наступних апроксимативних характеристик.

Якщо $F \subset L_p(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$, — деякий функціональний клас, то позначимо

$$E_{2^n}(F)_q = \sup_{f \in F} \inf_{t \in T(C^d(2^n))} \|f - t\|_q.$$

При доведенні оцінок зверху величин $d_m(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$ будемо використовувати результат, одержаний у роботі [9].

Теорема В. *Нехай* $1 \le p,\ q,\ \theta \le \infty$, *а функція* $\Omega(t) \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > d\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}\right)_+$. *Тоді*

$$E_{2^n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp \Omega(2^{-n}) 2^{nd(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+}, \tag{8}$$

де $a_+ = \max\{a; 0\}$.

Для отримання оцінок знизу будуть використовуватись оцінки білінійних наближень функцій із класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ [20].

Дамо означення відповідної апроксимативної характеристики.

Нехай $L_q(\pi_{2d})$, $q=(q_1,q_2)$, позначає множину функцій $f(x,y)$, x, $y\in\pi_d$, зі скінченною мішаною нормою

$$\|f(x,y)\|_{q_1,q_2}=\big\|\|f(\cdot,y)\|_{q_1}\big\|_{q_2},$$

де норма обчислюється спочатку у просторі $L_{q_1}(\pi_d)$ по змінній $x\in\pi_d$, а потім по змінній $y\in\pi_d$ у просторі $L_{q_2}(\pi_d)$. Для $f\in L_q(\pi_{2d})$ означимо величину

$$\tau_m(f)_{q_1,q_2}=\inf_{u_i(x),v_i(y)}\Big\|f(x,y)-\sum_{i=1}^{m}u_i(x)v_i(y)\Big\|_{q_1,q_2},$$

де $u_i\in L_{q_1}(\pi_d)$, $v_i\in L_{q_2}(\pi_d)$, яка називається найкращим білінійним наближенням функції $f(x,y)$. Зауважимо, що $\tau_0(f)_{q_1,q_2}:=\|f(x,y)\|_{q_1,q_2}$.

1. Основні результати. Сформулюємо отримані результати, а також наведемо деякі коментарі.

Теорема 1. *Нехай* $1\le p,\,q,\,\theta\le\infty$ *і* $\Omega(t)\in\Phi_{\alpha,l}$, $\alpha>\alpha(p,q)$, *де*

$$\alpha(p,q)=\begin{cases}d\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}\right)_+, & 1\le p\le q\le 2\quad \textit{або}\quad 2\le q\le p\le\infty;\\[2mm] \max\left\{\dfrac{d}{p};\dfrac{d}{2}\right\}, & 2\le p\le q\le\infty\quad \textit{або}\quad 1\le p<2<q\le\infty.\end{cases}$$

Тоді для $m\in\mathbb{N}$ *мають місце порядкові співвідношення*

$$d_m(B^{\Omega}_{p,\theta},L_q)\asymp\begin{cases}\Omega(m^{-\frac{1}{d}})m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, & 1\le p\le q\le 2,\\ \Omega(m^{-\frac{1}{d}}), & 2\le p\le q\le\infty\quad \textit{або}\quad 2\le q\le p\le\infty,\\ \Omega(m^{-\frac{1}{d}})m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, & 1\le p<2<q\le\infty.\end{cases}\qquad(9)$$

Доведення. Спочатку встановимо в (9) оцінки зверху. У випадках $1\le p\le q\le 2$ і $2\le q\le p\le\infty$ шукані оцінки поперечників $d_m(B^{\Omega}_{p,\theta},L_q)$ випливають з оцінок найкращого наближення функцій із класів $B^{\Omega}_{p,\infty}=H^{\Omega}_p$ у просторі L_q, наведених у теоремі B. Тому при умові, що число $n\in\mathbb{N}$ задовольняє співвідношення $m\asymp 2^{nd}$, маємо

$$d_m(H^{\Omega}_p,L_q)\ll E_{2^n}(H^{\Omega}_p)_q\asymp\Omega(2^{-n})2^{nd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+}\asymp\Omega(m^{-\frac{1}{d}})m^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+}.$$

Тепер розглянемо випадок, коли $p=2$ і $q=\infty$, тобто знайдемо оцінку зверху колмогоровського поперечника $d_m(H^{\Omega}_2,L_\infty)$. Нехай $n=[\alpha]+1$ і

$$m_1=(2^{n+1}-1)^d\asymp 2^{nd},$$

$$m_s=[m_1\cdot 2^{-\rho(s-n)}],\ s=n+1,\dots,$$

де $\rho > 0$ — деяке число (буде уточнено нижче) і $[c]$ — ціла частина числа $c \in \mathbb{R}$. Нехай $m = C(\rho)2^{nd}$, де $C(\rho) > 0$ — достатньо велика стала. Тоді покладемо

$$m_0 := m_1 + \sum_{s=n+1}^{\infty} m_s$$

і отримаємо

$$m_0 = m_1 + \sum_{s=n+1}^{\infty} m_s \ll 2^{d(n+1)} + \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{nd} \cdot 2^{-\rho(s-n)} =$$

$$= 2^{d(n+1)} + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{nd-\rho j} \ll 2^{d(n+1)} + 2^{nd-\rho} \ll m.$$

Зрозуміло також, що існує $\lambda = \lambda(\rho) > 1$ таке, що $m_s = 0$ при $s > s_0 := [\lambda n] + 1$ і $m_s \geq 1$ при $n + 1 \leq s \leq s_0$.

Позначимо через $S_{2^n}(f, \cdot)$ кратну суму Фур'є функції $f \in L_1$,

$$S_{2^n}(f) = \sum_{k \in C^d(2^n)} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

яку природно назвати кубічною сумою Фур'є функції f.

Оскільки для функції $f \in H_2^{\Omega}$ має місце зображення

$$f = S_{2^{n-1}}(f) + \sum_{s=n+1}^{\infty} f_s,$$

а також справедливі порядкові співвідношення

$$\|f_s\|_2 \ll \Omega(2^{-s}),$$

$$\|f_s\|_2 \asymp \|\Phi_s(f)\|_2,$$

то, згідно з вибором чисел m і n, можемо записати оцінку

$$d_m(H_2^{\Omega}, L_\infty) \ll \sum_{s=n+1}^{s_0} \Omega(2^{-s}) d_{m_s}(T(C^d(2^s))_2, L_\infty) +$$

$$+ \sum_{s=s_0+1}^{\infty} \Omega(2^{-s}) d_0(T(C^d(2^s))_2, L_\infty). \tag{10}$$

Далі для оцінки першого доданка правої частини (10) застосуємо терему Б. Продовжимо оцінку

$$d_m(H_2^{\Omega}, L_\infty) \ll \sum_{s=n+1}^{s_0} \Omega(2^{-s}) \left(\frac{2^{sd}}{2^{nd-\rho(s-n)}} \right)^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{1}{2}} \frac{e 2^{sd}}{2^{nd-\rho(s-n)}} +$$

$$+\sum_{s=s_0+1}^{\infty} 2^{\frac{sd}{2}}\Omega(2^{-s}) = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2. \tag{11}$$

Оцінимо спочатку величину $\mathcal{I}_1$. Оскільки функція Ω належить $\Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \dfrac{d}{2}$, то, вибравши ρ так, що $\alpha - \dfrac{d}{2} - \rho > 0$, матимемо

$$\mathcal{I}_1 \ll \sum_{s=n+1}^{s_0} \frac{\Omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}} 2^{-\alpha s} 2^{\frac{sd}{2}-\frac{nd}{2}+\frac{\rho}{2}(s-n)} \log^{\frac{1}{2}} \frac{e2^{sd}}{2^{nd-\rho(s-n)}} \ll$$

$$\ll \frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-\frac{nd}{2}-\frac{\rho n}{2}} \sum_{s=n+1}^{s_0} 2^{-s(\alpha-\frac{d}{2}-\frac{\rho}{2})} \ll \frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-\frac{nd}{2}-\frac{\rho n}{2}} 2^{-n(\alpha-\frac{d}{2}-\frac{\rho}{2})} =$$

$$= \Omega(2^{-n}) \asymp \Omega(m^{-\frac{1}{d}}). \tag{12}$$

Для оцінки величини $\mathcal{I}_2$ можемо записати

$$\mathcal{I}_2 = \sum_{s=s_0+1}^{\infty} \frac{\Omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}} 2^{-s(\alpha-\frac{d}{2})} \ll \frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{s=s_0+1}^{\infty} 2^{-s(\alpha-\frac{d}{2})} = \frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{s=[\lambda n]+2}^{\infty} 2^{-s(\alpha-\frac{d}{2})} \ll$$

$$\ll \frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-([\lambda n]+1)(\alpha-\frac{d}{2})} \ll \frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-\alpha n} = \Omega(2^{-n}). \tag{13}$$

Взявши до уваги (12) та (13), з (11) будемо мати

$$d_m(H^{\Omega}_2, L_\infty) \ll \Omega(m^{-\frac{1}{d}}).$$

Звідси у випадку $2 \le p < q \le \infty$ отримаємо

$$d_m(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \ll d_m(H^{\Omega}_2, L_\infty) \ll \Omega(m^{-\frac{1}{d}}). \tag{14}$$

При $1 \le p < 2 < q \le \infty$, згідно з лемою A, справедливе вкладення

$$B^{\Omega}_{p,\theta} \subset B^{\Omega_1}_{2,\theta},$$

де $\Omega_1(t) = \Omega(t)/t^{d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}$. Тому з (14) можемо записати

$$d_m(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \ll d_m(B^{\Omega_1}_{2,\theta}, L_\infty) \asymp \Omega_1(m^{-\frac{1}{d}}) = \Omega(m^{-\frac{1}{d}}) m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

Отже, оцінки зверху в (9) встановлено.

Оцінки знизу отримаємо, скориставшись оцінками найкращих білінійних наближень функцій із класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$. З цією метою проведемо деякі попередні міркування (див., наприклад, [13, с. 85]).

Нехай F — деякий клас функцій і $f(x)$ — фіксована функція з F. Позначимо через F_f множину, що складається з функцій вигляду $f(x-y)$, які отримуються з $f(x)$ зсувом аргумента $x \in \pi_d$ на довільний вектор $y \in \pi_d$, тобто

$$F_f = \big\{ f(x-y),\ y \in \pi_d, f \in F \big\}.$$

Тоді, з одного боку, згідно з визначенням колмогоровського поперечника, можемо записати

$$d_m(F_f, L_q) = \inf_{u_i(x)} \sup_{y \in \pi_d} \inf_{v_i(y)} \left\| f(\cdot - y) - \sum_{i=1}^{m} u_i(\cdot) v_i(y) \right\|_q \le \inf_{\substack{u_i(x),\ v_i(y) \\ i=\overline{1,m}}} \sup_{y \in \pi_d} \Bigg\| f(\cdot - y) -$$

$$- \sum_{i=1}^{m} u_i(\cdot) v_i(y) \Bigg\|_q = \inf_{\substack{u_i(x),\ v_i(y) \\ i=\overline{1,m}}} \left\| f(x-y) - \sum_{i=1}^{m} u_i(x) v_i(y) \right\|_{q,\infty} = \tau_m(f(x-y))_{q,\infty}. \quad (15)$$

З іншого боку, виконується також нерівність

$$\tau_m(f(x-y))_{q,\infty} \le d_m(F_f, L_q). \quad (16)$$

Отже, відповідно до (15) і (16) має місце рівність

$$\tau_m(f(x-y))_{q,\infty} = d_m(F_f, L_q). \quad (17)$$

Тепер, оскільки $F_f \subset F$, то згідно з (17) можемо записати

$$\tau_m(f(x-y))_{q,\infty} \ll d_m(F, L_q), \quad f \in F. \quad (18)$$

Таким чином, для функціонального класу F, інваріантного відносно зсуву аргумента функції $f \in F$, величини $\tau_m(f(x-y))_{q,\infty}$, $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$, можуть слугувати оцінками знизу для поперечників $d_m(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$.

Далі скористаємось відомими оцінками щодо найкращих білінійних наближень відповідних функцій із класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які отримано в роботі [20].

Нехай спочатку має місце випадок $1 \le p \le q \le 2$. Розглянемо функцію

$$f_1(x) = C_7 \Omega(2^{-n}) 2^{-nd(1-\frac{1}{p})} V_{2^{n+2}}(x), \quad C_7 > 0.$$

У статті [20] встановлено, що з відповідною сталою $C_7 > 0$ $f_1 \in B^{\Omega}_{p,\theta}$ і, крім цього,

$$\tau_m(f_1(x-y))_{q,\infty} \gg \Omega(m^{-\frac{1}{d}}) m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Таким чином, згідно з (18) для $1 \le p \le q \le 2$ отримаємо

$$d_m(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \gg \tau_m(f_1(x-y))_{q,\infty} \gg \Omega(m^{-\frac{1}{d}}) m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Оцінки знизу для поперечників $d_m(B^{r}_{p,\theta}, L_q)$ для інших співвідношень між параметрами p і q встановлюються аналогічно, з використанням оцінок білінійних наближень відповідних функцій, які розглянуто в роботі [20].

Теорему доведено.

Зауваження. Якщо $\Omega(t) = t^r$, $r > 0$, то при певних додаткових обмеженнях на параметр r з (9) отримаємо відповідні оцінки для колмогоровських поперечників $d_m(B^r_{p,\theta}, L_q)$, які встановлено в [21].

У роботі [8] було встановлено оцінки для колмогоровських поперечників $d_m(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$, які містяться в теоремі 1, але для більш вузького (а в деяких випадках для іншого) спектра гладкісного параметра α.

Крім цього, слід зазначити, що при встановленні оцінок поперечників в теоремі 1 (як зверху, так і знизу) використано методи, що принципово відрізняються від тих, які використовувались у роботі [8].

1. *Бернштейн С. Н.* Конструктивная теория функций (1931 – 1953): Собр. соч. – М.: Изд-во АН СССР, 1954. – Т. 2. – 626 с.
2. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 483 – 522.
3. *Бесов О. В.* О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения // Докл. АН СССР. – 1959. – **126**, № 6. – С. 1163 – 1165.
4. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1951. – **38**. – С. 244 – 278.
5. *Гольдман М. Л.* Теоремы вложения для анизотропных пространств Никольского – Бесова с модулями непрерывности общего вида // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1984. – **170**. – С. 84 – 106.
6. *Калябин Г. А.* Теоремы вложения для обобщенных пространств Бесова и Лиувилля // Докл. АН СССР. – 1977. – **232**, № 6. – С. 1245 – 1248.
7. *Li Yongping, Xu Guiqiao.* The infinite-dimensional widths and optimal recovery of generalized Besov classes // J. Complexity. – 2002. – **18**, № 4. – P. 815 – 832.
8. *Xu Guiqiao.* The n-wigths for a generalized periodic Besov classes // Acta Math. Sci. – 2005. – **25B**, № 4. – P. 663 – 671.
9. *Стасюк С. А.* Приближение классов $B^{\omega}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных полиномами со спектром в кубических областях // Мат. студ. – 2011. – **35**, № 1. – С. 66 – 73.
10. *Войтенко С. П.* Найкращі M-членні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 9. – С. 1189 – 1199.
11. *Войтенко С. П.* Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 11. – С. 1473 – 1484.
12. *Kolmogoroff A.* Über die beste Annaherung von Functionen einer gegeben Functionenclasse // Ann. Math. – 1936. – **37**. – P. 107 – 111.
13. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – С. 1 – 112.
14. *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic functions. – New York: Nova Sci. Publ. Inc., 1993. – 419 p.
15. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
16. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
17. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 307 с.
18. *Тихомиров В. М.* Теория приближений // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. математики. Фундам. направления / ВИНИТИ. – 1987. – **14**. – С. 103 – 260.
19. *Jakson D.* Certain problem of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. – 1933. – **39**. – P. 889 – 906.
20. *Соліч К. В.* Білінійні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – **7**, № 1. – С. 325 – 337.
21. *Романюк А. С.* Билинейные приближения и колмогоровские поперечники периодических классов Бесова // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – **6**, № 1. – С. 222 – 236.

Одержано 05.04.12