УДК 517.5

**Ю. С. Коломойцев** (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

# ОБОБЩЕНИЕ ОДНОГО ДОСТАТОЧНОГО УСЛОВИЯ ДЛЯ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ ФУРЬЕ

We obtain new sufficient conditions for Fourier multipliers in the Hardy spaces $H_p(\mathbb{R}^n)$, $0 < p < 2$. These conditions are given in terms of the simultaneous behavior of a function and its derivatives. The results of this paper generalize the corresponding theorems of A. Miachi.

Отримано нові достатні умови для мультиплікаторів Фур'є у просторах Харді $H_p(\mathbb{R}^n)$, $0 < p < 2$. Ці умови дано в термінах спільної поведінки функції та її похідних. Результати цієї статті є узагальненням відповідних теорем А. Міячі.

**1. Введение.** В работе [1] А. Миячи доказал следующее достаточное условие для мультипликаторов Фурье, учитывающее совместное поведение функции и ее частных производных.

**Теорема А.** *Пусть* $0 < p < 2$, $a \ge 0$, $b \ge 0$ *и* $r = \max\left\{\left[n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)\right]+1, \left[\frac{n}{2}\right]+1\right\}$. *Предположим, что* $m \in W^{2,\,r}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $m(\xi) = 0$ *в окрестности нуля и удовлетворяет следующим неравенствам*:

$$|m(\xi)| \le C|\xi|^{-b} \quad \text{и} \quad \left(R^{-n}\int\limits_{R<|x|<2R}|D^\nu m(x)|^2dx\right)^{1/2} \le CR^{-b}R^{(a-1)|\nu|_1}$$

*для всех* $0 \le |\nu|_1 \le r$ *и* $R > 0$. *Тогда если* $an\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right) = b$, *то* $m$ *является мультипликатором Фурье в пространстве* $H_p(\mathbb{R}^n)$.

Аналогичная теорема имеет место также для функций $m$, имеющих компактный носитель (см. теоремы $1'$, $1''$ и $2''$ в [1]). Отметим, что подобные достаточные условия для мультипликаторов в аналитических пространствах Харди $H_p$, $0 < p \le 1$, в различных областях в $\mathbb{C}^n$ исследовались в работах [2 – 5].

Точность теоремы А можно проверить, например, использовав известную функцию-мультипликатор

$$m_{a,\,b}(\xi) = \theta(\xi)\frac{e^{i|\xi|^a}}{|\xi|^b}, \quad a > 0, \quad b > 0, \tag{1}$$

где $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\theta(\xi) = 0$ при $|x| < 1$ и $\theta(\xi) = 1$ при $|x| \ge 2$. Известно (см. [1, 6, 7], а также [8], гл. IV, § 7.4), что функция $m_{a,\,b}$ при $a \ne 1$ является мультипликатором в пространстве $H_p(\mathbb{R}^n)$, $0 < p < 2$, если и только если $\frac{b}{a} \ge n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)$.

Заметим, что достаточные условия в терминах совместного поведения функции и ее производных для мультипликаторов Фурье в пространствах $L_1$ ($C$ или $L_\infty$) появились совсем недавно (см., например, работы [9, 10] и обзор [11], раздел 10). В частности, в [9] (см. также работу [10], в которой получены более общие достаточные условия) было показано, что локально абсолютно непрерывная на $\mathbb{R}$ функция $m$ является мультипликатором в $L_1(\mathbb{R})$, если при $|x| \to \infty$

$$|m(x)| = O\left(\frac{1}{|x|^{\gamma_0}}\right), \quad \gamma_0 > 0, \quad |m'(x)| = O\left(\frac{1}{|x|^{\gamma_1}}\right) \quad \gamma_1 \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

и $\gamma_0 + \gamma_1 > 1$. При этом если $\gamma_0 + \gamma_1 \le 1$, то такая функция $m$ уже может не быть мультипликатором в $L_1(\mathbb{R})$, по крайней мере, если $\gamma_0 \ne 1/2$, $\gamma_1 \ne 1/2$ (по поводу точности условий см. также [1] (лемма 4) и [6] (теорема 9)). Как видно из теоремы A, функция $m$, удовлетворяющая оценкам (2), является мультипликатором в $H_1(\mathbb{R})$, если $\gamma_0 + \gamma_1 \ge 1$.

Цель настоящей статьи — получить обобщения приведенного выше достаточного условия А. Миячи. В частности, мы покажем, что требование степенного убывания функции $m$ и $L_2$-средних ее частных производных в теореме A можно убрать, что по существу расширяет класс исследуемых функций $m$.

**2. Основные обозначения.** Пусть $\mathbb{R}^n$ — $n$-мерное евклидово пространство элементов $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ со скалярным произведением $(x, \xi) = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$ и нормой $|x| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$. Как обычно, пространство $L_p(\mathbb{R}^n)$ состоит из измеримых функций $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, для которых при $0 < p < \infty$

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

а при $p = \infty$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| < \infty.$$

Мы используем стандартные обозначения для пространства распределений умеренного роста $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и для соответствующего пространства пробных функций $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Вещественные пространства Харди $H_p(\mathbb{R}^n)$, $0 < p < \infty$, определяют как класс умеренных распределений $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ таких, что

$$\|f\|_{H_p} = \big\| \sup_{t>0} |\varphi_t * f(x)| \big\|_p < \infty,$$

где $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx \ne 0$ и $\varphi_t(x) = t^{-n}\varphi(x/t)$.

Известно, что если $1 < p < \infty$, то $H_p(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n)$ с эквивалентными нормами (см. [7]).

Преобразование Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ определим стандартным образом:

$$\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(\xi, x)} dx,$$

положим также $\mathcal{F}^{-1}f(\xi) = \mathcal{F}f(-\xi)$.

Функцию $m$ называют мультипликатором Фурье в $H_p(\mathbb{R}^n)$ (пишут $m \in \mathcal{M}(H_p)$), если оператор

$$T \,:\, \mathcal{F}(Tf)(x) = m(x)\widehat{f}(x), \quad f \in H_p(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n),$$

можно продолжить до линейного ограниченного оператора на всем $H_p(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс с неотрицательными координатами, тогда

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|_1} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Частную производную порядка $r \in \mathbb{N}$ по переменной $x_i$ обозначим через $D_i^r f(x) = \dfrac{\partial^r}{\partial x_i^r} f(x)$.

Будем говорить, что функция $m$ принадлежит классу $AC^r_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, если $m \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ и частные производные $D_i^{r-1} m$ для всех $i = 1, \ldots, n$ локально абсолютно непрерывны на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ по каждой переменной.

Шар радиуса $R$ с центром в нуле обозначим символом $B_R := \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| < R\}$. Положим также $V_j = B_{2^{j+1}} \setminus B_{2^{j-1}}$. Буквой $C$ будем обозначать положительные постоянные, зависящие от указанных параметров, а буквой $A$ — некоторые конечные постоянные.

**3. Формулировка основных результатов.**

**Теорема 1.** *Пусть* $0 < p < 1$, $r > n(1/p - 1/2)$ *и* $m \in AC^r_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. *Если*

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}} \left( \frac{1}{2^{nj}} \int\limits_{V_j} |m(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2} - \frac{n}{2r}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)} \left( \frac{1}{2^{nj}} \int\limits_{V_j} |2^{sj} D_i^s m(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{n}{2r}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)} \le A \tag{3}$$

*для всех* $s = 0, \ldots, r$ *и* $i = 1, \ldots, n$, *то* $m \in \mathcal{M}(H_p)$.

Отметим, что при $p = 1$ теорема 1 неверна (см. ниже предложение 1). Однако при более сильном условии вида (3) имеет место следующий аналог данной теоремы.

**Теорема 2.** *Пусть* $1 \le p < 2$, $r > n/2$ *и* $m \in AC^r_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. *Если*

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}} \left( \sup_{\xi \in V_j} |m(\xi)| \right)^{1 - \frac{n}{r}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)} \left( \frac{1}{2^{nj}} \int\limits_{V_j} |2^{sj} D_i^s m(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{n}{2r}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)} \le A \tag{4}$$

*для всех* $s = 0, \ldots, r$ *и* $i = 1, \ldots, n$, *то* $m \in \mathcal{M}(H_p)$.

Прежде чем перейти к доказательству основных результатов, сделаем несколько замечаний.

**1.** Точность условий (3) и (4) в приведенных выше теоремах можно проверить, использовав функцию (1). В частности, при $\lambda < \dfrac{n}{r}\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{2}\right)$ условие

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}} \left( \sup_{\xi \in V_j} |m(\xi)| \right)^{1 - \lambda} \left( \frac{1}{2^{nj}} \int\limits_{V_j} |2^{sj} D_i^s m(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{\lambda}{2}} \le A,$$

где $s = 0, \ldots, r$, а $i = 1, \ldots, n$, не является достаточным для того, чтобы $m \in \mathcal{M}(H_p)$, $0 < p < 2$.

**2.** В качестве примера рассмотрим функцию

$$m^*_{a,\,b}(\xi) = \theta(\xi) \frac{e^{ie^{a|\xi|}}}{e^{b|\xi|}}.$$

Если $ra > b > 0$, то частные производные $D_i^r m^*_{a,b}$ экспоненциально возрастают на бесконечности и, следовательно, теорема A уже не применима для исследования данной функции. В то же время, используя теоремы 1 и 2, нетрудно проверить, что $m^*_{a,b} \in \mathcal{M}(H_p)$, $0 < p < 2$, если

$$b\left(1+\frac{n}{r}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)\right) > 2an\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right) \quad \text{и} \quad r = \max\left\{\left[n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)\right]+1, \left[\frac{n}{2}\right]+1\right\}.$$

**3.** В некоторых случаях использование $L_\infty$-нормы в (4) является слишком сильным ограничением. При некотором видоизменении условия (4) $L_\infty$-норму произведения $m\eta_j$ можно заменить $L_2$-нормой. Так, применяя теорему 2.2 из [12], в которой показано, что $m \in \mathcal{M}(H_1)$, если $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \|\mathcal{F}(m\eta_j)\|_1^2 < \infty$, а также используя аналог известной теоремы Берлинга об абсолютной интегрируемости интеграла Фурье (см., например, [11], теоремы 6.3 и 9.2), получаем следующее достаточное условие для мультипликаторов в $H_1(\mathbb{R}^n)$.

**Теорема 3.** *Пусть $r > n/2$ и $m \in AC^r_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Если*

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{nj}}\int\limits_{V_j}|m(\xi)|^2 d\xi\right)^{1-\frac{n}{2r}}\left(\frac{1}{2^{nj}}\int\limits_{V_j}|2^{sj}D_i^s m(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{n}{2r}} \le A \tag{5}$$

*для всех $s = 0, \ldots, r$ и $i = 1, \ldots, n$, то $m \in \mathcal{M}(H_1)$.*

**4. Доказательства теорем 1 и 2.** ***Доказательство теоремы* 1** основано на схеме доказательства теоремы 1 из работы [1].

Нам понадобятся две вспомогательные леммы, дающие описание пространства $H_p(\mathbb{R}^n)$ с помощью атомного разложения и преобразования Рисса.

Напомним, что функция $f$ называется $p$-атомом, если существует шар $B \subset \mathbb{R}^n$ такой, что $\operatorname{supp} f \subset B$, $\|f\|_\infty \le |B|^{-1/p}$ ($|B|$ — мера Лебега шара $B$) и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)x^\alpha dx = 0, \quad |\alpha|_1 \le [n(1/p-1)]. \tag{6}$$

**Лемма 1** (см. [13], теорема A). *Пусть $0 < p \le 1$. Тогда $f$ принадлежит $H_p(\mathbb{R}^n)$, если и только если $f$ можно представить в виде сходящегося в $H_p(\mathbb{R}^n)$ ряда*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k f_k(x), \tag{7}$$

*где $f_k$ — $p$-атом, а $\sum_{k=0}^{\infty}|\lambda_k|^p < \infty$. Более того,*

$$C^{-1}\|f\|_{H_p} \le \inf\left\{\left(\sum_k |\lambda_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\} \le C\|f\|_{H_p},$$

*где инфимум берется по всем представлениям функции $f$ в виде* (7), *а постоянная $C$ зависит только от $p$ и $n$.*

Приведем теперь характеризацию пространства $H_p(\mathbb{R}^n)$ с помощью преобразования Рисса. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс с неотрицательными координатами, положим

$$\mathcal{R}_\alpha f = \mathcal{F}^{-1}\left(\left(\frac{-i\xi}{|\xi|}\right)^\alpha \widehat{f}(\xi)\right), \quad f \in L_2(\mathbb{R}^n).$$

**Лемма 2** (см. [1], теорема B). *Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $p > (n-1)/(n-1+k)$. Тогда $f$ принадлежит $L_2(\mathbb{R}^n) \cap H_p(\mathbb{R}^n)$, если и только если $\mathcal{R}_\alpha f \in L_2(\mathbb{R}^n) \cap L_p(\mathbb{R}^n)$ для всех $|\alpha|_1 \le k$, и*

$$C^{-1}\|f\|_{H_p} \le \sum_{|\alpha|_1 \le k} \|\mathcal{R}_\alpha f\|_p \le C\|f\|_{H_p}, \quad f \in L_2(\mathbb{R}^n) \cap H_p(\mathbb{R}^n),$$

*где постоянная $C$ зависит только от $p$, $k$ и $n$.*

Пусть $\mathcal{A}_R$, $0 < R < \infty$, — множество функций $f$, для которых имеет место (6), $\operatorname{supp} f \subset B_R$ и $\|f\|_\infty \le R^{-\frac{n}{p}}$. Используя леммы 1 и 2, а также учитывая инвариантность относительно сдвига оператора $T$, убеждаемся, что для доказательства теоремы 1 достаточно проверить неравенство $\|Tf\|_p \le C$ для всех функций $f \in \mathcal{A}_R$, $0 < R < \infty$ (подробнее см. в [1, с. 160, 161]).

Итак, пусть $f \in \mathcal{A}_R$, тогда $\|f\|_2 \le CR^{-\frac{n}{p}+\frac{n}{2}}$. Применяя последовательно неравенство Гельдера и теорему Планшереля, получаем оценку $\|Tf\|_{L_p(B_{2R})} \le C\|m\|_\infty$. Таким образом, остается только доказать неравенство $\|Tf\|_{L_p(\mathbb{R}^n \setminus B_{2R})} \le CA$, где $C$ — постоянная, зависящая только от $p$ и $n$.

Всюду далее для удобства положим

$$m_j(\xi) = m(\xi)\eta(2^{-j}\xi),$$

где $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}\eta \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 1/2 \le |\xi| \le 2\}$, $0 \le \eta(\xi) \le 1$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \eta(2^{-j}\xi) \equiv 1, \quad \xi \ne 0.$$

Пусть $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — произвольный мультииндекс с неотрицательными целыми координатами. Используя формулу Лейбница, а также учитывая принадлежность функции $m$ пространству $AC^r_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, находим

$$\|D_i^r(\xi^\beta m_j(\xi))\|_2 \le C2^{j|\beta|_1}\|D_i^r m_j\|_2. \tag{8}$$

Здесь и ниже постоянные $C$ зависят только $p$, $n$ и $r$.

Не теряя общности, далее можно считать, что $m_j \not\equiv 0$ для всех $j \in \mathbb{Z}$. Из (8) и (3) следует неравенство

$$\|H_j^r D_i^r(\xi^\beta m_j(\xi))\|_2 \le C2^{j|\beta|_1}\|m_j\|_2,$$

где $H_j = \left(A^{-1}2^{jn(\frac{1}{p}-1)}\|m_j\|_2\right)^{\frac{1}{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}}$, из которого после применения теоремы Планшереля получаем

$$\|g_j(x)D^\beta K_j(x)\|_2 \le C2^{j|\beta|_1}\|m_j\|_2,$$

где $K_j = \mathcal{F}^{-1}m_j$ и $g_j(x) = (1 + H_j|x|)^r$.

Далее, используя неравенство Минковского, имеем

$$\left\|\frac{1}{R^n}\int\limits_{B_R}\int\limits_0^1 |g_j(x-ty)D^\beta K_j(x-ty)|dtdy\right\|_2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{R^n}\int\limits_{B_R}\int\limits_0^1 \|g_j(x-ty)D^\beta K_j(x-ty)\|_2 dtdy \leq C2^{j|\beta|_1}\|m_j\|_2.$$

Учитывая, что при $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{2R}$, $y \in B_R$ и $t \in (0,1)$ выполняются неравенства $|x|/2 \leq \leq |x-ty| \leq 2|x|$, а также применяя неравенство Гельдера, находим

$$\left\|\frac{1}{R^n}\int\limits_{B_R}\int\limits_0^1 |D^\beta K_j(x-ty)|dtdy\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n\setminus B_{2R})} \leq$$

$$\leq C\left\|\frac{1}{g_j(x)R^n}\int\limits_{B_R}\int\limits_0^1 |g_j(x-ty)D^\beta K_j(x-ty)|dtdy\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n\setminus B_{2R})} \leq$$

$$\leq C\left\|\frac{1}{g_j(x)}\right\|_{\frac{2p}{2-p}}\left\|\frac{1}{R^n}\int\limits_{B_R}\int\limits_0^1 |g_j(x-ty)D^\beta K_j(x-ty)|dtdy\right\|_2 \leq$$

$$\leq C(H_j)^{-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}2^{j|\beta|_1}\|m_j\|_2 = CA2^{j(|\beta|_1-n(\frac{1}{p}-1))}. \tag{9}$$

Аналогично получаем

$$\left\|\frac{1}{R^n}\int\limits_{B_R}|K_j(x-y)|dy\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n\setminus B_{2R})} \leq CA2^{-jn(\frac{1}{p}-1)}. \tag{10}$$

Далее, учитывая, что $f \in \mathcal{A}_R$ является ортогональной ко всем полиномам порядка не выше $N=[n(1/p-1)]$, по формуле Тейлора имеем

$$T_jf(x) = \int\limits_{B_R} K_j(x-y)f(y)dy =$$

$$= \int\limits_{B_R}\left(K_j(x-y) - \sum_{|\beta|\leq N}\frac{1}{\beta!}D^\beta K_j(x)(-y)^\beta\right)f(y)dy =$$

$$= (N+1)\sum_{|\beta|=N+1}\int\limits_{B_R}\int\limits_0^1 (1-t)^N\frac{1}{\beta!}D^\beta K_j(x)(-y)^\beta f(y)dtdy.$$

Следовательно,

$$|T_j f(x)| \leq CR^{-\frac{n}{p}} \int\limits_{B_R} |K_j(x-y)| dy$$

и

$$|T_j f(x)| \leq CR^{-\frac{n}{p}+N+1} \sum_{|\beta|=N+1} \int\limits_{B_R} \int\limits_0^1 |D^\beta K_j(x-ty)| dt dy.$$

Отсюда, применяя оценки (9) и (10), непосредственно получаем

$$\|T_j f\|_{L_p(\mathbb{R}^n \setminus B_{2R})} \leq \begin{cases} CA(R2^j)^{-n(\frac{1}{p}-1)}, \\ CA(R2^j)^{N+1-n(\frac{1}{p}-1)}. \end{cases} \tag{11}$$

Наконец, оценим норму $\|Tf\|_{L_p(\mathbb{R}^n \setminus B_{2R})}$. Выберем $j_R \in \mathbb{Z}$ так, чтобы $2^{j_R} R \asymp 1$. Применяя оценки (11), находим

$$\|Tf\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n \setminus B_{2R})} \leq \sum_{j=-\infty}^{j_R} \|T_j f\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n \setminus B_{2R})} + \sum_{j=j_R+1}^{\infty} \|T_j f\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n \setminus B_{2R})} \leq$$

$$\leq CA \left( \sum_{j=-\infty}^{j_R} (R2^j)^{Np+p-n(1-p)} + \sum_{j=j_R+1}^{\infty} (R2^j)^{-n(1-p)} \right) \leq$$

$$\leq CA \left( (R2^{j_R})^{Np+p-n(1-p)} + (R2^{j_R})^{-n(1-p)} \right) \leq CA.$$

Теорема 1 доказана.

***Доказательство теоремы* 2** основано на методе аналитической интерполяции (см., например, [14, с. 151, 152] или [15, с. 597] вместе с леммой 2).

Выбирая $0 < q < 1$ так, чтобы $\left[ n \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{2} \right) \right] + 1 = r$, полагаем

$$\widetilde{m}_z(\xi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|m\chi_{V_j}\|_\infty^{\varepsilon-(1+\varepsilon)z} m(\xi) \chi_{V_j}(\xi), \quad 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1,$$

где $\varepsilon = (1/q - 1/p)/(1/p - 1/2)$, а $\chi_E$ — характеристическая функция множества $E$.

Из определения функции $\widetilde{m}_z$ видно, что $|\widetilde{m}_{1+iy}(\xi)| \leq 4$ и, следовательно, $\widetilde{m}_{1+iy} \in \mathcal{M}(L_2)$. Выполняя простые вычисления и используя при этом неравенства (4), нетрудно проверить, что

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}} \left( \sup_{\xi \in V_j} |\widetilde{m}_{iy}(\xi)| \right)^{1-\frac{n}{r}(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})} \left( \frac{1}{2^{nj}} \int\limits_{V_j} |2^{sj} D_i^s \widetilde{m}_{iy}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{n}{2r}(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})} \leq A$$

для всех $s = 0, \ldots, r$ и $i = 1, \ldots, n$. Отсюда, используя теорему 1, имеем $\widetilde{m}_{iy} \in \mathcal{M}(H_q)$.

Таким образом, учитывая, что $1/p = (1-\theta)/q + \theta/2$, где $\theta = \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$, а также применяя теорему (см. [14] (теорема 3.4) или [15] (теорема E) о комплексной интерполяции для аналитического семейства операторов $\widetilde{T}_z$, $\widetilde{T}_z f = \mathcal{F}^{-1}(\widetilde{m}_z \widehat{f})$, получаем $m = \widetilde{m}_\theta \in \mathcal{M}(H_p)$.

Теорема 2 доказана.

В заключение покажем, что при $p = 1$ теорема 1 неверна.

**Предложение 1.** *Пусть $r > n/2$. Существует функция $m \in AC^r_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ такая, что*

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}} \left( \frac{1}{2^{nj}} \int\limits_{V_j} |m(\xi)|^2 d\xi \right)^{1-\frac{n}{2r}} \left( \frac{1}{2^{nj}} \int\limits_{V_j} |2^{sj} D_i^s m(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{n}{2r}} \le A \tag{12}$$

*для всех $s = 0, \ldots, r$ и $i = 1, \ldots, n$, но $m \notin \mathcal{M}(H_1)$.*

***Доказательство.*** Пусть функция $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\operatorname{supp}\psi \subset B_1$ и $\psi(\xi) = 1$ при $\xi \in B_{1/2}$. Положим

$$m(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-\rho} \psi(2^{k_j}(\xi - 2^{k_j} e_1)),$$

где $k_j = 10^j$, а $e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Легко видеть, что данная функция удовлетворяет условию (12) при любом $\rho > 0$. Однако, как было показано в доказательстве теоремы 3.1 работы [12], функция $m$ при $\rho < 1/2$ не является мультпликатором в $H_1(\mathbb{R}^n)$.


1. *Miyachi A.* On some Fourier multipliers for $H^p(\mathbb{R}^n)$ // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. IA. Math. – 1980. – **27**. – P. 157 – 179.
2. *Тригуб Р. М.* Мультипликаторы в пространстве Харди $H_p(D^m)$ при $p \in (0, 1]$ и аппроксимативные свойства методов суммирования степенных рядов // Мат. сб. – 1997. – **188**, № 4. – С. 145 – 160.
3. *Волчков Вит. В.* Мультипликаторы степенных рядов на областях Рейнхарта и их применение // Доп. НАН України. – 1997. – № 4. – С. 22 – 26.
4. *Волчков Вит. В.* О мультипликаторах степенных рядов в пространствах Харди // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 4. – С. 585 – 587.
5. *Tovstolis A. V.* Fourier multipliers in Hardy spaces in tube domains over open cones and their applications // Meth. Funct. Anal. and Top. – 1998. – **4**, № 1. – P. 68 – 89.
6. *Wainger S.* Special trigonometric series in $k$ dimensions // Mem. Amer. Math. Soc. – 1965. – **59**. – 102 p.
7. *Fefferman Ch., Stein E.M.* $H^p$ spaces of several variables // Acta Math. – 1972. – **129**. – P. 137 – 193.
8. *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – М.: Мир, 1973. – 342 с.
9. *Тригуб Р. М.* О мультипликаторах Фурье и абсолютной сходимости интегралов Фурье радиальных функций // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 9. – С. 1280 – 1293.
10. *Liflyand E., Trigub R.* Conditions for the absolute convergence of Fourier integrals // J. Approxim. Theory. – 2011. – **163**, № 4. – P. 438 – 459.
11. *Liflyand E., Samko S., Trigub R.* The Wiener algebra of absolutely convergent Fourier integrals: an overview // Anal. Math. Phys. – 2012. – **2**, № 1. – P. 1 – 68.
12. *Onneweer C.W., Quek T.S.* On $H^p(\mathbb{R}^n)$-multipliers of mixed-norm type // Proc. Amer. Math. Soc. – 1994. – **121**, № 2. – P. 543 – 552.
13. *Latter R. H.* A characterization of $H^p(\mathbb{R}^n)$ in terms of atoms // Stud. Math. – 1978. – **62**. – P. 93 – 101.
14. *Calderon A.P., Torchinsky A.* Parabolic maximal functions associated with a distribution. II // Adv. Math. – 1977. – **24**. – P. 101 – 171.
15. *Coifman R. R., Weiss G.* Extensions of Hardy spaces and their use in analysis // Bull. Amer. Math. Soc. – 1977. – **83**, № 4. – P. 569 – 645.


Получено 30.05.12,
после доработки — 02.08.12