УДК 517.5

Ю. И. Волков

Кратные последовательности многомерных линейных положительных операторов

Основная цель работы: найти функцию

$$a_m(x) \overset{\text{def}}{=} \varlimsup_{n\to\infty} \sup_{\in C(R^m)} (\omega(f;\ \delta_n)^{-1} \,|\, L_n(f;\ x) - f(x)\,|),$$

где $\{L_n\}$ — m-кратная последовательность аппроксимационных операторов класса B [I], $x \in X$ — область определения значений операторов L_n, $n = (n_1, \ldots, n_m) \in N_+^m$, $\delta_n = \max\{n_1^{-1/2}, \ldots, n_m^{-1/2}\}$, $C(R^m)$ — множество функций равномерно непрерывных на R^m, $f \neq \text{const}$, ω — модуль непрерывности функции f.

1. Двустороннее преобразование Лапласа мер. Пусть на измеримом пространстве $(R^m, \mathfrak{B})$, $\mathfrak{B}$—σ-алгебра борелевских множеств в R^m, задана мера Лебега—Стилтьеса μ. Если существует функция комплексного вектора $z = (z_1, \ldots, z_m)$ $u(z) = \int \exp(-zt')\,\mu(dt)$, аналитическая в полицилиндре $Z = \{z : (\operatorname{Re} z_1, \ldots, \operatorname{Re} z_m) \in S\}$, где S некоторая область в R^m, $zt' = z_1t_1 + \ldots + z_mt_m$, $t = (t_1, \ldots, t_m) \in R^m$, то она называется двусторонним m-мерным преобразованием Лапласа (дв. п. Л.) меры μ и пишется $\mu \risingdotseq u(z)$.

Определение 1. *Будем говорить, что мера μ принадлежит классу Λ, если вся ее масса не сосредоточена ни в какой гиперплоскости размерности меньше m, и для нее существует двустороннее преобразование Лапласа.*

 Укр. мат. журн., 1984, т. 36, № 3

Если отображение $h: R^m \to R^m$ такое, что $h(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{B}$, то μh — мера, определяемая соотношением $(\mu h)(B) = \mu(h(B))$ для всякого множества $B \in \mathfrak{B}$.

Отметим несколько свойств дв. п. Л. мер.

Свойство 1. *Пусть A — неособая матрица порядка m, x — фиксированный вектор из R^m, отображение $h: R^m \to R^m$ определяется равенством $h(t) = tA + x$, $t \in R^m$, и $\mu \doteqdot u(z)$. Тогда $\mu h \doteqdot u(z(A^{-1})') \exp(z \times (A^{-1}x)')$.*

Свойство 2. *Пусть $s \in R^m$, $W(dt) = \exp(-st')\mu(dt)$. Тогда $W \doteqdot u(z+s)$.*

Свойство 3. *Если $\mu(R^m) < \infty$, то $0 \in Z$, $u(0) = \mu(R^m)$;*

$$\left.\frac{du(z)}{dz}\right|_{z=0} = -\int t\mu(dt) = \left(-\int t_1\mu(dt), \ldots, -\int t_m\mu\ (dt)\right);$$

$$\left.\frac{d^2u(z)}{dz^2}\right|_{z=0} = K = (k_{ij}) = \left(\int t_it_j\mu(dt)\right), \quad i, j = \overline{1, m},$$

и матрица K положительно определена, если $\mu \in \Lambda$.

Свойство 4. *Пусть $\mu \in \Lambda$, $\mu \doteqdot u(z)$. Тогда в области S отображение $x(s) = -(d/ds)\ln u(s)$ обратимо.*

Все эти свойства установлены в [2].

Определение 2. *Функция $\varphi(z, x) = (u(s(x)))^{-1}u(s(x)+z)$, где $s(x)$ отображение, обратное к отображению $x(s)$, $x \in X = x(S)$, $z \in \{z : \operatorname{Re} z + s(x) \in S\}$, называется φ-характеристикой меры μ.*

Заметим, что при каждом фиксированном $x \in X$ φ-характеристика — дв. п. Л. меры $Q(x)$, определяемой соотношением

$$Q(x)(B) = (u(s(x)))^{-1}\int_B \exp(-s(x)t')\mu(dt) \quad \forall B \in \mathfrak{B}.$$

Отсюда

$$\varphi(0, x) = 1; \qquad \frac{d}{dz}\varphi(z, x)|_{z=0} = -x; \tag{1}$$

$$\frac{d^2}{dz^2}(\varphi(z, x)\exp(zx'))|_{z=0} = V, \tag{2}$$

где

$$V = (v_{ij}(x)) = \left(\int (t_i - x_i)(t_j - x_j)Q(x)(dt)\right), \quad i, j = \overline{1, m}. \tag{3}$$

В силу (1) и (2)

$$\varphi(z, x) = 1 - zx' + o(\|z\|), \quad \exp(zx')\varphi(z, x) = 1 + zVz'/2 + o(\|z\|^2),$$

$$z \to 0, \quad \|z\| = (|z_1|^2 + \ldots + |z_m|^2)^{1/2}. \tag{4}$$

2. Мультииндексы. Обозначим: N^m — множество мультииндексов $n = (n_1, \ldots, n_m)$; $|n| = n_1 + \ldots + n_m$; $n! = n_1! \ldots n_m!$; $x^n = x_1^{n_1} \ldots x_m^{n_m}$; если $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$, то запись $\nu \geqslant n$ равносильна тому, что $\nu_1 \geqslant n_1, \ldots, \nu_m \geqslant n_m$; $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_m = (0, \ldots, 0, 1)$; N_+^m — множество мультииндексов с положительными координатами. Говорим: мультииндекс достаточно большой, если достаточно большие все его координаты. Запись $n \to \infty$ означает, что $n_1 \to \infty, \ldots, n_m \to \infty$.

Пусть $A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_m)$ — произвольная диагональная матрица и $b \in R$. Тогда $A^b \overset{\text{def}}{=} \operatorname{diag}(a_1^b, \ldots, a_m^b)$, причем если среди чисел $a_1, \ldots, a_m$ имеются равные нулю, то и соответствующие элементы матрицы A^b считаются нулевыми.

Каждому мультииндексу $n = (n_1, \ldots, n_m)$ поставим в соответствие: перестановку $(j_1, \ldots, j_m)$ такую, что $n_{j_1} \leqslant \ldots \leqslant n_{j_m}$; диагональную матрицу

$A_n = \operatorname{diag}(n_1, \dots, n_m)$; матрицы $A_{nk} = \operatorname{diag}(e_1 + \dots + e_m - e_{j_1} - \dots - e_{j_k}) A_n$, $k = \overline{1, m}$.

Лемма 1. *Если положить* $n_{j_0} = 0$, $A_{n0} = A_n$, *то*

$$\sum_{k=0}^{m-1} (n_{j_{k+1}} - n_{j_k}) A_{nk}^b = A_n^{b+1}; \tag{5}$$

если $T = (t_{ij})$ — *произвольная матрица, то*

$$\sum_{k=0}^{m-1} (n_{j_{k+1}} - n_{j_k}) A_{nk}^b T A_{nk}^b = T_n^{(b)} = (t_{ij}^{(nb)}), \tag{6}$$

где $t_{ij}^{(nb)} = (n_i n_j)^b t_{ij} \min(n_i, n_j)$, $i, j = \overline{1, m}$.

Проверим, например, соотношение (6). Пусть t_{pq} — какой-нибудь элемент матрицы T. Тогда $p = j_r$, $q = j_s$ и если $r \geqslant s$, то $n_p \geqslant n_q$, поэтому $t_{pq}^{(nb)} = n_p^b n_q^b t_{pq} (n_{j_1} + (n_{j_2} - n_{j_1}) + \dots + (n_{j_r} - n_{j_{r-1}})) = (n_p n_q)^b t_{pq} n_p$. Аналогично, если $r < s$, то $t_{pq}^{(nb)} = (n_p n_q)^b t_{pq} n_q$, что и дает (6).

Пример. Пусть $T = I$ — единичная матрица. Тогда $I_n^{(-1/2)} = (\min(n_i^{1/2} n_j^{-1/2}, n_j^{1/2} n_i^{-1/2}))$, $i, j = \overline{1, m}$.

Определение 3. *Последовательность* $\{n\}$, $n \in N_+^m$, *называется* C*-последовательностью, если существуют пределы*

$$c_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \to \infty} \min(n_i^{1/2} n_j^{-1/2}, n_j^{1/2} n_i^{-1/2}), \ i, j = \overline{1, m}. \tag{7}$$

3. Определение семейства операторов класса B.

Определение 4. *Будем говорить, что семейство линейных положительных операторов*

$$L_n(f; x) = \int f(t) Q_n(x)(dt), \quad n \in N_+^m, \tag{8}$$

принадлежит классу B, *если существует такая мера* $\mu \in \Lambda$, *что при каждом фиксированном* $x \in X$

$$Q_n(x) \doteqdot \varphi_n(z, x) = \prod_{k=0}^{m-1} (\varphi(z A_{nk}^{-1}, x))^{n_{j_{k+1}} - n_{j_k}}, \tag{9}$$

где $\varphi(z, x)$ — φ*-характеристика меры* μ,

$$z \in Z_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{k=0}^{m-1} \{z : s(x) + \operatorname{Re}(z A_{nk}^{-1}) \in S\}, \tag{10}$$

f — *вещественная функция, определенная на* R^m, *для которой имеет смысл правая часть равенства* (8).

Если положить $P_n(x) = Q_n(x) h$, где отображение $h: R^m \to R^m$ определяется равенством $h(t) = x + t A_n^{-1/2}$, то $L_n(f; x)$ можно записать в виде

$$L_n(f; x) = \int f(x + t A_n^{-1/2}) P_n(x)(dt). \tag{11}$$

В силу свойства 1 дв. п. Л. мер

$$P_n(x) \doteqdot \psi_n(z, x) = \varphi_n(z A_n^{1/2}, x) \exp(z A_n^{1/2} x'). \tag{1\ }$$

Замечание. Поскольку $\varphi_n(0, x) = \psi_n(0, x) = 1$, то $Q_n(x)$ и $P_n(x)$ — вероятностные меры, зависящие от параметра x.

Лемма 2. *Если* $\{L_n\} \in B$, *то*

$$L_n(1; x) = 1; \qquad L_n(t; x) = x; \tag{13}$$

$$V_n \overset{\text{def}}{=} (L_n((t_i - x_i)(t_j - x_j); x)) = ((\max(n_i, n_j))^{-1} v_{ij}(x)), \tag{14}$$

$i, j = \overline{1, m}$, $v_{ij}(x)$ — элементы матрицы V, определяемые соотношением (3).

Доказательство. Поскольку $\varphi_n(z, x) \doteq Q_n(x)$, то $L_n(1; x) = \varphi_n(0, x) = 1$; далее, в силу свойств дв. п. Л., соотношений (1), (2) и (5)

$$L_n(t; x) = -\frac{d}{dz}\varphi_n(z, x)|_{z=0} = \sum_{k=0}^{m-1}(n_{j_{k+1}} - n_{j_k})\, xA_{nk}^{-1} = x.$$

Используя, кроме того (6), находим

$$L_n((t_i - x_i)(t_j - x_j); x) = \frac{d^2}{dz^2}(\exp(zx'))\,\varphi_n(z, x))|_{z=0} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1}(n_{j_{k+1}} - n_{j_k})\, A_{nk}^{-1} V A_{nk}^{-1} = V_n.$$

Лемма доказана.

Операторы L_n определены на классе функций, которые на бесконечности растут не быстрее экспоненциальных. Значения операторов L_n на таких функциях при достаточно большом n определены на множестве X и при $n \to \infty$ m-кратная последовательность $\{L_n(f; x)\}$ сходится к $f(x)$ в каждой точке непрерывности функции f. Обоснование этих утверждений не приводим, ибо оно практически не отличается от доказательства леммы 2.2 [2, с. 440], если воспользоваться соотношениями (4) и (5).

4. Основные результаты.

Лемма 3. *Пусть функции $\psi_n(z, x)$ определяются соотношениями* (12), *$\{n\}$ — C-последовательность, $x \in X$. Тогда для каждого комплексного z*

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(z, x) = \exp(zV_c z'/2), \tag{15}$$

где $V_c = (c_{ij} v_{ij}(x))$, $i, j = \overline{1, m}$; здесь c_{ij} определяются при помощи соотношений (7), *а $v_{ij}(x)$ — при помощи соотношения* (3).

Доказательство. Из (12), используя (9) и (5), находим, что для всякого $n \in N_+^m$

$$\psi_n(z, x) = \exp \sum_{k=0}^{m-1}(n_{j_{k+1}} - n_{j_k}) \ln(\varphi(zA_{nk}^{-1/2}, x)\exp(zA_{nk}^{-1/2}x')), \tag{16}$$

а в силу (4) $\ln(\varphi(zA_{nk}^{-1/2}, x)\exp(zA_{nk}^{-1/2}x')) = z(A_{nk}^{-1/2} V A_{nk}^{-1/2})\, z'/2 + o(n_1^{-1} + \ldots + n_m^{-1})$, $n \to \infty$, $k = \overline{0, m-1}$. Тогда из (16), учитывая (6), находим $\psi_n(z, x) = \exp(zV_n z'/2 + o(1))$, $n \to \infty$; переходя к пределу при $n \to \infty$ и используя (7), получим (15).

Следствие. *Последовательность мер $P_n(x)$ при каждом фиксированном $x \in X$ слабо сходится к мере $P_c(x)$, где*

$$P_c(x)(dt) = (2\pi)^{-m/2}(\det V_c)^{-1/2}\exp(-tV_c^{-1}t'/2)\, dt. \tag{17}$$

Это следствие вытекает из теоремы непрерывности (см., например, [3, с. 72]).

Теорема. *Пусть $f \in C(R^m)$ и $\{n\}$—C-последовательность. Тогда для всякого $x \in X$*

$$a_m(x) = 1 + \int [\|t_c\|]\, P_c(x)(dt), \tag{18}$$

где $[\|t_c\|]$ целая часть числа $\|t_c\| = \|(t_1 c_{j_1 1}, \ldots, t_m c_{j_1 m})\|$.

Доказательство. $|L_n(f; x) - f(x)| = \left|\int (f(x + tA_n^{-1/2}) - f(x))\, P_n(dt)\right| \leqslant \int \omega(f; \|tA_n^{-1/2}\|)\, P_n(dt) = \int \omega(f; n_{j_1}^{-1/2}(t_1^2 n_{j_1} n_1^{-1} + \ldots t_m^2 n_{j_1} n_m^{-1})^{1/2})\, P_n(dt)$ (для сокращения записей здесь и дальше пишем P_n вместо $P_n(x)$, P_c вместо

$P_c(x))$, а так как $\{n\}$ — C-последовательность, то существует вектор $\rho = \rho(n) = (\rho_1(n), \ldots, \rho_m(n))$ такой, что $n_{j_1}/n_1 = c_{j_1 1}^2 + \rho_1(n), \ldots, n_{j_1}/n_m = c_{j_1 m}^2 + \rho_m(n)$, причем $\rho_1(n) \to 0, \ldots, \rho_m(n) \to 0$ при $n \to \infty$; поэтому, полагая $t_{c+\rho} = (t_1(n_{j_1}/n_1)^{1/2}, \ldots, t_m(n_{j_1}/n_m)^{1/2})$ и замечая, что $\delta_n^{-1} = n_{j_1}^{1/2}$, получим

$$\omega(f; \delta_n)^{-1} |L_n(f; x) - f(x)| \leqslant 1 + \int [\|t_{c+\rho}\|] P_n(dt). \tag{19}$$

Зафиксируем x и возьмем функцию

$$g(t) = \begin{cases} 1 + [\|t - x\| \delta_n^{-1}], & \text{если } t \neq x \\ 0, & \text{если } t = x. \end{cases}$$

Для этой функциии $\omega(g; \delta_n) = 1$ и $L_n(g; x) - g(x) = 1 + \int [\|t_{c+\rho}\|] P_n(dt)$, а так как функцию g можно как угодно точно приблизить непрерывными функциями, то из (19) вытекает, что $a_{mn}(x) \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{f \in C(R^m)} (\omega(f; \delta_n)^{-1} |L_n(f; x) - f(x)|) = 1 + \int [\|t_{c+\rho}\|] P_n(dt)$. Далее,

$$a_{mn}(x) = 1 + \int [\|t_c\|] P_n(dt) + \int ([\|t_{c+\rho}\|] - [\|t_c\|]) P_n(dt). \tag{20}$$

Покажем, что последнее слагаемое в правой части соотношения (20) можно сделать как угодно малым при $n \to \infty$. Для этого рассмотрим множества $M_k = \{t : k \leqslant \|t_c\| < k + 1\}$, $M_{k+\rho} = \{t : k \leqslant \|t_{c+\rho}\| < k + 1\}$. Поскольку на множестве $M_k \cap M_{k+\rho}$ $[\|t_c\|] = [\|t_{c+\rho}\|]$, а при достаточно малом $\rho(n)$ на множестве $M_k \setminus M_{k+\rho}$ $|[\|t_{c+\rho}\|] - [\|t_c\|]| \leqslant 1$, то

$$\left| \int ([\|t_{c+\rho}\|] - [\|t_c\|]) P_n(dt) \right| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{M_k \setminus M_{k+\rho}} P_n(dt) = P_n(M),$$

$$M = \bigcup_{k=0}^{\infty} (M_k \setminus M_{k+\rho}).$$

Далее, пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число; тогда, поскольку мера P_c — гауссовская, найдется такое число $r > 0$, что $P_c\{t : \|t\| > r\} < \varepsilon/2$; кроме того, так как при достаточно малом ρ множества $M_k \setminus M_{k+\rho}$ не пересекаются и при $\rho(n) \to 0$ их лебегова мера становится как угодно малой, то найдется такое натуральное число N, что $\bigcup\limits_{k=N}^{\infty} (M_k \setminus M_{k+\rho}) \subset \{t : \|t\| > r\}$ и $P_c(M_k \setminus M_{k+\rho}) \leqslant \varepsilon/2N$ для $k = 0, 1, \ldots, N - 1$. Следовательно $P_c(M) \leqslant \sum\limits_{k=0}^{N-1} P_c(M_k \setminus M_{k+\rho}) + P_c\{t : \|t\| > r\} < \varepsilon$, а поскольку последовательность мер P_n слабо сходится к мере P_c, то в силу теоремы 2.1 из [3, с. 21] $P_n(M) = P_c(M) + o(1)$, $n \to \infty$, и значит, мера P_n множества M тоже может быть сделана как угодно малой при достаточно большом n. Используя еще лемму 6.2 из [2, с. 449], из соотношения (20) окончательно получим $\lim\limits_{n \to \infty} a_{mn}(x) = 1 + \int [\|t_c\|] P_c(dt)$, что и требовалось доказать.

Замечание. При $n_1 = \ldots = n_m = n$ доказательство теоремы упрощается, ибо в этом случае $\rho(n) = (0, \ldots, 0)$. Кроме того, тогда легко дать вероятностную интерпретацию функциям $L_n(f; x)$ и, если воспользоваться результатом из [4, следствие 16.5, с. 171], можно показать, что $a_{mn}(x) = a_m(x) + O(n^{-1/2} \log n)$, $n \to \infty$.

5. Примеры. Пусть мера μ сосредоточена в точках $a_0 = (a_{10}, \ldots, a_{m0})$, $a_1 = (a_{11}, \ldots, a_{m1}), \ldots, a_m = (a_{1m}, \ldots, a_{mm})$ — вершинах невырожденного m-мерного симплекса T, и приписывает им единичные массы. Тогда

такая мера порождает многочлены

$$B_n(f; x) = \sum_{k_0+\ldots+k_m=\nu} f\left(\sum_{j=0}^{m} a_j \sum_{r=1}^{m} k_{rj} A_{nr}^{-1}\right) \nu! \, (k_0! \ldots k_m!)^{-1} \beta_0^{|k_0|} \ldots \beta_m^{|k_m|},$$

где $\nu = (n_{j_1}, n_{j_2} - n_{j_1}, \ldots, n_{j_m} - n_{j_{m-1}})$, $k_i = (k_{1i}, \ldots, k_{mi})$, $\beta_i = \beta_i(x)$ — барицентрические координаты точки $x \in T$ относительно вершин симплекса T, $i = 0, 1, \ldots m$.

В случае $m = 1$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ это обычные многочлены Бернштейна

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1 - x)^{n-k}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

для них

$$a_1(x) = 1 + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{\infty} [r(x(1-x))^{1/2}] \exp(-r^2/2) \, dr,$$

отсюда $\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} a_1(x) = a_1(1/2) = 1{,}04556\ldots$ — получим известную постоянную Эссеена [5].

Если положить $m = 2$, $n = (n_1, n_2)$, $n_1 \leqslant n_2$, $a_0 = (0, 0)$, $a_1 = (1, 0)$, $a_2 = (0, 1)$, то

$$B_{(n_1,n_2)}(f; x, y) = \sum f(k_1/n_1, (k_2 + l_2)/n_2)(n_2 - n_1)! \, n_1! \, (k_1! k_2! k_3! l_1! l_2! l_3!)^{-1} x^{k_1+l_1} \times$$

$$\times y^{k_2+l_2} (1 - x - y)^{k_3+l_3}, \quad (x, y) \in T = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, \ 0 \leqslant y \leqslant 1, \ 0 \leqslant x + y \leqslant 1\}$$

и суммирование производится по всем натуральным решениям системы $k_1 + k_2 + k_3 = n_1$, $l_1 + l_2 + l_3 = n_2 - n_1$.

Если существует $\lim\limits_{n_1, n_2 \to \infty} (n_1/n_2)^{1/2} = C$, $0 \leqslant C \leqslant 1$, то

$$a_2(x, y) = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} r \exp(-r^2/2) \, dr \int_0^{\pi/2} [r(\lambda_1 \sin^2 \varphi + C\lambda_2 \cos^2 \varphi)^{1/2}] \, d\varphi,$$

где $\lambda_{1,2} = (x(1-x) + y(1-y) \pm ((x(1-x) - y(1-y))^2 + 4C^2x^2y^2)^{1/2})/2$, и если $C = 1$ (а это будет, например, когда $n_1 = n_2$), то $\max\limits_{(x,y) \in T} a_2(x, y) = 1{,}173\ldots$; если $C = 0$ (когда $n_2 = n_1^2$), то $\max\limits_{(x,y) \in T} a_2(x, y) = 1{,}049\ldots$.

Для многочленов $B_{(n_1,n_2)}(f; x, y)$ эти результаты новые.

Замечание. Последний пример показывает, что для произвольной последовательности мультииндексов функция $a_m(x)$, вообще говоря, не существует.

1. *Волков Ю. И.* Об аппроксимационных операторах, порожденных неотрицательными мерами.— Докл. АН СССР, 1982, 263, № 2, с. 280—282.
2. *Волков Ю. И.* Многомерные аппроксимационные операторы, порожденные мерами Лебега — Стилтьеса.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1983, 47, № 3, с. 435—454.
3. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер.— М. : Наука, 1977.— 352 с.
4. *Бхаттачария Р. Н., Р. Ранга Рао.* Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения.— М. : Наука, 1982.— 286 с.
5. *Esseen C. G.* Über die asymptotisch beste Approximation stetiger Funktionen mit Hilfe von Bernstein-Polynomen.— Numerische Math., 1960, 2, S. 206—213.

Винницк. политехн. ин-т

Поступила в редакцию 20.12.83