УДК 519.48

А. А. Бовди

О периодических нормальных подгруппах мультипликативной группы групповой алгебры

Пусть KG — групповое кольцо группы G над коммутативным кольцом K с единицей. Если $U(KG)$ — мультипликативная группа кольца KG, то подгруппа $V(KG) = \left\{ \sum\limits_{g\in G} \alpha_g g \in U(KG) \,\middle|\, \sum\limits_{g\in G} \alpha_g = 1 \right\}$ называется нормированной мультипликативной группой.

При изучении мультипликативной группы группового кольца KG часто возникает задача, когда в группе $V(KG)$ элементы конечного порядка образуют подгруппу. В работах [1] и [2] автором описаны целочисленные групповые кольца, в мультипликативной группе которых элементы конечного порядка образуют подгруппу. Эта задача для групповых алгебр рассмотрена только в работе [3] и решена для групповых алгебр KG над полем K характеристики $p \geqslant 0$ в случае, когда G — нильпотентная группа или группа с конечными классами сопряженных элементов с нормальной силовской p-подгруппой. В настоящей работе обобщаются результаты [3] и уточняются в случае поля характеристики нуль.

Лемма 1. *Пусть характеристика поля K не делит порядок конечной абелевой нормальной подгруппы A группы G. Если минимальный идемпотент e групповой алгебры KA не принадлежит центру алгебры KG и $ge \neq eg$, $g \in G$, то $e_{ij} = g^{-(i-1)}eg^{j-1}$, $1 \leqslant i, j \leqslant 2$, — матричные единицы в KG и полная линейная группа $GL(2, K)$ является подгруппой группы $U(KG)$.*

Доказательство. Пусть e — минимальный идемпотент алгебры KA и $ge \neq eg$, $g \in G$. Так как KA — полупростая алгебра и внутренние автоморфизмы группы G индуцируют автоморфизмы алгебры KA, то минимальные идемпотенты e и $g^{-1}eg$ ортогональны. Поэтому доказательство леммы очевидно.

Лемма 2. *Пусть K — поле характеристики $p>0$ и мультипликативная группа поля K обладает элементом бесконечного порядка. Если G — конечная неабелева группа, то в группе $V(KG)$ все элементы конечного порядка образуют подгруппу тогда и только тогда, когда коммутант группы G — p-группа.*

Доказательство. Пусть в группе $V(KG)$ все элементы конечного порядка образуют подгруппу. Если $J(KG)$ — радикал алгебры KG, то $KG/J(KG) = F_{n_1}^{(1)} \oplus \ldots \oplus F_{n_s}^{(s)}$, где $F_n^{(i)}$ — полная матричная алгебра степени n над K-алгеброй с делением $F^{(i)}$. Так как K — поле характеристики p, то подмножество $1+J(KG) = \{1+x \mid x \in J(KG)\}$ — нормальная p-подгруппа группы $U(KG)$ и из указанного разложения факторкольца $KG/J(KG)$ в прямую сумму следует разложение в прямое произведение факторгруппы: $U(KG)/1+J(KG) = \prod_{i=1}^{s} GL(n_i, F^{(i)})$. Отсюда следует, что в группе $GL(n_i, F^{(i)})$ элементы конечного порядка образуют подгруппу. В силу предложения 2.2 из [3] это возможно только в случае $n_i = 1$ и $F^{(i)}$—поле. Тогда $H = G \cap (1+J(KG))$ — нормальная p-подгруппа группы G и факторгруппа G/H абелева. Следовательно, коммутант группы G — p-группа.

Предположим, что коммутант группы G — p-группа, и докажем, что в группе $V(KG)$ все элементы конечного порядка образуют подгруппу. Действительно, силовская p-подгруппа P группы G нормальна и идеал $I(P)$ алгебры KG, порожденный элементами $a-1$, $a \in P$, нильпотентен. Поэтому $1+I(P)$ — нормальная p-подгруппа группы $V(KG)$ и из изоморфизма $KG/I(P) \cong KG/P$ следует $V(KG)/1+I(P) \cong V(KG/P)$. Так как группа G/P — абелева, то в группе $V(KG)$ элементы конечного порядка образуют подгруппу. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть H — конечная неабелева группа, коммутант которой не является p-группой. Если K — простое поле характеристики p и группа G — прямое произведение группы H и бесконечной циклической группы $\langle u \rangle$, то мультипликативная группа $U(KG)$ обладает подгруппой, представимой в виде свободного произведения двух циклических групп порядка p.*

Доказательство. Если коммутант группы H не является p-группой, то факторалгебра $KH/J(KH)$ некоммутативна, $J(KH)$ — радикал алгебры KH. Так как конечные тела коммутативны, то в алгебре $KH/J(KH)$ существует минимальный двусторонний идеал I, изоморфный полному матричному кольцу D_m порядка $m>1$ над полем D. Пусть B и L — полные прообразы I и D соответственно в алгебре KH. Тогда в силу теоремы 3.8.1 из [4] $B \cong L_m$ и идеал B порождается идемпотентом e. Обозначим через e_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant m$, матричные единицы кольца B. Тогда групповое кольцо $B\langle u \rangle$ бесконечной циклической группы $\langle u \rangle$ над кольцом B является подкольцом группового кольца KG, элементы $w_1 = 1 + ue_{12}$ и $w_2 = 1 + ue_{21}$ обратимы в KG и имеют порядок p. Докажем, что подгруппа, порожденная элементами w_1 и w_2 есть свободное произведение циклических групп $\langle w_1 \rangle$ и $\langle w_2 \rangle$. Действительно, пусть

$$w_1^{r_1} w_2^{r_2} \ldots w_j^{r_i} = 1 - e + a_i e_{11} + b_i e_{12} + c_i e_{21} + d_i e_{22} + \sum_{l=3}^{m} e_{ll},$$

$0 < r_i < p$. Тогда элементы a_i, b_i, c_i и d_i принадлежат групповой алгебре $K\langle u \rangle$ бесконечной циклической группы $\langle u \rangle$. Непосредственным подсчетом проверяется, что $a_1 = 1$; $b_1 = r_1 u$; $a_{2n} = a_{2n-1} + r_{2n} b_{2n-1} u$; $b_{2n} = b_{2n-1}$; $a_{2n} = a_{2n+1}$; $b_{2n-1} = r_{n-1} a_{2n-2} u + b_{2n-2}$, $n > 1$. Очевидно, что элемент u^n при четном n принадлежит носителю элемента a_n, а при нечетном n — носителю элемента b_n и коэффициент при элементе u^n равен $r_1 r_2 \ldots r_n \neq 0$. Следовательно, $w_1^{r_1} w_2^{r_2} \ldots w_j^{r_n} \neq 1$ и группа, порожденная циклическими группами $\langle w_1 \rangle$ и $\langle w_2 \rangle$ — свободное произведение подгрупп $\langle w_1 \rangle$ и $\langle w_2 \rangle$. Лемма доказана.

Пусть $\Lambda(G)$ — совокупность всех таких элементов a группы G, для которых пересечение централизатора $C_G(a)$ элемента a с каждой конечно порожденной подгруппой H группы G является подгруппой конечного индекса в H. Известно [5], что в группе $\Lambda(G)$ элементы конечного порядка образуют локально конечную подгруппу $\Lambda^+(G)$ и факторгруппа $\Lambda(G)/\Lambda^+(G)$ абелева.

Теорема 1. *Пусть KG — групповая алгебра над полем K характеристики $p \geqslant 0$. Если мультипликативная группа поля K или группа G обладает элементом бесконечного порядка и в нормированной мультипликативной группе $V(KG)$ элементы конечного порядка образуют подгруппу, то в группе G элементы конечного порядка образуют подгруппу $\pi(G)$ и выполняются следующие условия: 1) силовская p-подгруппа P группы $\Lambda^+(G)$ нормальна в G и факторгруппа $\Lambda^+(G)/P$ абелева (при $p = 0$ положим $P = 1$); 2) все идемпотенты групповой алгебры $K\Lambda^+(G)$ центральные по модулю идеала $I(P)$ алгебры KG, порожденного элементами $a - 1$, $a \in P$; 3) для поля K характеристики $p = 0$ или для группы G, периодические подгруппы каждой конечно порожденной подгруппы которой конечны, подгруппы $\pi(G)$ и $\Lambda^+(G)$ совпадают.*

Доказательство. Пусть в группе $V(KG)$ элементы конечного порядка образуют подгруппу. Если K — поле характеристики нуль, то целочисленное групповое кольцо ZG является подкольцом алгебры KG и в подгруппе $V(ZG)$ группы $V(KG)$ элементы конечного порядка образуют подгруппу T. Тогда в силу теоремы 1 из [1] подгруппа T совпадает с совокупностью всех элементов конечного порядка группы G, каждая подгруппа группы T нормальна в G и T — либо абелева группа, либо гамильтонова 2-группа.

Пусть T — гамильтонова 2-группа. Тогда она представима как прямое произведение группы кватернионов $Q = \langle a, b \mid a^4=1; a^2 = b^2; b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ и группы показателя 2. Групповая алгебра RQ над полем рациональных чисел R не обладает нильпотентным элементом [6] и ее элементы $f_1 = 1/8\,(1 + a + a^2 + a^3)(1 + b)$; $f_2 = 1/8\,(1 + a + a^2 + a^3)(1 - b)$; $f_3 = 1/8\,(1 - a + a^2 - a^3)(1 + b)$; $f_4 = 1/8\,(1 - a + a^2 - a^3)(1 - b)$; $f_5 = 1/2\,(1 - a^2)$ являются идемпотентами. Получаем разложение в прямую сумму $RQ = Rf_1 \oplus Rf_2 \oplus Rf_3 \oplus Rf_4 \oplus RQf_5$. Следовательно, RQf_5 — тело. Так как в группе $U(RQ)$ все элементы конечного порядка образуют подгруппу T_1 и группа T_1 обладает точным представлением матрицами степени 8 над полем рациональных чисел R, то такая группа ввиду теоремы 9.2.1.6 из [7] конечна. В силу того, что в мультипликативной группе тела каждая конечная нормальная подгруппа центральна, проекция подгруппы T_1 на RQf_5 содержится в центре тела RQf_5. Значит, подгруппа T_1 центральна в $U(RQ)$, а это невозможно. Таким образом, группа T — абелева, каждая ее подгруппа нормальна в G и подгруппа $\Lambda^+(G)$ совпадает с T. Если идемпотент e алгебры $K\Lambda^+(G)$ не принадлежит центру алгебры KG, то в групповой алгебре подгруппы носителя идемпотента e существует минимальный идемпотент, не принадлежащий центру алгебры KG. Тогда в силу леммы 1 $GL(2, K)$ — подгруппа группы $U(KG)$ и в группе $GL(2, Z)$ все элементы конечного порядка образуют подгруппу, а это невозможно.

Пусть K — поле характеристики p. Если мультипликативная группа поля K обладает элементом бесконечного порядка, то в силу леммы 2 коммутант локально конечной группы $\Lambda^+(G)$ — p-группа. Если же группа G обладает элементом бесконечного порядка и группа $\Lambda^+(G)$ содержит конечную неабелеву подгруппу H, коммутант которой не является p-группой, то согласно определению подгруппы $\Lambda(G)$ централизатор подгруппы H в группе, порожденной подгруппой H и элементом бесконечного порядка группы G, имеет конечный индекс. Поэтому в централизаторе подгруппы H существует такой элемент u бесконечного порядка, что $G_1 = H \times \langle u \rangle$ — подгруппа группы G. Тогда в подгруппе $U(KG_1)$ группы $U(KG)$ элементы конечного порядка образуют подгруппу, а это противоречит лемме 3. Таким образом, силовская p-подгруппа P группы $\Lambda^+(G)$ нормальна в G и факторгруппа $\Lambda^+(G)/P$ абелева.

Пусть $I(P)$ — идеал алгебры KG, порожденный элементами вида $a - 1$, $a \in P$. Тогда в силу леммы 1.5 из [5] идеал $I(P)$ является нильидеалом и $1 + I(P)$—нормальная p-подгруппа группы $U(KG)$. Так как $KG/I(P) \cong KG/P$, то $U(KG)/1 + I(P) \cong U(KG/P)$. Поэтому в группе $U(KG/P)$ элементы конечного порядка образуют подгруппу и факторгпруппа $\Lambda^+(G)/P$ абелева. Ввиду леммы 2.1 из [5] $\Lambda^+(G/P) = \Lambda^+(G)/P$ и подгруппа $\Lambda^+(G/P)$ абелева. Пусть $\bar{G} = G/P$ и предположим, что идемпотент e алгебры $K\Lambda^+(\bar{G})$ не принадлежит центру алгебры $K\bar{G}$ и $ge \neq eg$, $g \in \bar{G}$. Обозначим через H подгруппу группы $\Lambda^+(\bar{G})$, порожденную носителем $\operatorname{supp} e$ идемпотента e и сопряженными $g^i(\operatorname{supp} e)g^{-i}$, $i \in Z$. Так как $\langle g, \operatorname{supp} e\rangle$ — конечно порожденная группа, то согласно определению подгруппы $\Lambda(\bar{G})$ группа H конечна и элемент g принадлежит нормализатору подгруппы H. Очевидно, что алгебра KH обладает минимальным идемпотентом f, не перестановочным с элементом g. Согласно лемме 1 элементы $e_{ij} = g^{-(i-1)}fg^{j-1}$, $1 \leqslant i, j \leqslant 2$, — матричные единицы в $K\bar{G}$ и $GL(2, K)$ — подгруппа группы $U(K\bar{G})$. Поэтому в группе $GL(2, K)$ элементы конечного порядка образуют подгруппу, что ввиду предложения 2.2 из [3] невозможно, если поле K обладает элементом бесконечного порядка. Если же группа $\bar{G}$ имеет элемент бесконечного порядка, то в группе $\bar{G}$ элементы конечного порядка образуют подгруппу и на основании этого факта можно считать, что идемпотент f не перестановочен с элементом g бесконечного порядка группы $\bar{G}$. Тогда существует степень t элемента g, принадлежащая централизатору подгруппы H, и элементы $w_1 = 1 + g^t e_{12}$ и $w_2 = 1 + g^t e_{21}$ обратимы в $K\bar{G}$. Элементы w_1 и w_2 имеют порядок p, и методом доказательства леммы 3 устанавливаем, что $w_1 w_2$ — элемент бесконечного порядка, а это невозможно. Следовательно, каждый идемпотент алгебры $K\Lambda^+(\bar{G})$ центральный в алгебре $K\bar{G}$.

Пусть периодические подгруппы каждой конечно порожденной подгруппы группы G являются конечными. Так как в группе G элементы конечного порядка образуют подгруппу, то и в каждой конечно порожденной подгруппе H группы G элементы конечного порядка образуют подгруппу $\pi(H)$, и в силу предположения группа $\pi(H)$ конечна. Следовательно, $\pi(H) \subseteq \Lambda^+(G)$ и группы $\Lambda^+(G)$ и $\pi(G)$ совпадают. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть K — поле характеристики $p \geqslant 0$ и в группе G совокупность всех элементов конечного порядка совпадает с подгруппой $\Lambda^+(G)$, факторгруппа $G/\Lambda^+(G)$ правоупорядочена и силовская p-подгруппа P группы $\Lambda^+(G)$ нормальна в G (при $p = 0$ положим $P = 1$). Если группа $\Lambda^+(G)/P$ абелева и все идемпотенты алгебры $K\Lambda^+(G)$ центральны по модулю идеала $I(P)$, то в группе $V(KG)$ все элементы конечного порядка образуют подгруппу.*

Доказательство. Если $I(P)$ — идеал алгебры KG, порожденный элементами $a - 1$, $a \in P$ и $p > 0$, то в силу леммы 1.5 из [5] $I(P)$ — нильидеал и $1 + I(P)$ — p-подгруппа группы $V(KG)$. Пусть $\bar{G} = G/P$. Так как $K\bar{G} \cong KG/I(P)$, то $V(K\bar{G}) \cong V(KG)/1 + I(P)$ и ввиду леммы 2.1 из [5] группа $\Lambda^+(\bar{G})$ абелева. Отметим, что при $p = 0$ $G = \bar{G}$. Очевидно, характеристика поля K не делит порядки элементов группы $\Lambda^+(\bar{G})$ и все идемпотенты алгебры $K\Lambda^+(\bar{G})$ центральны в $K\bar{G}$. В силу леммы 45 из [8] групповая алгебра $K\bar{G}$ изоморфна скрещенному произведению алгебры $K\Lambda^+(\bar{G})$ и факторгруппы $\bar{G}/\Lambda^+(\bar{G})$. Тогда элемент x конечного порядка группы $V(K\bar{G})$, как элемент скрещенного произведения, можно представить в виде $x = \alpha_1 t_{g_1} + \ldots + \alpha_s t_{g_s}$, где $\alpha_i \in K\Lambda^+(\bar{G})$ и $g_i \in \bar{G}/\Lambda^+(\bar{G})$. Так как группа $\bar{G}/\Lambda^+(\bar{G})$ правоупорядочена, то можно считать, что $g_1 < g_2 < \ldots < g_s$. Пусть $s > 1$ и n — порядок элемента x. Тогда в силу правоупорядоченности $g_1^n < g_{i_1} g_{i_2} \ldots g_{i_n} < g_s^n$, $1 \leqslant i_k \leqslant n$, если индексы i_k не равны одновременно 1 и s. Поэтому из равенства $x^n = 1$ следует, что один из элементов $(\alpha_1 t_{g_1})^n, (\alpha_s t_{g_s})^n$ равен нулю.

Предположим, что $(\alpha_1 t_{g_1})^n = 0$ и H — подгруппа, порожденная элементом g_1 и носителем элемента α_1. Тогда в группе H элементы конечного порядка образуют конечную абелеву подгруппу $\pi(H)$. Пусть $K\pi(H) = K_1 e_1 + \ldots + K_q e_q$ — разложение в прямую сумму полей. Идемпотенты e_i центральны в $K\overline{G}$ и имеет место разложение $\alpha_1 = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_q e_q$, $\beta_i \in K_i$. Так как g_1 принадлежит нормализатору подгруппы $\pi(H)$, то $g_1^{-1}\beta_i g_1 \in K_i$. Поэтому из равенства $(\alpha_1 t_{g_1})^n = 0$ вытекает $(\beta_i g_1)^n = 0$ для всех i и $\beta_i = 0$, а это невозможно. Следовательно, $s = 1$ и $x \in K\Lambda^+(\overline{G})$, а значит, в группе $U(KG)/1 + I(P)$ все элементы конечного порядка образуют подгруппу. Теорема доказана.

1. *Бовди А. А.* Периодические нормальные делители мультипликативной группы группового кольца.— Сиб. мат. журн., 1968, 9, № 3, с. 495—498.
2. *Бовди А. А.* Периодические нормальные делители мультипликативной группы группового кольца. II.— Сиб. мат. журн., 1970, 11, № 3, с. 492—511.
3. *Polcino Milies César.* Group rings whose torsion units form a subgroup. II.—Commun. Algebra, 1981, 9, N 7, p. 699—712.
4. *Джекобсон Н.* Строение колец.— М. : Изд-во иностр. лит., 1961.— 392 с.
5. *Passman D. S.* A new radical for group rings?— J. Algebra, 1974, 28, N 3, p. 556—572.
6. *Берман С. Д.* О некоторых свойствах целочисленных групповых колец.— Докл. АН СССР, 1953, 91, № 1, с. 7—9.
7. *Плоткин Б. И.* Группы автоморфизмов алгебраических систем.— М. : Наука, 1966.— 604 с.
8. *Бовди А. А.* Групповые кольца.— Ужгород : Ужгород. ун-т, 1974.— 118 с.

Ужгород. гос. ун-т

Поступила в редакцию 06.07.82