УДК 517.968.23

А. И Песчанский, Ю. И. Черский

Интегральное уравнение с криволинейными свертками на замкнутом контуре

Рассмотрим в пространстве $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, уравнение

$$(Bu)(t) \equiv [a(t)c(t) + b(t)d(t)]\,u(t) + (\pi i)^{-1}\int_\Gamma [a(\tau)c(t)\alpha'(\tau)/(\alpha(\tau) - \alpha(t)) -$$

$$- b(t)d(\tau)/(\tau - t)]\,u(\tau)\,d\tau + c(t)\int_\Gamma K^+(\alpha(t)/\alpha(\tau))\,a(\tau)\,u(\tau)\,d\alpha(\tau)/\alpha(\tau) +$$

$$+ b(t)\int_\Gamma K^-(t/\tau)\,d(\tau)\,u(\tau)\,d\tau/\tau = h(t), \quad t \in \Gamma, \qquad (1)$$

на простом замкнутом контуре Ляпунова Γ, ориентированном против часовой стрелки, обходящем начало координат и лежащем в кольце $T=\{z\,|\,r<|z|<R\}$. Функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ заданы в пространстве $H_\mu(\Gamma)$, $0<\mu<1$:

$$a(t)\neq 0,\quad b(t)\neq 0,\quad c(t)\neq 0,\quad d(t)\neq 0, \tag{2}$$

$\alpha(t)$ — заданная функция сдвига контура Γ на аналогично расположенный в T контур γ, $\alpha'(t)\in H_\mu$, $\alpha'(t)\neq 0$. Заданы также функции $K^+(z)$ и $K^-(z)$, аналитические соответственно в областях $|z|<R/r$ и $|z|>r/R$, причем коэффициенты разложения этих функций в ряды Тейлора соответственно в окрестности $z=0$ и $z=\infty$ удовлетворяют условиям

$$|k_n^+(R/r)^n|\leqslant \mathrm{const},\ n\geqslant 0;\quad |k_n^-(r/R)^n|\leqslant \mathrm{const},\quad n<0. \tag{3}$$

Правая часть $h(t)$ задана; искомой является функция $u(t)$. Уравнение (1) — обобщение уравнений, рассмотренных в [1, 2].

Введем следующие операторы: обратимый в $L_p(\Gamma)$ оператор [3] $N\psi\equiv\psi(t)+(2\pi i)^{-1}\int\limits_\Gamma[\alpha'(\tau)/(\alpha(\tau)-\alpha(t))-(\tau-t)^{-1}]\,\psi(\tau)\,d\tau$; оператор сдвига $W\varphi\equiv\varphi[\alpha(t)]$, $W:L_p(\gamma)\to L_p(\Gamma)$, и ему обратный W^{-1}, $(W^{-1}\psi)(v)\equiv\psi[\alpha_{-1}(v)]$, где $\alpha_{-1}(v)$ — функция, обратная $\alpha(t)$. $P_\gamma^\pm:L_p(\gamma)\to L_p^\pm(\gamma)$; $P_\Gamma^\pm:L_p(\Gamma)\to L_p(\Gamma)$ — известные проекционные операторы $2P_\gamma^\pm\psi\equiv\psi\pm(\pi i)^{-1}\int\limits_\gamma(u-v)^{-1}\psi(u)\,du$, $2P_\Gamma^\pm\varphi\equiv\varphi\pm(\pi i)^{-1}\int\limits_\Gamma(\tau-t)^{-1}\varphi(\tau)\,d\tau$; K_γ^+, K_Γ^- — ограниченные операторы криволинейной свертки $(K_\gamma^+\psi)(v)\equiv\int\limits_\gamma K^+(v/u)\times\psi(u)\,du/u$, $K_\gamma^+:L_p(\gamma)\to L_p^+(\gamma)$; $(K_\Gamma^-\varphi)(t)\equiv\int\limits_\Gamma K^-(t/\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau/\tau$, $K_\Gamma^-:L_p(\Gamma)\to L_p^-(\Gamma)$.

Лемма 1. *B есть композиция операторов*

$$B=2\,(cWP_\gamma^+W^{-1}+bP_\Gamma^-)\,N^{-1}DN^{-1}\,(WP_\gamma^+W^{-1}aI+P_\Gamma^-dI), \tag{4}$$

$D=W(P_\gamma^++(1/2)\,K_\gamma^+)\,W^{-1}+P_\Gamma^-+(1/2)\,K_\Gamma^-$, *$I$ — единичный оператор.*

Доказательство. $WP_\gamma^+W^{-1}N^{-1}$ и $P_\Gamma^-N^{-1}$ — взаимно дополнительные проекторы в $L_p(\Gamma)$, так как образы этих операторов в $L_p(\Gamma)$ замкнуты и пересекаются только в нуле.

Покажем последнее. Пусть $h\in\mathrm{Im}\,(WP_\gamma^+W^{-1}N^{-1})\cap\mathrm{Im}\,(P_\Gamma^-N^{-1})$, $h\neq 0$. Тогда $\exists\varphi_1\neq 0$, $\exists\varphi_2\neq 0$, $WP_\gamma^+W^{-1}N^{-1}\varphi_1=P_\Gamma^-N^{-1}\varphi_2$. Следовательно, краевая задача $\Phi^+[\alpha(t)]=\Phi^-(t)$, $\Phi^-(\infty)=0$ имеет нетривиальное решение, что невозможно [3]. Наконец, прямая сумма подпространств $\mathrm{Im}\,(WP_\gamma^+W^{-1}N^{-1})$ и $\mathrm{Im}\,(P_\Gamma^-N^{-1})$ равна $L_p(\Gamma)$. Теперь справедливость леммы проверяется перемножением операторов в (4) с использованием ортогональности проекторов $WP_\gamma^+W^{-1}N^{-1}$ и $P_\Gamma^-N^{-1}$.

Исследуем отдельно сомножители в правой части тождества (4). Известно [3], что условия (2) необходимы и достаточны для нетеровости уравнения

$$c(t)\,(WP_\gamma^+W^{-1}N^{-1}\varphi)(t)+b(t)\,(P_\Gamma^-N^{-1}\varphi)(t)=(1/2)\,h(t). \tag{5}$$

Пусть $\varkappa_1$ — индекс Коши функции $b(t)\,c^{-1}(t)$. При $\varkappa_1\geqslant 0$ уравнение (5) безусловно разрешимо, а при $\varkappa_1<0$ необходимы и достаточны условия разрешимости

$$\int\limits_\Gamma t^{k-1}\,[N^{-1}(h/(cX^+[\alpha]))]\,(t)=0,\qquad k=1,\ldots,\varkappa_1. \tag{6}$$

Общее решение определено формулами

$$2\varphi(t)=X^+[\alpha(t)]\,((WP_\gamma^+W^{-1}N^{-1}+cb^{-1}P_\Gamma^-N^{-1})\,(h/(cX^+[\alpha])-Q_{\varkappa_1-1})+$$
$$+cb^{-1}Q_{\varkappa_1-1})(t),\quad \ln X^+[\alpha]=(WP_\gamma^+W^{-1}N^{-1}(\ln(\tau^{-\varkappa_1}b(\tau)/c(\tau))))(t), \tag{7}$$

$Q_{\varkappa_1-1}$ — многочлен степени $\varkappa_1 - 1$ с произвольными комплексными коэффициентами; $Q_{\varkappa_1-1} \equiv 0$ при $\varkappa_1 \leqslant 0$.

Перейдем к следующему уравнению:

$$DN^{-1}\psi = (W(P_\gamma^+ + (1/2)K_\gamma^+)W^{-1} + P_\Gamma^- + (1/2)K_\Gamma^-)N^{-1}\psi = \varphi(t), \quad (8)$$

равносильному системе уравнений

$$\begin{aligned} ((P_\gamma^+ + (1/2)K_\gamma^+)W^{-1}N^{-1}\psi)(v) &= (P_\gamma^+W^{-1}N^{-1}\varphi)(v), \qquad v \in \gamma, \\ ((P_\Gamma^- + (1/2)K_\Gamma^-)N^{-1}\psi)(t) &= (P_\Gamma^-N^{-1}\psi)(t) \qquad t \in \Gamma. \end{aligned} \quad (9)$$

Аппаратом исследования будет преобразование Лорана, но не для функций, аналитических в областях, ограниченных окружностями с центром в начале координат, а для функций, определенных на контуре Γ (в общем случае неаналитических). Определим такое преобразование с помощью обобщенных функций. В качестве пространства основных функций возьмем банахово пространство $\{\{r, R\}\}$ аналитических в кольце T функций с конечной нормой $\| \varphi(t) \|_1^2 = (2\pi)^{-1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} [|\varphi(r\exp(i\theta))|^2 + |\varphi(R\exp(i\theta))|^2]\, d\theta$ и банахово пространство $\{r, R\}$ последовательностей $\{\varphi_k\}$ комплексных чисел с конечной нормой $\| \varphi_k \|_2^2 = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} (|\varphi_k r^k|^2 + |\varphi_k R^k|^2)$. Соответствующие сопряженные пространства обозначим $\{\{R, r\}\}$ и $\{R, r\}$. Значения регулярных функционалов из этих пространств зададим равенствами $\langle \psi, \varphi(t) \rangle_1 = \int\limits_\Gamma \psi(t)\varphi(t)\,dt$, $\psi(t) \in \{\{r, R\}\}$, $\varphi(t) \in \{\{r, R\}\}$, $\langle \psi_k, \varphi_k \rangle_2 = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k \varphi_{-k-1}$, $\psi_k \in \{r, R\}$, $\varphi_k \in \{r, R\}$.

Функционал $f \in \{R, r\}$, пользуясь общим видом линейного функционала в гильбертовом пространстве, можно отождествить с последовательностью $\{f_n\}$, обладающей свойствами

$$(f, \varphi_n)_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{-n-1}\varphi_n, \ \varphi_n \in \{r, R\}, \ \sum_{n=0}^{\infty} |f_n r^n|^2 + \sum_{n=-\infty}^{-1} |f_n R^n|^2 < \infty. \quad (10)$$

Оператор Лорана $L: L\varphi_k = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k t^k$, непрерывно отображающий $\{r, R\}$ на $\{\{r, R\}\}$, по обычной схеме [4] определим из пространства $\{R, r\}$ на $\{\{R, r\}\}$ по формулам

$$(Lf, \varphi(t))_1 = 2\pi i (f, L^{-1}\varphi)_2, \quad f \in \{R, r\},$$

$$(L^{-1}\varphi)_k = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{|t|=\rho} \varphi(t)\, t^{-k-1}\,dt, \qquad r < \rho < R, \quad \varphi \in \{\{r, R\}\}. \quad (11)$$

Обратный оператор $L^{-1}: \{\{R, r\}\} \to \{R, r\}$ определим равенством

$$(L^{-1}f, \varphi_k)_2 = (2\pi i)^{-1}(f, L\varphi_k)_1, \quad \{\varphi_k\} \in \{r, R\}. \quad (12)$$

Члены последовательности $\{f_n\}$, соответствующие функционалу $L^{-1}f$, назовем коэффициентами Лорана функционала $f \in \{\{R, r\}\}$. Из равенств (10) и (12) следует $2\pi i f_n = (f, t^{-n-1})_1$.

Всякая функция $f(t) \in L_p(\Gamma)$ определяет в $\{\{R, r\}\}$ так называемый аналитический функционал [5] по формуле $(f, \varphi(t))_1 = \int\limits_\Gamma f(t)\varphi(t)\,dt$, $\varphi(t) \in \{\{r, R\}\}$, т. е. $L_p(\Gamma)$ изоморфно подпространству пространства $\{\{R, r\}\}$. Рассмотрим сужение оператора L^{-1} в $\{\{R, r\}\}$ на $L_p(\Gamma): L^{-1}|_{L_p(\Gamma)}$. Образ этого сужения обозначим $\{R, r\}_{\Gamma, p}$. Очевидно, что коэффициенты Лорана функции $f(t) \in L_p(\Gamma)$ определяются как $f_n = (2\pi i)^{-1} \int\limits_\Gamma f(t)\, t^{-n-1}dt$, $n = 0$,

$\pm 1, \ldots$. Оператор L действует из $\{R, r\}_{\Gamma, p}$ в $L_p(\Gamma)$ по формуле (11). Функцию $f(t)$ можно восстановить по ее коэффициентам Лорана и другим путем: $f(t) = f^+(t) + f^-(t)$. Здесь функции

$$f^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma f(\tau)(\tau - z)^{-1} d\tau, \qquad |z| < r,$$

$$f^-(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} f_n z^n = -(2\pi i)^{-1} \int_\Gamma f(\tau)(\tau - z)^{-1} d\tau, \qquad |z| > R,$$

аналитически продолжимы до Γ.

Обозначим $\{R, r\}_{\Gamma, p}^{\pm}$ соответственно образы операторов $L^{-1}|_{L_p^{\pm}(\Gamma)}$. Пространство $\{R, r\}_{\Gamma, p}^{\pm}$ изоморфно подпространству правых (левых) односторонних последовательностей из $\{R, r\}_{\Gamma, p}$. Отметим также свойства криволинейных сверток $L^{-1} \int_\Gamma K^{\pm}(t/\tau) f(\tau) d\tau/\tau = 2\pi i k_n^{\pm} (L^{-1}f)_n$, $L^{-1} \int_\Gamma f(\tau)(\tau - t)^{-1} d\tau = \pi i \operatorname{sgn}(n + (1/2))(L^{-1}f)_n$, где $\{k_n^{\pm}\}$ — коэффициенты разложения функции $k^{\pm}(z)$ в ряд Тейлора. Верно и обратное: если члены последовательности $\{r_n^{\pm}\}$ удовлетворяют неравенствам (3), а $\{f_n\} \in \{R, r\}_{\Gamma, p}^{\pm}$, то $\{r_n^{\pm} f_n\} \in \{R, r\}_{\Gamma, p}^{\pm}$ и $2\pi i L(r_n^{\pm} f_n) = \int_\Gamma R^+(t/\tau)(Lf_n)(\tau) d\tau/\tau$, где $R^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n^+ z^n$, $R^-(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} r_n^- z^n$.

Вернемся к решению системы (9). Применив к обеим частям уравнений обратное преобразование Лорана, получим $(1 + \pi i k_n^+)\psi_n^+ = \varphi_n^+$, $(1 + \pi i k_n^-)\psi_n^- = \varphi_n^-$, где $\psi_n^+ = (L^{-1}P_\gamma^+ W^{-1} N^{-1} \psi)_n)$, $\varphi_n^+ = (L^{-1}P_\gamma^+ W^{-1} N^{-1}\varphi)_n$, $\psi_n^- = (L^{-1}P_\Gamma^- N^{-1}\psi)_n$, $\varphi_n^- = (L^{-1}P_\Gamma^- N^{-1}\varphi)_n$, а $\{k_n^{\pm}\}$ — коэффициенты разложения $K^{\pm}(z)$ в ряд Тейлора. Если $1 + \pi i k_{n_j}^+ = 0$, $j = 1, \ldots, q$; $1 + \pi i k_{n_j}^- = 0$, $j = q+1, \ldots, s$, то для разрешимости уравнения (8) необходимы и достаточны условия

$$\int_\gamma (W^{-1}N^{-1}\varphi)(v)\, v^{-n_j-1} dv = 0, \qquad j = 1, \ldots, q, \quad \int_\Gamma (N^{-1}\varphi)(t)\, t^{-n_j-1} dt = 0,$$

$$j = q+1, \ldots, s. \tag{13}$$

Если они выполняются, то

$$\psi_n^+ = \begin{cases} (1 + 2\pi i r_n^+)\varphi_n^+, & n \neq n_j, \quad j = 1, \ldots, q, \\ \lambda_j, & n = n_j, \quad j = 1, \ldots, q, \end{cases}$$

$$\psi_n^- = \begin{cases} (1 + 2\pi i r_n^-)\varphi_n^-, & n \neq n_j, \quad j = q+1, \ldots, s, \\ \lambda_j, & n = n_j, \quad j = q+1, \ldots, s, \end{cases}$$

λ_j, $j = 1, \ldots, s$, — произвольные комплексные числа. Поскольку последовательности $\{r_n^{\pm}\}$ удовлетворяют условиям (3), то $\{r_n^+ \varphi_n^+\} \in \{R, r\}_{\Gamma, p}^+$, $\{r_n^- \varphi_n^-\} \in \{R, r\}_{\Gamma, p}^-$. Применяя к обеим частям последних равенств оператор L, получим

$$\psi(t) = \varphi(t) + \int_\Gamma R^+[\alpha(t)/\alpha(\tau)](N^{-1}\varphi)(\tau)\, d\alpha(\tau)/\alpha(\tau) +$$

$$+ \int_\Gamma R^-(t/\tau)(N^{-1}\varphi)(\tau)\, d\tau/\tau + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j [\alpha(t)]^{n_j} + \sum_{j=q+1}^{s} \lambda_j t^{n_j}, \tag{14}$$

где $R^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n^+ z^n$, $|z| < R/r$; $R^-(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} r_n^- z^n$, $|z| > r/R$.

Аналогично можно решить уравнение, союзное уравнению (8), и установить фредгольмовость оператора D, причем $\dim \operatorname{Ker} D = s$.

Осталось рассмотреть уравнение

$$(WP_\gamma^+W^{-1}aI + P_\Gamma^- dI)\, u(t) = \psi(t), \qquad t \in \Gamma. \tag{15}$$

Лемма 2. *Уравнение* (15) *разрешимо в* $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, *тогда и только тогда, когда в* $L_p(\Gamma)$ *разрешимо уравнение*

$$(dWP_\gamma^-W^{-1} + aP_\Gamma^+)\, v(t) = \psi_1(t), \tag{16}$$

где $\psi_1(t) = ((aP_\Gamma^- - dWP_\gamma^+W^{-1})\, N^{-1}\psi)(t)$.

Доказательство. Пусть $u_1(t)$ — решение уравнения (15). Покажем, что функция $v_1(t) = (M^{-1}(WP_\gamma^-W^{-1}aI - P_\Gamma^+dI)\, u_1)(t)$ (здесь $M^{-1} = (WP_\gamma^-W^{-1} + P_\Gamma^+)^{-1}$, см. [3]) удовлетворяет уравнению (16). Действительно,

$$(dWP_\gamma^-W^{-1} + aP_\Gamma^+)\, M^{-1}(WP_\gamma^-W^{-1}aI - P_\Gamma^+dI)\, u_1 =$$
$$= (dWP_\gamma^-W^{-1}aI - aP_\Gamma^+dI)\, u_1 = (aP_\Gamma^-dI - dWP_\gamma^+W^{-1}aI)\, u_1 =$$
$$= (aP_\Gamma^- - dWP_\gamma^+W^{-1})\, N^{-1}(WP_\gamma^+W^{-1}aI + P_\Gamma^-dI)\, u_1 =$$
$$= (aP_\Gamma^- - dWP_\gamma^+W^{-1})\, N^{-1}\psi = \psi_1.$$

Здесь использована взаимная ортогональность проекторов $P_\Gamma^+M^{-1}$ и $WP_\gamma^-W^{-1}M^{-1}$, $P_\Gamma^-N^{-1}$ и $WP_\gamma^+W^{-1}N^{-1}$. Пусть теперь $v_1(t)$ — решение уравнения (16). Подействовав на обе его части оператором $WP_\gamma^+W^{-1}d^{-1}I$, получим тождество

$$(WP_\gamma^+W^{-1}ad^{-1}P_\Gamma^+v_1)(t) \equiv (WP_\gamma^+W^{-1}ad^{-1}P_\Gamma^-N^{-1}\psi)(t) - (WP_\gamma^+W^{-1}N^{-1}\psi)(t).$$

Убедимся, что функция $u_1(t) = d^{-1}(t)\,(P_\Gamma^-N^{-1}\psi - P_\Gamma^+v_1)(t)$ — решение уравнения (15). Подставив u_1 в (15) и воспользовавшись последним тождеством, получим

$$(WP_\gamma^+W^{-1}aI + P_\Gamma^-dI)\, u_1 = (WP_\gamma^+W^{-1}ad^{-1}I + P_\Gamma^-)\,(P_\Gamma^-N^{-1}\psi - P_\Gamma^+v_1) =$$
$$= WP_\gamma^+W^{-1}ad^{-1}P_\Gamma^-N^{-1}\psi - WP_\gamma^+W^{-1}ad^{-1}P_\Gamma^-v_1 + P_\Gamma^-N^{-1}\psi = \psi.$$

Лемма доказана.

Пусть $\varkappa_2$ — индекс Коши функции $a(t)\,d^{-1}(t)$. При $\varkappa_2 > 0$ для разрешимости уравнения (15) необходимы и достаточны условия

$$\int_\Gamma \tau^{-n}\,(1/(dY^-[\alpha])\,(aP_\Gamma^- - dWP_\gamma^+W^{-1})\,N^{-1}\psi)(\tau)\, d\tau = 0, \qquad n = 1, \ldots, \varkappa_2. \tag{17}$$

При $\varkappa_2 \leqslant 0$ уравнение (15) безусловно разрешимо с общим решением

$$u(t) = (d^{-1}P_\Gamma^-N^{-1}\psi - a^{-1}Y^-[\alpha]\,P_\Gamma^+M^{-1}(1/(dY^-[\alpha])\,(aP_\Gamma^- -$$
$$- dWP_\gamma^+W^{-1})\,N^{-1}\psi - t^{-\varkappa_2}C_{-\varkappa_2-1}) - a^{-1}Y^-[\alpha]\,t^{\varkappa_2}C_{-\varkappa_2-1})(t), \tag{18}$$

где $\ln Y^-[\alpha(t)] = (WP_\gamma^-W^{-1}\ln[t^{-\varkappa_2}a(t)/d(t)])(t)$, а $C_{-\varkappa_2-1}(t)$ — многочлен степени $-\varkappa_2-1$ с произвольными комплексными коэффициентами, $C_{-\varkappa_2-1} \equiv 0$ при $\varkappa_2 \geqslant 0$. Оператор B как композиция нетеровых операторов является нетеровым с индексом $\varkappa_1 - \varkappa_2$.

Теорема. *Для разрешимости уравнения* (1) *необходимо и достаточно* 1) *при* $\varkappa_1 < 0$ и $\varkappa_2 > 0$ — *выполнение условий* (6), (13) *и совместность линейной алгебраической системы*

$$\sum_{j=1}^{s} a_{nj}\lambda_j = h_n, \qquad n = 1, \ldots, \varkappa_2, \tag{19}$$

полученной из (17) *и* (14); $\dim \operatorname{Ker} B = s - \rho$, *где* ρ — *ранг матрицы системы* (19); *решение определено формулами* (18), (14), (7), $\{\lambda_j\}$, $j = 1, \ldots$ $\ldots, s$,— *общее решение системы* (19); 2) *при* $\varkappa_1 < 0$ и $\varkappa_2 \leqslant 0$ — *выполнение условий* (6) *и* (13) $\dim \operatorname{Ker} B = -\varkappa_2 + s$; *решение определено формулами* (18), (14), (7); 3) *при* $\varkappa_1 \geqslant 0$ и $\varkappa_2 \leqslant 0$ — *условие совместности алгебраической системы*

$$\sum_{i=0}^{\varkappa_1-1} b_{ji}\mu_i = g_j, \qquad j = 1, \ldots, s, \tag{20}$$

полученной из (13) *и* (7); $\dim \operatorname{Ker} B = \varkappa_1 - \varkappa_2 + s - \rho$, ρ — *ранг матрицы системы* (20); *решение определено формулами* (18), (14) *и* (7), *где* $Q_{\varkappa_1-1} = \sum_{i=0}^{\varkappa_1-1} \mu_i t^i$, $\{\mu_i\}$ — *общее решение системы* (20); 4) *при* $\varkappa_1 \geqslant 0$, $\varkappa_2 > 0$ — *условие совместности алгебраической системы*

$$\sum_{i=0}^{\varkappa_1+s-1} d_{ki}\sigma_i = m_k, \qquad k = 1, \ldots, \varkappa_2 + s, \tag{21}$$

полученной из (13) *и* (17) *с учетом* (7) *и* (14); $\dim \operatorname{Ker} B = \varkappa_1 + s - \rho$, *где* ρ — *ранг матрицы системы* (21); *решение уравнения* (1) *определено формулами* (18), (14), (7), *где* $Q_{\varkappa_1-1} = \sum_{i=0}^{\varkappa_1-1} \sigma_i t^i$, $\lambda_j = \sigma_{\varkappa_1+j-1}$, $j = \overline{1, s}$, *а* $\{\sigma_0, \ldots, \sigma_{\varkappa_1+s-1}\}$ — *общее решение системы* (21).

1. *Черский Ю. И.* Интегральные уравнения, сводящиеся к двум задачам Римана.— Докл. АН СССР, 1979, **248**, № 4, с. 802—805.
2. *Черський Ю. І.* Сингулярне інтегральне рівняння зі зсувом.—Доп. АН УРСР. Сер. А, 1980, № 12, с. 15—18.
3. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.— М. : Наука, 1977.— 448 с.
4. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки.— М. : Наука, 1978.— 295 с.
5. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними.— М. : Физматгиз, 1958.— 439 с.

Ин-т прикл. пробл.
механики и матем. АН УССР

Поступила в редакцию 20.12.82