УДК 519.21

Г. А. Шаршанова

О мероморфных характеристических функциях с бесконечным числом полюсов

В статье получены достаточные условия характеристичности мероморфных функций, все полюсы которых лежат на прямой, параллельной вещественной оси, и имеют одинаковый порядок. Кроме того, найдены необходимые и достаточные условия, которым должно удовлетворять множество пар $\{\tau_k, n_k\}_1^\infty$, где $\tau_k \in \mathbb{C}$, $n_k \in \mathbb{N}$, чтобы существовала мероморфная характеристическая функция с полюсами только в точках τ_k порядков n_k.

Теорема. *Пусть в* $\mathbb{C}$ *дана последовательность точек*

$$-i\alpha, \tau_1, -\bar{\tau}_1, \ldots, \tau_k, -\bar{\tau}_k, \ldots, \qquad (1)$$

$$\alpha \neq 0, \ \tau_k = \xi_k - i\alpha, \ \xi_{k+1} > \xi_k > 0, \ \lim_{k\to\infty} \xi_k = \infty \qquad (2)$$

и последовательность рациональных функций

$$\varphi_0(t) = \sum_{l=1}^{m} a_l \left(\frac{i\alpha}{t+i\alpha}\right)^l, \ a_1 \ldots, a_{m-1} \in \mathbb{R}, \quad a_m > 0, \qquad (3)$$

$$\varphi_k(t) = \sum_{l=1}^{m} \left[\lambda_{kl} \left(\frac{-\tau_k}{t-\tau_k} \right)^l + \bar{\lambda}_{kl} \left(\frac{\bar{\tau}_k}{t+\bar{\tau}_k} \right)^l \right], \quad \lambda_{km} \neq 0. \tag{4}$$

Пусть выполняется неравенство

$$a_m |\alpha|^m > 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_{km}| |\tau_k|^m. \tag{5}$$

Тогда существует мероморфная характеристическая функция с полюсами только в точках (1) *и главными частями* (3),

$$\sum_{l=1}^{m} \lambda_{kl} \left(\frac{-\tau_k}{t-\tau_k} \right)^l, \quad \sum_{l=1}^{m} \bar{\lambda}_{kl} \left(\frac{\bar{\tau}_k}{t+\bar{\tau}_k} \right)^l. \tag{6}$$

Доказательство. Докажем теорему для $\alpha > 0$, т. е. все точки последовательности (1) расположены в нижней полуплоскости, тогда доказательство теоремы в случае $\alpha < 0$ будет сразу вытекать из того, что функции $\varphi(t)$ и $\varphi(-t)$ одновременно являются характеристическими.

Рассмотрим случай $m > 1$. Предположим сначала, что $a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0$. При таком предположении (3) содержит лишь одно слагаемое. Из (5) следует, что существует $\delta > 0$ такое, что

$$(a_m - \delta) \alpha^m > 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_{km}| |\tau_k|^m. \tag{7}$$

Возьмем какое-нибудь $\delta > 0$, удовлетворяющее (7), и рассмотрим две группы последовательностей рациональных функций:

$$\delta \left(\frac{i\alpha}{t+i\alpha} \right)^m, \quad \left\{ \sum_{l=1}^{m-1} \lambda_{kl} \left(\frac{-\tau_k}{t-\tau_k} \right)^l \right\}_{k=1}^{\infty}, \quad \left\{ \sum_{l=1}^{m-1} \bar{\lambda}_{kl} \left(\frac{\bar{\tau}_k}{t+\bar{\tau}_k} \right)^l \right\}_{k=1}^{\infty}, \tag{8}$$

$$(a_m - \delta) \left(\frac{i\alpha}{t+i\alpha} \right)^m, \quad \left\{ \lambda_{km} \left(\frac{-\tau_k}{t-\tau_k} \right)^m \right\}_{k=1}^{\infty}, \quad \left\{ \bar{\lambda}_{km} \left(\frac{\bar{\tau}_k}{t+\bar{\tau}_k} \right)^m \right\}_{k=1}^{\infty}. \tag{9}$$

Согласно следствию 2 из [3] существует мероморфная характеристическая функция $\psi_1(t)$ абсолютно непрерывного распределения на $[0, +\infty]$ с полюсами (1) и главными частями (8).

Построим характеристическую функцию $\psi_2(t)$ с полюсами (1) и главными частями (9). Имеем

$$s_k(t) = \lambda_{km} \left(\frac{-\tau_k}{t-\tau_k} \right)^m + \bar{\lambda}_{km} \left(\frac{\bar{\tau}_k}{t+\bar{\tau}_k} \right)^m = \int_0^{\infty} e^{itx} p_k(x)\, dx,$$

где

$$p_k(x) = 2\operatorname{Re} e^{-i\tau_k x} \lambda_{km} \frac{(i\tau_k)^m}{(m-1)!} x^{m-1}.$$

Далее,

$$(a_m - \delta) \left(\frac{i\alpha}{t+i\alpha} \right)^m = \int_0^{\infty} e^{itx} p_0(x)\, dx,$$

где

$$p_0(x) = \frac{a_m - \delta}{(m-1)!} \alpha^m x^{m-1} e^{-\alpha x}.$$

В силу (7) ряд

$$(a_m - \delta) \left(\frac{i\alpha}{t+i\alpha} \right)^m + \sum_{k=1}^{\infty} s_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{itx} p_k(x)\, dx \tag{10}$$

равномерно сходится на любом компакте в $\mathbb{C}$ и поэтому представляет собой мероморфную функцию с полюсами (1) и главными частями (9). Условие (7) дает также возможность переставить местами в (10) суммирование и интегрирование. Поэтому правую часть в (10) можно представить в виде $\int\limits_0^\infty e^{itx} p(x)\, dx$, где в силу неравенства (7)

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x) \geqslant 0 \quad \forall x \geqslant 0. \tag{11}$$

Благодаря (11) функция (10) — характеристическая с точностью до положительного множителя. Если значение функции при $t = 0$ больше или равно 1, то положим

$$\psi_2(t) = \int\limits_a^\infty e^{itx} p(x)\, dx = \int\limits_0^\infty e^{itx} p(x)\, dx - \int\limits_0^a e^{itx} p(x)\, dx,$$

где $a \geqslant 0$ таково, что $\int\limits_a^\infty p(x)\, dx = 1$; $\psi_2(t)$ — мероморфная характеристическая функция с полюсами (1) и главными частями (9), так как вычитаемое $\int\limits_0^a e^{itx} p(x)\, dx$ — целая функция. Если же значение функции при $t = 0$ меньше 1, то положим

$$\psi_2(t) = \int\limits_0^\infty e^{itx} p(x)\, dx + \left(1 - \int\limits_0^\infty p(x)\, dx\right).$$

И в этом случае $\psi_2(t)$ — мероморфная характеристическая функция с полюсами только в точках (1) и главными частями (9). Таким образом, функция $\psi_2(t)$ построена.

Функция $\psi_1(t) + \psi_2(t)$ с точностью до положительного множителя мероморфная характеристическая с полюсами (1) и главными частями (3), (6). Поэтому, как и выше, можно подобрать целую функцию $h(t)$ так, чтобы $\psi_1(t) + \psi_2(t) + h(t)$ была в точности характеристической функцией. Тем самым теорема в случае $a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0$ доказана.

Пусть в (3) присутствует не только одно слагаемое. Выберем положительное число $\varepsilon > 0$ так, чтобы выполнялось

$$(a_m - \varepsilon)\, \alpha^m > 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_{km}|\, |\tau_k|^m.$$

Согласно рассмотренному выше случаю можно построить мероморфную характеристическую функцию $\psi_1(t)$ с полюсами (1) и главными частями

$$(a_m - \varepsilon)\left(\frac{i\alpha}{t + i\alpha}\right)^m, \quad \left\{\sum_{l=1}^{m} \lambda_{kl} \left(\frac{-\tau_k}{t - \tau_k}\right)^l\right\}_{k=1}^{\infty} \left\{\sum_{l=1}^{m} \lambda_{kl} \left(\frac{\bar{\tau}_k}{t + \bar{\tau}_k}\right)^l\right\}_{k=1}^{\infty},$$

а по теореме 4 из [2] существует мероморфная характеристическая функция $\psi_2(t)$ с полюсом в точке $-i\alpha$ и главной частью

$$\sum_{l=1}^{m-1} a_l \left(\frac{i\alpha}{t + i\alpha}\right)^l + \varepsilon \left(\frac{i\alpha}{t + i\alpha}\right)^m.$$

Функция $\psi_1(t) + \psi_2(t)$ с точностью до положительного множителя характеристическая с полюсами (1) и главными частями (3), (6). Поэтому, как и выше, можно подобрать целую функцию $h(t)$, чтобы $\psi_1(t) + \psi_2(t) + h(t)$ была характеристической функцией. Следовательно, для $m > 1$ теорема тоже доказана.

Рассмотрим случай $m = 1$. В силу (5) ряд

$$\varphi(t) = a_1\left(\frac{i\alpha}{t+i\alpha}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\lambda_{k1}\left(\frac{-\tau_k}{t-\tau_k}\right) + \lambda_{k1}\left(\frac{\bar{\tau}_k}{t+\bar{\tau}_k}\right)\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{itx} p_k(x)\,dx, \tag{12}$$

где

$$p_k(x) = \begin{cases} a_1 \alpha e^{-\alpha x}, & k = 0, \\ 2\operatorname{Re} e^{-i\tau_k x}\lambda_{k1}(i\tau_k), & k \neq 0, \end{cases}$$

равномерно сходится на любом компакте в $\mathbb{C}$ и поэтому представляет собой мероморфную функцию с полюсами (1) и главными частями (3), (6). Условие (5) дает также возможность переставить в (12) местами суммирование и интегрирование. Поэтому $\varphi(t)$ можно представить в виде $\int_0^{\infty} e^{itx} p(x)\,dx$, где в силу неравенства (5)

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x) \geqslant 0 \qquad \forall x \geqslant 0.$$

Поэтому $\varphi(t)$ с точностью до положительного множителя—характеристическая функция, и, следовательно, можно подобрать целую функцию $h(t)$ так, чтобы $\varphi(t) + h(t)$ была характеристической функцией.

Таким образом, теорема полностью доказана.

Из этой теоремы и следствий 1 и 2 работы [3] вытекает следствие.

Следствие. *Для множества пар $\{\tau_k, n_k\}_1^{\infty}$, где $\tau_k \in \mathbb{C}$, $n_k \in \mathbb{N}$, существует мероморфная характеристическая функция с полюсами порядка n_k в точках τ_k тогда и только тогда, когда выполняются условия: в множестве $\{\tau_k\}_1^{\infty}$ есть точки $-i\alpha$ или $i\beta$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, такие, что $|\operatorname{Im}\tau_k| \geqslant \alpha$, если $\tau_k \in \{t : \operatorname{Im} t < 0\}$, $\operatorname{Im}\tau_k \geqslant \beta$, если $\tau_k \in \{t : \operatorname{Im} t \geqslant 0\}$; точки множества $\{\tau_k\}_1^{\infty}$ располагаются симметрично относительно мнимой оси или лежат на ней; точкой сгущения множества $\{\tau_k\}_1^{\infty}$ может быть лишь бесконечно удаленная точка: числа n_k, соответствующие точкам, лежащим на прямой $\operatorname{Im} t = -\alpha$, не превосходят числа m, соответствующего точке $-i\alpha$, числа n_k, соответствующие точкам, лежащим на прямой $\operatorname{Im} t = \beta$, не превосходят числа n, соответствующего точке $i\beta$, на числа n_k для остальных точек ограничений не налагается.*

Доказательство. Необходимость. Из следствий 7.1.1 и 7.1.2 в [1, с. 230] вытекает, что в множестве $\{\tau_k\}_1^{\infty}$ есть точки $-i\alpha$ или $i\beta$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, такие, что $|\operatorname{Im}\tau_k| \geqslant \alpha$, если $\tau_k \in \{t : \operatorname{Im} t < 0\}$; $\operatorname{Im}\tau_k \geqslant \beta$, если $\tau_k \in \{t : \operatorname{Im} t \geqslant 0\}$; точки множества $\{\tau_k\}_1^{\infty}$ располагаются симметрично относительно мнимой оси или лежат на ней. Так как функция мероморфная, то точкой сгущения системы $\{\tau_k\}_1^{\infty}$ может быть лишь бесконечно удаленная точка. Покажем, что числа n_k, соответствующие точкам, лежащим на прямой $\operatorname{Im} t = -\alpha$, не превосходят числа m, соответствующего точке $-i\alpha$.

Известно (см. [1]), что характеристическая функция, голоморфная в полосе $-\alpha < \operatorname{Im} t < \beta$, хребтовая в этой полосе, т. е. удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(\xi + i\eta)| \leqslant \varphi(i\eta) \quad \forall \xi \in \mathbb{R},\ \eta \in]-\alpha, \beta[. \tag{13}$$

Пусть $\operatorname{Im}\tau_k = -\alpha$, n_k — порядок τ_k. Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ справедливо представление

$$|\varphi(\tau_k + i\varepsilon)| = A(\varepsilon^{n_k})^{-1}(1 + a(\varepsilon)), \tag{14}$$

где $A \neq 0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} a(\varepsilon) = 0$. Для достаточно малых $\varepsilon > 0$ справедливо также представление

$$\varphi(-i\alpha + i\varepsilon) = B(\varepsilon^m)^{-1}(1 + b(\varepsilon)), \qquad (15)$$

где $B \neq 0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} b(\varepsilon) = 0$. Так как по свойству (13) $|\varphi(\tau_k + i\varepsilon)| \leqslant \varphi(-i\alpha + i\varepsilon)$ для любых достаточно малых $\varepsilon > 0$, то из (14) и (15) вытекает, что $m \geqslant n_k$.

Точно так доказывается, что числа n_k, соответствующие точкам, лежащим на прямой $\operatorname{Im} t = \beta$, не превосходят числа n, соответствующего точке $i\beta$. Необходимость, таким образом, доказана.

Достаточность. Существование искомой функции очевидно, если использовать следствие 2 из [3], доказанную теорему и рассуждения, идущие после формулы (11).

Следствие доказано.

1. *Лукач Е.* Характеристические функции.— М. : Наука, 1979.— 424 с.
2. *Шаршанова Г. А.* О мероморфных характеристических функциях с одним полюсом.— Укр. мат. журн., 1982, 34, № 5, 657—661 с.
3. *Гинзбург Б. Н., Шаршанова Г. А.* Об особенностях аналитических эрмитово-позитивных функций.— Теор. функц., функциональный анализ и их приложения, 1983, вып. 39, с. 25—31.

Харьков. гос. ун-т

Поступила в редакцию 20.08.81,
после переработки — 10.01.83