УДК 517.9

*Нгуен Донг Ань*

# Об одном методе решения уравнений Гамильтона — Якоби в аналитической механике

В работе изложено применение метода разложения по обобщенной циклической координате [1] к решению уравнений Гамильтона—Якоби, имеющих важное значение в аналитической механике [2].

1. Системы с многими степенями свободы. Рассмотрим консервативную голономную механическую систему с функцией Гамильтона $H(t, q_1, \ldots, q_{n+1}, p_1, \ldots, p_{n+1})$, где $q_1, q_2, \ldots, q_n, q_{n+1}$ — обобщенные лагранжевы координаты, $p_1, \ldots, p_{n+1}$ — обобщенные импульсы. Будем предлагать, что для рассматриваемой системы обобщенной циклической координатой является координата $q_{n+1}$, при этом разложение функции $H$ в ряд Маклорена по $q_{n+1}$ имеет вид

$$H(t, q_1, \ldots, q_{n+1}, p_1, \ldots, p_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} b_i(t, q_1, \ldots, q_n) p_i^2 + \alpha_0(t, q_1, \ldots, q_n) + \alpha_1(t, q_1, \ldots, q_n) q_{n+1} + \alpha_2(t, q_1, \ldots, q_n) q_{n+1}^2. \quad (1)$$

Соответствующее уравнение Гамильтона — Якоби будет иметь вид [2]

$$\partial s/\partial t + \sum_{i=1}^{n+1} b_i(t, q_1, \ldots, q_n)(\partial s/\partial q_i)^2 + \alpha_0(t, q_1, \ldots, q_n) + \alpha_1(t, q_1, \ldots, q_n) q_{n+1} + \alpha_2(t, q_1, \ldots, q_n) q_{n+1}^2 = 0. \quad (2)$$

По методу разложения по обобщенной циклической координате решение уравнения (1) будем искать в виде

$$s(t, q_1, \ldots, q_{n+1}) = \varphi_0(t, q_1, \ldots, q_n) + \varphi_1(t, q_1, \ldots, q_n) q_{n+1} + \varphi_2(t) q_{n+1}^2. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2) и сравнивая коэффициенты при $q_{n+1}^2$, $q_{n+1}$, $q_{n+1}^0$, получаем уравнения для $\varphi_0$, $\varphi_1$, $\varphi_2(t)$:

$$\begin{gathered} d\varphi_2(t)/dt + 4b_{n+1}(t, q_1, \ldots, q_n)\varphi_2^2(t) + \sum_{s=1}^{n} b_s(t, q_1, \ldots, q_n)(\partial\varphi_1/\partial q_s)^2 + \\ + \alpha_2(t, q_1, \ldots, q_n) = 0, \\ \partial\varphi_1/\partial t + 4\varphi_2(t) b_{n+1}(t, q_1, \ldots, q_n)\varphi_1 + \sum_{s=1}^{n} 2b_s(t, q_1, \ldots, q_n) \times \\ \times (\partial\varphi_0/\partial q_s)(\partial\varphi_1/\partial q_s) + \alpha_1(t, q_1 \ldots, q_n) = 0, \\ \partial\varphi_0/\partial t + b_{n+1}(t, q_1, \ldots, q_n)\varphi_1^2 + \sum_{s=1}^{n} b_s(t, q_1, \ldots, q_n)(\partial\varphi_0/\partial q_s)^2 + \\ + \alpha_0(t, q_1, \ldots, q_n) = 0. \end{gathered} \quad (4)$$

Система уравнений в частных производных (4) в общем случае может быть несовместимой, а ее условие совместимости является и условием применения метода разложения по обобщенной циклической координате к рассматриваемой механической системе. Отметим, что для случая, когда механическая система имеет одну степень свободы, система (4) будет системой обыкновенных дифференциальных уравнений, которая в данном случае всегда совместима.

2. Системы с двумя степенями свободы. Рассмотрим механическую систему со следующей функцией Лагранжа

$$Z(\dot{x}, \dot{y}, x, y) = (1/2)(m_1\dot{x}^2 + m_2\dot{y}^2) - \Pi(x, y). \quad (5)$$

Ее функция Гамильтона имеет вид

$$H(x, y, p_1; p_2) = \alpha p_1^2 + \beta p_2^2 + \Pi(x, y); \quad \alpha, \beta = \mathrm{const}. \tag{6}$$

Составим соответствующее уравнение Гамильтона — Якоби:

$$\partial s/\partial t + \alpha(\partial s/\partial x)^2 + \beta(\partial s/\partial y)^2 + \Pi(x, y) = 0. \tag{7}$$

Отсюда (см. [2])

$$s = -ht + W(x, y); \quad h = \mathrm{const}, \tag{8}$$

где

$$\alpha(\partial W/\partial x)^2 + \beta(\partial W/\partial y)^2 + \Pi(x, y) = h. \tag{9}$$

Сделаем замену переменных

$$\begin{gathered} x = a\cos\varphi, \quad y = -\omega a\sin\varphi, \\ R(a, \varphi) = W(a\cos\varphi, -\omega a\sin\varphi), \end{gathered} \tag{10}$$

где $\omega$ — пока произвольная постоянная. Имеем

$$\begin{gathered} \partial W/\partial x = (\partial R/\partial a)\cos\varphi - (\partial R/\partial\varphi)\sin(\varphi/a), \\ \partial W/\partial y = (-\partial R/\partial a)\sin(\varphi/\omega) - (\partial R/\partial\varphi)\cos(\varphi/a\omega). \end{gathered} \tag{11}$$

Подставив (11) в уравнение (9), после выбора

$$\omega^2 = \beta/\alpha, \tag{12}$$

получим следующий стандартный вид уравнения Гамильтона — Якоби (9):

$$\alpha(\partial R/\partial a)^2 + \alpha/a^2(\partial R/\partial\varphi)^2 + \sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i(\varphi)a^i = h, \tag{13}$$

где

$$\Pi(a\cos\varphi, -\omega a\sin\varphi) = \sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i(\varphi)a^i. \tag{14}$$

Решение уравнения (13) будем искать в виде

$$R(a, \varphi) = \sum_{\sigma=1}^{\infty}\mu_\sigma(\varphi)a^\sigma. \tag{15}$$

Подставляя (15) в уравнение (13), получаем систему дифференциальных уравнений для $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n+1}, \ldots$:

$$\begin{gathered} (d\mu_1/d\varphi)^2 + \mu_1^2 = (1/\alpha)(h - \alpha_0(\varphi)), \\ (2d\mu_1/d\varphi)(d\mu_2/d\varphi) + 4\mu_1\mu_2 = -\alpha_1(\varphi)/\alpha, \\ (2d\mu_1/d\varphi)(d\mu_3/d\varphi) + 6\mu_1\mu_3 = (-1/\alpha)[\alpha_2(\varphi) + \alpha(d\mu_2/d\varphi)^2 + 4\alpha\mu_2^2], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (2d\mu_1/d\varphi)(d\mu_{n+1}/d\varphi) + 2(n+1)\mu_1\mu_{n+1} = (-1/\alpha)\times \\ \times\left[\alpha_n(\varphi) + \alpha\sum_{\gamma=2}^{\gamma+\lambda=n+2}\sum_{\lambda=2}(\gamma\lambda\mu_\gamma\mu_\lambda + (d\mu_\gamma/d\varphi)(d\mu_\lambda/d\varphi)\right], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ n = 1, 2, \ldots. \end{gathered} \tag{16}$$

Отметим интересное свойство системы (16). Во многих случаях эта система допускает решение вида $\mu_l(\varphi) = f_l(\varphi)$, $\mu_k(\varphi) = 0$, $l = \overline{1, N}$; $k \geqslant N + 1$. Отсюда и из (15) получим

$$R(a, \varphi) = \sum_{l=1}^{N} f_l(\varphi)a^l.$$

В частности при $\Pi(a\cos\varphi, -\omega a\sin\varphi) = \alpha_0(\varphi)$, будем иметь $R(a$
$= \mu_1(\varphi) a$.

3. Пример. Рассмотрим движение стержня во вращательной
кости (см. [2]). Предположим, что стержень совершает движение по гл
плоскости, вращающейся с угловой скоростью $\omega$ вокруг горизонтально
лежащей в самой плоскости. Пусть $0\xi$, $0\eta$ — оси, связанные с плоско
при этом за ось $0\xi$ возьмем неподвижную горизонтальную ось враще
ось $0\eta$ расположим ниже горизонтальной оси под углом $\omega t$ к ней. За
щенные координаты возьмем $\xi, \eta, \theta$, где $\xi, \eta$ — координаты центра тя
стержня, $\theta$ — угол наклона стержня к оси $0\xi$ в некоторый момент вре
Обозначим $\xi = q_1$, $\theta = b_2$, $\eta = q_3$. Согласно [2] функция Гамильтон
дет иметь вид

$$H(q, p) = (1/2)(p_1^2 + (1/k^2)p_2^2 + p_3^2) - (1/2)\omega^2 q_3^2 - g\sin\omega t q_3 - (1/2)k^2\omega^2$$

Видим, что для рассматриваемой системы обобщенной циклическо
ординатой является координата $q_3$. Имеем

$$b_1 = b_3 = 1/2, \quad b_2 = (1/2)k^2, \quad \alpha_2 = (-1/2)\omega^2, \quad \alpha_1 = -g\sin\omega t,$$
$$\alpha_0 = (-1/2)k^2\omega^2\sin q_2.$$

Подставив (18) в систему (4), получим

$$d\varphi_2/dt + 2\varphi_2^2 + (1/2)(\partial\varphi_1/\partial q_1) + (1/2)k^2(\partial\varphi_1/\partial q_2) - (1/2)\omega^2 = 0,$$

$$\partial\varphi_1/\partial t + 2\varphi_2\varphi_1 + (\partial\varphi_0/\partial q_1)(\partial\varphi_1/\partial q_1) + (1/2)k^2(\partial\varphi_0/\partial q_2)(\partial\varphi_1/\partial q_2) - g\sin\omega$$

$$\partial\varphi_0/\partial t + (1/2)\varphi_1^2 + (1/2)(\partial\varphi_0/\partial q_1)^2 + (1/2)k^2(\partial\varphi_0/\partial q_2)^2 +$$
$$+ (1/2)k^2\omega^2\sin^2 q_2 = 0.$$

Из первого уравнения системы (19), принимая во внимание, что фу
$\varphi_2(t)$ зависит только от времени, находим

$$\varphi_1 = \varphi_1(t), \quad \varphi_2 = (1/2)\omega.$$

Отсюда следует, что

$$\varphi_1 = \lambda_1\exp\{-\omega t\} + (g/2\omega)(\sin\omega - \cos\omega t).$$

Подставляя полученное выражение для $\varphi_1$ в третье уравнение системы
имеем

$$\partial\varphi_0/\partial t + (1/2)(\lambda_1 e^{-\omega t} + (g/2\omega)(\sin\omega t - \cos\omega t))^2 + 1/2(\partial\varphi_0/\partial q_1)^2 +$$
$$+ (1/2)k^2(\partial\varphi_0/\partial q_2)^2 - (1/2)k^2\omega^2\sin^2 q_2 = 0.$$

Уравнение (22) легко решается методом разделения переменных. По

$$\varphi_0(t, q_1, q_2) = -(1/2)\int_0^t(\lambda_1 e^{-\omega t} + (g/2\omega)(\sin\omega t - \cos\omega t))^2 dt +$$
$$+ (1/2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)t + \lambda_2 q_1 + k\int_0^{q_2}\sqrt{\lambda_3^2 + k^2\omega^2\sin^2 q_2}\,dq_2.$$

Итак, полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби, соотве
ющего функции Гамильтона (17), равен

$$S(t, q_1, q_2, q_3) = (1/2)\omega q_3^2 + \{\lambda_1\exp\{-\omega t\} + g/2\omega(\sin\omega t - \cos\omega t)\}q_3$$
$$+ (1/2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)t - (1/2)\int_0^t(\lambda_1 e^{-\omega t} + (g/2\omega)(\sin\omega t - \cos\omega t))^2 dt +$$
$$+ \lambda_2 q_1 + k\int_0^{q_2}\sqrt{\lambda_3^2 + k^2\omega^2\sin^2 q_2}\,dq_2,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — произвольные постоянные (см. [2]).

1. *Нгуен Донг Ань.* К вопросу решения уравнений Фоккера — Планка — Колмогорова методом разложения в ряд Маклорена по обобщенной циклической координате.— В кн.: Механика. Ханой, 1979, № 1, 2, с. 28—36.
2. *Парс Л.* Аналитическая динамика.— М. : Наука, 1971.— 636 с.

НЦНИ Вьетнама, Ин-т механики

Поступила в редакцию
26.02.82