УДК 517.9

М. Волленберг, Х. Найдхардт, В. Д. Кошманенко

К задаче рассеяния в теории сингулярных возмущений самосопряженных операторов

1. Пусть в абстрактном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ заданы самосопряженный оператор $H_0 \geqslant 0$ и его возмущение в виде положительной билинейной формы $\tau(\cdot,\cdot)$, которая сингулярна. Предполагается, что области определения $D(H_0)$ и $Q(\tau)$ имеют в $\mathfrak{H}$ плотное пересечение Φ. Сингулярность возмущения означает [1], что для каждого $\varphi \in \Phi$ существует *последовательность* $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n \in \Phi$, такая, что $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathfrak{H}$, а $\tau[\varphi_n] \equiv \tau(\varphi_n, \varphi_n) \to 0$, $n \to \infty$. Построение по H_0 и τ возмущенного оператора H, а также задача рассеяния для пары H_0, H — в общем случае открытые проблемы. Они характерны, например, для квантовой теории поля.

В этой статье изучаются отдельные вопросы теории рассеяния в паре пространств состояний с неограниченным (и, возможно, незамыкаемым) оператором отождествления. При этом предполагается, что уже задана некоторая реализация оператора H в новом гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}'$, в которое множество Φ вложено плотным образом и принадлежит $D(H)$. Отображение $J: \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}'$, определенное на Φ как тождественное преобразование, называется оператором отождествления. Из-за его возможной неограниченности (незамыкаемости) возникают различные трудности, начиная уже с самого определения волновых операторов и установления их основных свойств. Напомним, что в обычной теории рассеяния в паре пространств [2] оператор отождествления J, как правило, предполагается ограниченным.

В работе введено определение волновых операторов без предположения об ограниченности J и изучены следующие вопросы: существование и замыкаемость волновых операторов, принцип инвариантности, применимость ядерных методов, метод ортогонального расширения. Доказательства приводимых утверждений изложены в [3, 4]. Используемые обозначения в основном совпадают с принятыми в книге [5].

2. Пусть пространства $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}'$, а также операторы H_0, H и J — те же, что и вначале. Зафиксируем линейное подмножество $D \subset \Phi$ и предположим, что

$$D \text{ плотно в } P_0^{ac}\mathfrak{H} \text{ и } \exp(-itH_0)\, D \subset D, \tag{1}$$

где $t \in \mathbb{R}^1$, а P_0^{ac} (P^{ac}) — проектор на абсолютно непрерывное подпространство оператора H_0 (H).

Определение 1. *Пусть выполнено условие* (1) *и для каждого* $\varphi \in D$ *существуют пределы*

$$s - \lim_{t \to \pm\infty} \exp(itH)\, J \exp(-itH_0)\, P_0^{ac}\varphi = \varphi^{\pm}. \tag{2}$$

Тогда отображения

$$W_{\pm} \equiv W_{\pm}(H, H_0; J, D): P_0^{ac}\varphi \to \varphi^{\pm}$$

назовем волновыми операторами для системы $\{H_0, H; J, D\}$.

Подчеркнем факт зависимости операторов $W_{\pm}$ от выбора множества D, что является следствием отсутствия обычного требования ограниченности J. По этой же причине операторы $W_{\pm}$ могут оказаться незамыкаемыми, даже если J замыкаем. Примеры, иллюстрирующие эти эффекты, приведены в [3].

Нетрудно, однако, указать условия, обеспечивающие замкнутость волновых операторов. Пусть, например, для некоторых натуральных n и m оператор

$$R^n(z)\, J R_0^m(z) \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}'), \tag{3}$$

т. е. ограничен, где $R(z) = (z - H)^{-1}$, $R_0(z) = (z - H_0)^{-1}$ $(\operatorname{Im} z \neq 0)$. Полагая $D \subseteq D((z - H_0)^m)$, легко видеть, что определение 1 можно редуцировать к определению волновых операторов с ограниченным оператором отождествления. Таким образом, мы имеем предложение.

Предложение 1. *Если выполнены указанные выше условия и волновые операторы* $W_{\pm}(H, H_0;, J, D)$ *существуют, то они замыкаемы.*

В ряде конкретных задач (например, в теории рассеяния Хаага — Рюэля), несмотря на незамыкаемость J, операторы $W_{\pm}$ оказываются ограниченными. Это послужило основанием для введения требования ограниченности $W_{\pm}$ в самом их определении в работах [6, 7]. Но в действительности, как показано в [3], волновые операторы обладают многими обычными свойствами лишь при условиях, обеспечивающих их замкнутость. В частности, справедливо утверждение.

Предложение 2. *Пусть* $W_{\pm}$ *существуют и замыкаемы. Тогда:*

а) $\overline{R(W_{\pm})} \subset P^{ac}\mathfrak{H}'$;

б) $\overline{R(W_{\pm})}$ *инвариантно относительно действия* H;

в) *(переплетающее свойство)* $\varphi(H_0)\, D(\overline{W}_{\pm}) \subseteq D(\overline{W}_{\pm})$ *и* $\varphi(H)\, \overline{W}_{\pm} u =$

$= \overline{W}_{\pm}\varphi(H_0)$ *и* $(u \in D(\overline{W}_{\pm}))$ *для любой ограниченной борелевской функции* φ *(здесь* $\overline{W}_{\pm}$ *— замыкание* $W_{\pm}$*).*

Отметим также, что для доказательства существования операторов $W_{\pm}$ можно применять аналог известного критерия Кука (см. [6]). Ниже (теорема 6) он приведен в частном варианте.

3. Пусть $\varphi(x)$ — произвольная допустимая функция (определение см. в [5]) на $\mathbb{R}^{\wedge}$. Введем операторы $W_{\pm,\varphi} = W_{\pm}(\varphi(H)), \varphi(H_0); J, D)$, предполагая, что они существуют. Говорят, что выполняется принцип инвариантности в слабой форме, если обе пары волновых операторов $W_{\pm}$ и $W_{\pm,\varphi}$ существуют и справедливо равенство

$$W_{\pm} = W_{\pm,\varphi}. \tag{4}$$

Если же из существования $W_{\pm}$ следует существование $W_{\pm,\varphi}$ и равенство (4), то принцип инвариантности выполняется в сильной форме. Приводимые ниже результаты показывают, что неограниченность (незамыкаемость) J не исключает наличия принципа инвариантности как в слабой, так и в сильной форме. Требование замыкаемости волновых операторов при этом существенно.

Предложение 3. *Пусть* $D \subseteq D((z - H_0)^m)$, $\operatorname{Im} z \neq 0$. *Предположим, что существуют волновые операторы* $W_{\pm}(H, H_0; J, D)$ *и* $W_{\pm}(\varphi(H), \varphi(H_0); J, D)$ *и, кроме того, выполняется условие* (3).

Тогда справедливо равенство (4).

Следующая теорема устанавливает принцип инвариантности в сильной форме, естественно, при более жестких ограничениях на J.

Теорема 1. *Предположим существование и замыкаемость операторов* $W_{\pm}$. *Предположим далее, что существует оператор* $C \in B(\mathfrak{H})$, *коммутирующий с* H_0 *и такой, что* $JC \in B(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}')$ *и множество* $\tilde{D}$ *(определяемое равенством* $D = C\tilde{D}$*) удовлетворяет* (1) *для* H_0 *и* $\varphi(H_0)$. *Предположим, наконец, что* $\forall\ u \in D$:

а) $\exists w - \lim\limits_{t\to\pm\infty} P^{ac}\exp(itH)J\exp(-itH_0)$;

б) $\exists \lim\limits_{t\to\pm\infty} \| J\exp(-it\varphi(H))u\| = c_u^{\pm} < \infty$.

Тогда волновые операторы $W_{\pm,\varphi}$ *существуют и справедливо равенство* (4).

Сформулируем основной результат этого пункта. Пусть $W_{\pm}$ существуют и ограничены. Предположим, что $D \subset \mu_\infty(H_0)$, где $\mu_\infty(A)$ обозначает множество векторов u, обладающих конечной нормой $|||u|||$ (ее определение см. в [5], с.670), и $\forall u \in D$ существует конечный интервал Δ, такой, что $u = E_0(\Delta)u$, где $E_0(\Delta)$ — разложение единицы оператора H_0. Предположим еще, что: а) $J\exp(-itH_0)u$ сильно непрерывно зависит от t; б) $\int\limits_0^{\pm\infty} \|(J - W_{\pm})\exp(-itH_0)u\|^2 dt < \infty$ для любого $u \in D$; в) оператор J определен на $D' = \operatorname{span}\{\alpha(H_0)u \mid u \in D,\ \alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)\}$ и обладает свойством: если $\alpha_n \to \alpha$ в C_0^∞-топологии и $J\alpha_n(H_0)u$ сильно сходится, то $s-\lim J\alpha_n(H_0)u = J\alpha(H_0)u$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *При выполнении перечисленных условий для каждой допустимой функции* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ *существуют волновые операторы* $W_{\pm,\varphi}$ *и выполняется равенство* (4).

Отметим, что для выполнения условия б) достаточно, например, потребовать оценки

$$\|(J - W_{\pm})\exp(-itH_0)u\| < c_u(1 + |t|)^{-((1/2)+\varepsilon)},\ \varepsilon > 0.$$

Утверждение теоремы 2 остается также в силе, если вместо условия б) предположить, что функция $u(t) = \exp(itH)J\exp(-itH_0)u$, $u \in D$, сильно дифференцируема, $\|d/dt u(t)\| \in L_1(\mathbb{R}^1 \setminus [-1, 1]) \cap L_2(\mathbb{R}^1 \setminus [-1, 1])$ и $|t|^\alpha \|d/dt u(t)\| \in L(\mathbb{R}^1 \setminus [-1, 1])$, $\alpha > 0$.

Теорема 2 имеет непосредственное приложение в теории рассеяния Хаага—Рюэля. Напомним (подробности см. в [8, 9]), что эта теория допускает формулировку на языке волновых операторов. При специальном выборе оператора отождествления (см. [8]) из аксиоматических предположений вытекает справедливость оценки

$$\| W_{\pm} u - \exp(itH) J \exp(-itH_0) u \| \leqslant c_N (1 + |t|)^{-N}.$$

Другие условия теоремы 2 также легко проверяются. Таким образом, в теории рассеяния Хаага—Рюэля для любой допустимой функции $\varphi \in C^{\infty}$ существуют операторы $W_{\pm,\varphi}$, и они совпадают с $W_{\pm}$.

4. Как известно, многие результаты и в обычной теории, и в теории рассеяния в паре пространств с ограниченным оператором отождествления получены с помощью ядерных методов. Естественно возникает вопрос об их применимости в нашем случае. Приведем здесь некоторые результаты в этом направлении. Для их формулировки введем следующие ограничения.

Потребуем, чтобы $R_0(z) D \subset D$, и предположим, что оператор $L = R(z) J - J R_0(z)$ как оператор из $P_0^{\mathrm{ac}} \mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}'$ замыкаем и его замыкание— ядерный оператор. Это основное условие. Кроме того, введем условие технического характера: функция $(J \exp(-itH_0) R_0(z) u, v)'$, $u \in D$, $v \in \mathfrak{H}'$, — абсолютно непрерывна и ее производная по t почти всюду равна $-i (J \exp \times \times (-itH_0) H_0 R_0(z) u, v)'$, где штрих указывает на скалярное произведение в $\mathfrak{H}'$. Введем еще обозначения: $D_{\infty} = \{u \in D \mid \sup_{t \geqslant 0} \| J \exp(-itH_0) u \| < +\infty\}$ и $\mu_S^0 = \bigcup_{\Delta \in F} E_0(\Delta) \mathfrak{H}$, где $S \subset \mathbb{R}^1$ — борелевское множество нулевой лебеговой меры, такое, что проектор на сингулярное подпространство $P^s(H) = E_H(S)$, а F — совокупность всех замкнутых подмножеств Δ, таких, что $\Delta \cap S = \varnothing$. При этих предположениях, а также при выполнении условия (1), справедливы следующие утверждения.

Теорема 3. *Для всех* $u \in \tilde{D} \equiv D_{\infty} \cap (z - H_0)^{-2} \mu_{\infty}(H_0) \cap \mu_S^0$ *существуют пределы* $w - \lim \exp(itH) J \exp(-itH_0) u$, $t \to \pm\infty$. *Если* $\tilde{D}$ *плотно в* $P_1^{\mathrm{ac}} \mathfrak{H}$, *то волновые операторы* $W_{\pm}(H, H_0, J, \tilde{D})$ *существуют в слабом смысле.*

Теорема 4. *Если*

$$\sup_{t \geqslant 0} \| J R_0^2(z) \exp(-itH_0) u - \exp(itH) J R_0^2(z) u \| \leqslant c \| u \|, \quad c > 0, \quad u \in D,$$

то волновые операторы $W_{\pm}(H, H_0; J, \tilde{D})$ *существуют в сильном смысле; здесь* $\tilde{D} = D \cap D(H_0^2)$.

Теорема 5. *Пусть*

$$\breve{D} = \left\{ u \in D \,\middle|\, \left| \int_0^{\infty} (J \exp(-itH_0) u, v)' \right|^2 dt \leqslant c_u (\| v \|')^2, \; c_u > 0, \; v \in \mathfrak{H}' \right\}.$$

Если $\tilde{D} = \breve{D} \cap R_0^2 \mu_{\infty}^0$ *плотно в* $P^{\mathrm{ac}} \mathfrak{H}$, *то существуют волновые операторы* $W_{\pm}(H, H_0; J, \tilde{D})$.

5. Рассмотрим случай, когда возмущенный оператор H определен методом ортогонального расширения [10]. Это означает, что $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}_{\tau}$ ($\mathfrak{H}_{\tau}$ построено из Φ по квазискалярному произведению $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tau} = \tau(\cdot, \cdot)$) и H— одно из самосопряженных расширений в $\mathfrak{H}'$ симметрического оператора $H' : \{\varphi, \varphi_{\tau}\} \to \{H_0 \varphi, 0\}$ ($\varphi \in \Phi$, φ_{τ} — образ φ в $\mathfrak{H}_{\tau}$). В дальнейшем предполагается, что множество $\operatorname{Ker} \tau$ плотно в $\mathfrak{H}_{+1}$ (откуда следует сингулярность формы τ как в $\mathfrak{H}_{+1}$, так и в $\mathfrak{H}$) и что τ замыкаема в $\mathfrak{H}_{+2}$, где $\mathfrak{H}_{+j}$, $j =$

$= 1, 2$, получены из $D(H_0)$ введенчем скалярных произведений $(\cdot, \cdot)_j = ((H_0 + 1)^j \cdot, \cdot)$.

Предложение 4. *Пусть* $H_0 \geqslant 0$ и Φ — *область существенной самосопряженности для* H_0.

Тогда замыкание $\overline{H}'$ *оператора* H' — *симметрический оператор с индексами дефекта, равными* $\dim \mathfrak{H}_\tau$, *а его расширение по Фридрихсу совпадают с оператором* $H_F = H_0 \oplus 0$.

В этом случае при выполнении дополнительного условия

$$\lim_{t \to \pm\infty} \tau [\exp(-itH_0) u] = 0, \quad u \in D, \tag{5}$$

все вопросы, связанные с операторами $W_\pm(H, H_0; J, D)$, легко сводятся к аналогичным вопросам для обычных волновых операторов $W_\pm(H, H_F)$ в силу следующей теоремы.

Теорема 5. *Пусть выполнены все предположения этого пункта, а также условие* (1).

Тогда волновые операторы $W_\pm(H, H_0; J, D)$ *существуют, полны и изометричны, если и только если существуют, полны и изометричны операторы* $W_\pm(H, H_F)$.

Доказательство сводится к применению цепного правила.

Приведем достаточный признак существования волновых операторов, аналогичный известному критерию Кука.

Теорема 6. *Пусть множество* D *удовлетворяет условию* (1), *функция* $\exp(itH) J \exp(-itH_0) u$ *сильно дифференцируема и ее производная равна* $i \exp(itH)(HJ - JH_0) \exp(-itH_0) u$, $u \in D$.

Тогда для существования волновых операторов $W_\pm(H, H_0; J, D)$ *достаточно, чтобы для всех* $u \in \tilde{D}$ $(\tilde{D} = H_0 D)$

$$\int_{R^1} \tau^{1/2} [\exp(-itH_0) u] \, dt < \infty. \tag{6}$$

Подчеркнем, что условие (6) при выполнении других предварительных условий гарантирует существование волновых операторов $W_\pm(H, H_0; J, D)$ для любого самосопряженного расширения оператора $\overline{H'}$.

Отметим, что и без ограничений типа (5) или (6) на возмущающую билинейную форму всегда можно указать такие самосопряженные расширения H оператора $\overline{H'}$, для которых существуют волновые операторы $W_\pm(H, H_0; J, D)$.

Теорема 7. *Имеется несчетное множество полуограниченных снизу самосопряженных расширений* H *оператора* H', *для которых* $W_\pm(H, H_0; J, D)$ *существуют, частично изометричны и полны.*

Доказательство основано на теории самосопряженных расширений ограниченных снизу операторов [11]. Нужные условия, скажем ядерного характера, можно обеспечить соответствующим выбором вспомогательного оператора индексирующего расширения.

1. *Кошманенко В. Д.* Замыкаемые расширения билинейных форм с выходом в новое пространство.— Мат. заметки, 1981, 30, вып. 6, с. 857—864.
2. *Kato T.* Scattering theory with two Hilbert spaces.— J. Functional Anal., 1967, 1, N 3, p. 342—368.
3. *Koshmanenko V. D., Neidhardt H., Wollenberg M.* On the scattering theory with unbounded identification operator.— Preprint, Berlin : Inst. für Math., 1983.— 41 p.
4. *Koshmanenko V. D., Neidhardt H., Wollenberg M.* Singular Perturbations and Method of Orthogonal Extensions.— Preprint, Berlin : Inst. für Math., 1983.— 31 p.
5. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М. : Мир, 1972. — 1063 с.
6. *Koshmanenko V. D.* Scattering theory with different state spaces of perturbed and free system.— Rep. on Math. Phys., 1978, 14, N 2, p. 186—206.
7. *Кондратьев Ю. Г., Кошманенко В. Д.* Задача рассеяния для операторов, ассоциированных с формами Дирихле.— Докл. АН СССР, 1982, 267, № 2, с. 285—288.
8. *Baumgärtel H., Wollenberg M.* Mathematical Scattering Theory.—Berlin : Acad. Verlag, 1983.— 449 p.

9. *Кошманенко В. Д.* Теория рассеяния Хаага—Рюэля как теория рассеяния в различн
пространствах состояний. — Теорет. и мат. физ., 1979, 38, № 2, с. 163—178.
10. *Кошманенко В. Д.* Операторное представление для незамыкаемых квадратичных фо
и задача рассеяния.— Докл. АН СССР, 1979, 252, № 2, с. 295—298.
11. *Faris W. G.* Self-Adjoint Operators.— Lect. Notes in Math.— Berlin — Heidelberg
New York : Springer — Verlag, 1975, 433.— 115 p.

Ин-т матем. АН ГДР, Берлин
Ин-т матем. АН УССР, Киев

Поступила в редакци
22.06.