УДК 517.95;957

Ю. И. Ковач, С. А. Бойцун

К вопросу об обобщенной задаче Гурса для нелинейного дифференциального уравнения

Приведенные ниже алгоритмы распространяются на системы нелинейных дифференциальных уравнений и на различные другие математические задачи, приближенное решение которых ищется двусторонним методом.

Рассмотрим для простоты нелинейное уравнение

$$\partial^{2n}U(x, y)/\partial x^n \partial y^n = f[x, y, \lambda, U] \equiv f(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, U(x, y),$$
$$\partial U(x, y)/\partial x, \ldots, \partial^{2n-\mu-\nu}U(x, y)/\partial x^{n-\mu}\partial y^{n-\nu}, \quad 0 < \mu + \nu \leqslant 2n, \tag{1}$$

с условиями

$$\partial^{2s-2}U(x_0, y)/\partial x^{s-1}\partial y^{s-1} = \varphi_s(y), \quad \partial^{2s-2}U(x, y_0)/\partial x^{s-1}\partial y^{s-1} = \varphi_s^*(x),$$
$$\varphi_s(y_0) = \varphi_s^*(x_0), \tag{2}$$

$s = \overline{1, n}$; $\mu = 0, 1, 2, \ldots, n$; $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$; $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$ — параметры. Обозначим [1]

$$\int_{x_0}^{x} d\xi \int_{y_0}^{y} \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{(y-\eta)^{n-1}}{(n-1)!} g(\xi, \eta, \lambda)\, d\eta = Hg, \tag{3}$$

$$F(x, y) = \varphi_1^*(x) + \varphi_1(y) - \varphi_1(y_0) - \sum_{k=2}^{n} \frac{(x-x_0)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{(y-y_0)^{k-1}}{(k-1)!} \varphi_k(y_0) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} \left\{ \frac{(y-y_0)^{k-1}}{(k-1)!} \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{k-2}}{(k-2)!} \varphi_k^*(\xi)\, d\xi + \right.$$

$$+\frac{(x-x_0)^{k-1}}{(k-1)!}\int\limits_{y_0}^{y}\frac{(y-\eta)^{k-2}}{(k-2)!}\varphi_k(\eta)\,d\eta\Big\},\tag{4}$$

$$S[Z_p-V_p]=\sum_{\mu,\nu}N_{n-\mu,n-\nu}\,\mathrm{sign}\,[(x-x_0)^{\mu}(y-y_0)^{\nu}]\,\frac{\partial^{2n-\mu-\nu}}{\partial x^{n-\mu}\partial y^{n-\nu}}\{Z_p[x,y,\lambda]-$$

$$-V_p[x,y,\lambda]\},\quad \sum_{\mu,\nu}=\sum_{\mu=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{n},\quad \mu+\nu>0,\tag{5}$$

$$Z_p[x,y,\lambda]\equiv Z_p(x,y,\lambda_1,\ldots,\lambda_m),\quad V_p[x,y,\lambda]\equiv V_p(x,y,\lambda_1,\ldots\lambda_m),$$

$$\Omega[C_p\varphi_p+D_p\psi_p-C_{p+1}\varphi_{p+1}-D_{p+1}\psi_{p+1}]=f[x,y,\lambda,C_p\varphi_p+D_p\psi_p]-$$

$$-f[x,y,\lambda,C_{p+1}\varphi_{p+1}+D_{p+1}\psi_{p+1}]+S[C_p\varphi_p+D_p\psi_p-C_{p+1}\varphi_{p+1}-D_{p+1}\psi_{p+1}],$$

$$\Phi[C_p\varphi_p+D_p\psi_p-C_{p+1}\varphi_{p+1}-D_{p+1}\psi_{p+1}]=f[x,y,\lambda,C_p\varphi_p+D_p\psi_p]-$$

$$-f[x,y,\lambda,C_{p+1}\varphi_{p+1}+D_{p+1}\psi_{p+1}]-S[C_p\varphi_p+D_p\psi_p-C_{p+1}\varphi_{p+1}-D_{p+1}\psi_{p+1}],\tag{6}$$

где $S[C_p\varphi_p+D_p\psi_p-C_{p+1}\varphi_{p+1}-D_{p+1}\psi_{p+1}]$ задается формулой (5).

Рассмотрим области

$$\overline{R}=\{x_0-\alpha\leqslant x\leqslant x_0+\alpha,\ y_0-\beta\leqslant y\leqslant y_0+\beta,\ \alpha>0,\ \beta>0\},$$

$$\overline{E}=\{\lambda_1^{(0)}\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda_1^{(1)},\ \lambda_2^{(0)}\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_2^{(1)},\ \ldots,\lambda_m^{(0)}\leqslant\lambda_m\leqslant\lambda_m^{(1)}\}.$$

Пусть $\overline{R}=\overline{R}_1^*\cup\overline{R}_2^*\cup\overline{R}_3^*\cup\overline{R}_4^*$, где

$$\overline{R}_1^*=\{x_0\leqslant x\leqslant x_0+\alpha,\ y_0\leqslant y\leqslant y_0+\beta\},\quad \overline{R}_2^*=\{x_0\leqslant x\leqslant x_0+\alpha,$$

$$y_0-\beta\leqslant y\leqslant y_0\},\quad \overline{R}_3^*=\{x_0-\alpha\leqslant x\leqslant x_0,\ y_0-\beta\leqslant y\leqslant y_0\},$$

$$\overline{R}_4^*=\{x_0-\alpha\leqslant x\leqslant x_0,\ y_0\leqslant y\leqslant y_0+\beta\}.$$

Пусть в некоторой замкнутой области $\overline{D}$, проекция которой на плоскость $x0y$ — область $\overline{R}$ ($\overline{R}\cup\overline{E}\subset\overline{D}$), правая часть $f[x,y,\lambda,U]$ уравнения (1) — непрерывная функция относительно аргументов x,y и параметров λ_1, $\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ и существуют ограниченные производные первого порядка, удовлетворяющие условию

$$\partial f/\partial p_{n-\mu,\,n-\nu}(x,y)\,|\leqslant N_{n-\mu,n-\nu},\quad p_{n-\mu,n-\nu}=\partial^{2n-\mu-\nu}U(x,y)/\partial x^{n-\mu}\partial y^{n-\nu},\tag{7}$$

а функции $Z_1(x,y)$, $V_1(x,y)$, удовлетворяют условию (2) и неравенствам

$$\partial^{2n}V_1(x,y)/\partial x^n\partial y^n\leqslant\partial^{2n}Z_1(x,y)/\partial x^n\partial y^n,\quad (x,y)\in\overline{R};$$

$$\partial^{2n-\mu-\nu}V_1(x,y)/\partial x^{n-\mu}\partial y^{n-\nu}\leqslant\partial^{2n-\mu-\nu}Z_1(x,y)/\partial x^{n-\mu}\partial y^{n-\nu},$$

$$(x,y)\in\overline{R}_1^*;\tag{8}$$

$$\partial^{2n-\mu-\nu}V_1(x,y)/\partial x^{n-\mu}\partial y^{n-\nu}\underset{(\leqslant)}{\geqslant}\partial^{2n-\mu-\nu}Z_1(x,y)/\partial x^{n-\mu}\partial y^{n-\nu}$$

при ν нечетных (четных) и μ произвольных в области $\overline{R}_2^*$, при $(\mu+\nu)$ нечетных (четных) в области $\overline{R}_3^*$, при μ нечетных (четных) и ν произвольных в области $\overline{R}_4^*$. Практический метод построения функций $Z_1(x,\ y)$, $V_1(x,\ y)$, удовлетворяющих условию (2) и неравенствам (8), приведен в [1].

1. Пусть неотрицательные параметры R_p, Q_p, D_p, C_p удовлетворяют условиям

$$0\leqslant R_p<Q_p,\quad 0\leqslant D_p<C_p,\quad R_p+Q_p=1,\quad D_p+C_p=1,$$
$$p=1,2,3,\ldots,\tag{9}$$

и функции $Z_1(x, y)$, $V_1(x, y)$, удовлетворяющие условию (2) и неравенствам (8), такие, что при $D_1 = 0$, $C_1 = 1$ справедливы соотношения

$$\frac{\partial^{2n} Z_1(x, y)}{\partial x^n \partial y^n} - \frac{1}{2} f[x, y, \lambda, C_1 Z_1 + D_1 V_1] - \frac{1}{2} f[x, y, \lambda, C_1 V_1 + D_1 Z_1] - - \frac{1}{2}(C_1 - D_1) S[Z_1 - V_1] = \alpha_1[x, y, \lambda] \geqslant 0,$$
$$\frac{\partial^{2n} V_1(x, y)}{\partial x^n \partial y^n} - \frac{1}{2} f[x, y, \lambda, C_1 V_1 + D_1 Z_1] - \frac{1}{2} f[x, y, \lambda, C_1 Z_1 + D_1 V_1] + + \frac{1}{2}(C_1 - D_1) S[Z_1 - V_1] = \beta_1[x, y, \lambda] \leqslant 0. \tag{10}$$

Построим последовательности функций $\{Z_{p+1}[x, y, \lambda]\}$, $\{V_{p+1}[x, y, \lambda]\}$ по закону

$$Z_{p+1}[x, y, \lambda] = Q_p Z_p[x, y, \lambda] + R_p V_p[x, y, \lambda] - \sigma_p[x, y, \lambda],$$
$$V_{p+1}[x, y, \lambda] = Q_p V_p[x, y, \lambda] + R_p Z_p[x, y, \lambda] - \omega_p[x, y, \lambda], \tag{11}$$

$$\sigma_p[x, y, \lambda] = H(Q_p \alpha_p + R_p \beta_p),$$
$$\omega_p[x, y, \lambda] = H(Q_p \beta_p + R_p \alpha_p), \tag{12}$$

$$\alpha_p[x, y, \lambda[= \frac{\partial^{2n} Z_p[x, y, \lambda]}{\partial x^n \partial y^n} - \frac{1}{2} f[x, y, \lambda, C_p Z_p + D_p V_p] - - \frac{1}{2} f[x, y, \lambda, C_p V_p + D_p Z_p] - \frac{1}{2}(C_p - D_p) S[Z_p - V_p],$$
$$\beta_p[x, y, \lambda] = \frac{\partial^{2n} V_p[x, y, \lambda]}{\partial x^n \partial y^n} - \frac{1}{2} f[x, y, \lambda, C_p V_p + D_p Z_p] - - \frac{1}{2} f[x, y, \lambda, C_p Z_p + D_p V_p] + \frac{1}{2}(C_p - D_p) S[Z_p - V_p], \tag{13}$$

$$Z_1[x, y, \lambda] \equiv Z_1(x, y), \quad V_1[x, y, \lambda] \equiv V_1(x, y).$$

Методом, изложенным в [1], можно доказать справедливость оценки

$$\left| \frac{\partial^{2n-\mu-\nu} \{Z_{p+1}[x, y, \lambda] - V_{p+1}[x, y, \lambda]\}}{\partial x^{n-\mu} \partial y^{n-\nu}} \right| \leqslant K \prod_{i=1}^{p} |(Q_i - R_i)(C_i - D_i)| \frac{B^p}{p!}, \tag{14}$$

где K, B — постоянные, причем если параметры D_p, D_{p+1}, R_p, $p = 1, 2, 3, \ldots$, удовлетворяющие условиям (9), такие, что имеют место соотношения (10) и неравенства

$$\Omega[C_p Z_p + D_p V_p - C_{p+1} Z_{p+1} - D_{p+1} V_{p+1}] + \Phi[C_p V_p + D_p Z_p - - C_{p+1} V_{p+1} - D_{p+1} Z_{p+1}] \geqslant 0,$$
$$\Omega[C_p V_p + D_p Z_p - C_{p+1} V_{p+1} - D_{p+1} Z_{p+1}] + \Phi[C_p Z_p + D_p V_p - - C_{p+1} Z_{p+1} - D_{p+1} V_{p+1}] \leqslant 0, \tag{15}$$

$$Q_p \{\Omega[C_p Z_p + D_p V_p - C_{p+1} Z_{p+1} - D_{p+1} V_{p+1}] + \Phi[C_p V_p + D_p Z_p -$$

$$- C_{p+1}V_{p+1} - D_{p+1}Z_{p+1}]\} + R_p \{\Omega [C_pV_p + D_pZ_p - C_{p+1}Z_{p+1} - D_{p+1}V_{p+1}] +$$
$$+ \Phi [C_pZ_p + D_pV_p - C_{p+1}V_{p+1} - D_{p+1}Z_{p+1}]\} \geqslant 0,$$
$$Q_p \{\Omega [C_pV_p + D_pZ_p - C_{p+1}V_{p+1} - D_{p+1}Z_{p+1}] + \Phi [C_pZ_p + D_pV_p - \tag{16}$$
$$- C_{p+1}Z_{p+1} - D_{p+1}V_{p+1}]\} + R_p \{\Omega [C_pZ_p + D_pV_p - C_{p+1}V_{p+1} - D_{p+1}Z_{p+1}] +$$
$$+ \Phi [C_pV_p + D_pZ_p - C_{p+1}Z_{p+1} - D_{p+1}V_{p+1}]\} \leqslant 0,$$

следовательно, имеют место неравенства

$$\alpha_{p+1} [x, y, \lambda] \geqslant 0, \quad \beta_{p+1} [x, y, \lambda] \leqslant 0, \tag{17}$$

то в $\overline{D}$ справедливы цепи неравенств

$$\frac{\partial^{2n} V_p [x, y, \lambda]}{\partial x^n \partial y^n} \leqslant \frac{\partial^{2n} V_{p+1} [x, y, \lambda]}{\partial x^n \partial y^n} \leqslant \ldots \leqslant \frac{\partial^{2n} U [x, y, \lambda]}{\partial x^n \partial y^n} \leqslant \ldots$$
$$\ldots \leqslant \frac{\partial^{2n} Z_{p+1} [x, y, \lambda]}{\partial x^n \partial y^n} \leqslant \frac{\partial^{2n} Z_p [x, y, \lambda]}{\partial x^n \partial y^n}, \quad (x, y) \in \overline{R};$$
$$\frac{\partial^{2n-\mu-\nu} V_p [x, y, \lambda]}{\partial x^{n-\mu} \partial y^{n-\nu}} \leqslant \frac{\partial^{2n-\mu-\nu} V_{p+1} [x, y, \lambda]}{\partial x^{n-\mu} \partial y^{n-\nu}} \leqslant \ldots \leqslant \frac{\partial^{2n-\mu-\nu} U [x, y, \lambda]}{\partial x^{n-\mu} \partial y^{n-\nu}} \leqslant \ldots$$
$$\ldots \leqslant \frac{\partial^{2n-\mu-\nu} Z_{p+1} [x, y, \lambda]}{\partial x^{n-\mu} \partial y^{n-\nu}} \leqslant \frac{\partial^{2n-\mu-\nu} Z_p [x, y, \lambda]}{\partial x^{n-\mu} \partial y^{n-\nu}}, \quad (x, y) \in \overline{R}_1^*; \tag{18}$$
$$\frac{\partial^{2n-\mu-\nu} Z_p [x, y, \lambda]}{\partial x^{n-\mu} \partial y^{n-\nu}} \underset{(\geqslant)}{\leqslant} \frac{\partial^{2n-\mu-\nu} Z_{p+1} [x, y, \lambda]}{\partial x^{n-\mu} \partial y^{n-\nu}} \underset{(\geqslant)}{\leqslant} \ldots$$
$$\ldots \underset{(\geqslant)}{\leqslant} \frac{\partial^{2n-\mu-\nu} U [x, y, \lambda]}{\partial x^{n-\mu} \partial y^{n-\nu}} \underset{(\geqslant)}{\leqslant} \ldots \underset{(\geqslant)}{\leqslant} \frac{\partial^{2n-\mu-\nu} V_{p+1} [x, y, \lambda]}{\partial x^{n-\mu} \partial y^{n-\nu}} \underset{(\geqslant)}{\leqslant}$$
$$\underset{(\geqslant)}{\leqslant} \frac{\partial^{2n-\mu-\nu} V_p [x, y, \lambda]}{\partial x^{n-\mu} \partial y^{n-\nu}}$$

соответственно при ν нечетных (четных) и μ произвольных в области $\overline{R}_2^*$; при $(\mu + \nu)$ нечетных (четных) в области $\overline{R}_3^*$; при μ нечетных (четных) и ν произвольных в области $\overline{R}_4^*$, $\mu = 0, 1, 2, \ldots, n$; $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$; $\mu + \nu > 0$, $p = 1, 2, 3, \ldots$. Неравенства (15), (16) всегда выполняются при $D_p = 0$, $D_{p+1} = 0$, $R_p = 0$. Однако не исключен случай выполнения этих неравенств и при 1) $R_p > 0$, $D_p = 0$, $D_{p+1} = 0$; 2) $R_p = 0$, $D_p > 0$, $D_{p+1} > 0$; 3) $R_p > 0$, $D_p > 0$, $D_{p+1} > 0$.

Случай 1) для уравнения (1), не содержащего параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, исследован в [2].

Исходя из формул (11)—(13) методом, изложенным в [2], можно доказать, что в случае 1) или 2) при выполнении соотношений (10) и (16) имеем ускоренный итерационный процесс по отношению к случаю, в котором $R_p = 0$, $D_p = 0$, $D_{p+1} = 0$, а в случае 3) при выполнении соотношений (10) и неравенств (16) получаем более ускоренную сходимость итерационного двустороннего процесса по сравнению со случаями 1) или 2).

2. Пусть параметры R_p, Q_p, D_p, C_p удовлетворяют условиям

$$0 \leqslant Q_p < R_p, \quad 0 \leqslant D_p < C_p, \quad R_p + Q_p = 1, \quad D_p + C_p = 1,$$
$$p = 1, 2, 3, \ldots, \tag{19}$$

а функции $Z_1(x, y)$, $V_1(x, y)$ — условиям (2), неравенствам (8) и при $D_1 = 0$, $C_1 = 1$ — соотношениям (10). Можно доказать (см. § 7 в [1]), что если параметры R_p, Q_p, D_p, C_p, удовлетворяющие условию (19), такие, что справедливы соотношения (10) и при $p = 2\gamma - 1$ ($p = 2\gamma$), $\gamma = 1,2,3,\ldots$, знаки в неравенствах (16) противоположны (совпадают), вместо цепей неравенств (18) получаем скачкообразный процесс, причем справедливы неравенства

$$\alpha_{2p}[x, y, \lambda] \leqslant 0, \quad \alpha_{2p+1}[x, y, \lambda] \geqslant 0, \quad \beta_{2p}[x, y, \lambda] \geqslant 0, \quad \beta_{2p+1}[x, y, \lambda] \leqslant 0. \tag{20}$$

Следовательно, имеет место следующая теорема, доказательство которой получаем методом, приведенным в [1].

Теорема. *Пусть в некоторой замкнутой области $\overline{D}$, проекция которой на плоскость $x0y$ — область $\overline{R}$ ($\overline{R} \cup \overline{E} \subset \overline{D}$), правая часть $f[x, y, \lambda, U]$ уравнения* (1) *— непрерывная функция относительно аргументов x, y и параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ и существуют ограниченные производные первого порядка, удовлетворяющие условию* (7), *а функции $Z_1(x, y)$, $V_1(x, y)$, удовлетворяющие условию* (2), *неравенствам* (8) *и при $D_1 = 0$, $C_1 = 1$ — соотношениям* (10). *Если параметры R_p, Q_p, D_p, C_p, удовлетворяющие условиям* (9), *такие, что справедливы соотношения* (10) *и неравенства* (16), *следовательно, справедливы неравенства* (17), *то последовательности функций $\{Z_{p+1}[x, y, \lambda]\}$, $\{V_{p+1}[x, y, \lambda]\}$, определенные по закону* (11)—(13), *удовлетворяют в области $\overline{R}$, $\overline{R_1^*}$, $\overline{R_2^*}$, $\overline{R_3^*}$, $\overline{R_4^*}$ соответственно цепи неравенств* (18) *и абсолютно и равномерно вместе с производными до $2n$-го порядка включительно сходятся к $U[x, y, \lambda]$ и соответствующим производным от $U[x, y, \lambda]$, где $U[x, y, \lambda]$ — единственное и непрерывное решение в области $\overline{R} \cup \overline{E}$ как функция от x, y и параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ задачи* (1), (2). *Это решение непрерывно как функция параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ в области $\overline{E}$, равномерно непрерывно относительно x, y во всей области $\overline{R}$. Неравенства* (16), *следовательно, и неравенства* (17) *всегда выполняются в случае $R_p = 0$, $D_p = 0$, $D_{p+1} = 0$, однако не исключен случай выполнения этих неравенств и при*

$$1)\ R_p > 0,\ D_p = 0,\ D_{p+1} = 0; \quad 2)\ R_p = 0,\ D_p > 0,\ D_{p+1} > 0;$$

$$3)\ R_p > 0,\ D_p > 0,\ D_{p+1} > 0.$$

Выполнение на p-ом шаге неравенств (16) и (10) *в случае* 3) *на этом шаге гарантирует бо́льшую сходимость итерационного двустороннего процесса по сравнению со случаем $R_p = 0$, $D_p = 0$, $D_{p+1} = 0$ или случаями* 1), 2). *Последовательности функций $\{\alpha_p[x, y, \lambda]\}$, $\{\beta_p[x, y\lambda]\}$ и $\{S[Z_p - V_p]\}$, определение соответственно по закону* (13) и (5), *с возрастанием p абсолютно и равномерно сходятся к нулю, причем имеет место оценка* (14). *Если параметры R_p, Q_p, D_p, C_p, удовлетворяющие условию* (19), *такие, что справедливы соотношения* (10) *и при $p = 2\gamma - 1$ ($p = 2\gamma$), $\gamma = 1,2,3,\ldots$, знаки в неравенствах* (16) *противоположны (совпадают), следовательно, справедливы неравенства* (20), *то вместо цепей неравенств* (18) *получаем скачкообразный процесс.*

1. *Ковач Ю. И., Бойцун С. А.* Модификация аналитического метода приближенного интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных.— Львов, 1980.— 128 с. Рукоп. деп. в ВИНИТИ, № 9 — 81 Деп.
2. *Ковач Ю. И.* Об одном методе исследования сходимости итерационного процесса для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.— Укр. мат. журн., 1978, 30, № 2, с. 165—175.

Ужгород. гос. ун-т

Поступила в редакцию 16.02.83
после переработки — 20.02.83