УДК 517.98

М. А. Перельмутер, Ю. А. Семенов

О конечности скорости распространения возмущений для гиперболических уравнений

1. В полупространстве $\Pi_+ = \{(t, x) : t \in [0, \infty), \quad x \in \mathbf{R}^l\}, \quad l \geqslant 1,$ рассмотрим задачу Коши для гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_{k,j} \left(i \frac{\partial}{\partial x_k} + b_k \right) a_{kj} \left(i \frac{\partial}{\partial x_j} + b_j \right) u + Vu = 0 \tag{1}$$

$\left(\text{здесь } \sum_j \equiv \sum_{j=1}^{l}\right)$ с начальными данными

$$u(0) = \varphi \in L^2_{\text{comp}}, \tag{2}$$

$$\dot{u}(0) = \psi \in L^2_{\text{comp}}, \tag{3}$$

где L^2_{comp} — подпространство $L^2 \equiv L^2(\mathbf{R}^l, d^l x)$, состоящее из финитных функций.

В предположениях о гладкости коэффициентов уравнения (1) и начальных данных φ, ψ существует классическое решение задачи Коши (1)—(3).

Пусть $\operatorname{supp}\varphi \cup \operatorname{supp}\psi \subset B_{R_0}(0)$ для некоторого $R_0 \in [0, \infty)$, где $B_R(x) = \{y \in \mathbf{R}^l : |x - y| \leqslant R\}$. Для каждого $R > R_0$ определим функцию

$$t(R) = \sup\left\{\tau \in [0, \infty) : \bigcup_{0 \leqslant t \leqslant \tau} \operatorname{supp} u(t, \cdot) \subset B_R(0)\right\}, \tag{4}$$

т. е. $t(R)$ — максимальное время, в течение которого носитель функции $u(t, \cdot)$, $t \geqslant 0$, содержится в шаре $B_R(0)$.

В настоящей работе получены некоторые оценки снизу для $t(R)$, которые, в частности, позволяют указать достаточные условия, обеспечивающие конечность скорости распространения возмущений задачи (1). Под конечностью скорости распространения возмущений будем понимать следующее: задача (1)—(3) имеет решение $u(t, x)$, финитное по x при каждом $t \geqslant 0$.

Оценки $t(R)$ более точны, чем ранее известные, а кроме того, эти оценки таковы, что простые аппроксимационные аргументы позволяют распространить их на случай, когда коэффициенты уравнения (1) сильно сингулярны. Отметим, что признаки конечности распространения весьма полезны при доказательстве существенной самосопряженности (см. [1—5]).

2. Поскольку ниже рассмотрены уравнения типа (1) с сильно сингулярными коэффициентами, такими, что неприменимо обычное понятие обобщенного решения, то следует определить понятие решения задачи (1)—(3). Будем понимать его в смысле теории операторов, а именно: пусть $H \geqslant 0$ — самосопряженный оператор, соответствующий формальному выражению

$$\sum_{k,j}\left(i\frac{\partial}{\partial x_k} + b_k\right)a_{kj}\left(i\frac{\partial}{\partial x_j} + b_j\right) + V \tag{5}$$

(корректное построение H изложено ниже). Под решением задачи Коши для уравнения (1) будем понимать решение операторного дифференциального уравнения

$$d^2u/d\tau^2 + Hu = 0 \tag{6}$$

в гильбертовом пространстве L^2 с начальными данными (2), (3). Поскольку $H = H^* \geqslant 0$, то из общей теории известно, что задача (6), (2), (3) корректна и ее решение при $\varphi \in \mathcal{D}(H)$, $\psi \in \mathcal{D}(H^{1/2})$ имеет вид

$$u(\tau) = \cos(\tau H^{1/2})\varphi + H^{-1/2}\sin(\tau H^{1/2})\psi. \tag{7}$$

3. В дальнейшем, чтобы упростить выкладки, будем полагать $V = 0$, $b_j = 0$, $j = 1, \ldots, l$, но отметим, что соответствующие члены низших порядков не влияют на скорость распространения возмущений, так что все полученные результаты справедливы и для общих операторов вида (1).

Предположим, что коэффициенты удовлетворяют условиям

$$a_{kj}(x) = a_{jk}(x) \text{ для почти всех } x \in \mathbf{R}^l,\ k, j = 1, \ldots, l, \tag{8}$$

$$\nu|\xi|^2 \leqslant \sum_{k,j} a_{kj}(x)\,\xi_k\bar{\xi}_j \leqslant \lambda(x)|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^l \text{ и почти всех } x \in R^l, \tag{9}$$

$$\lambda(\cdot) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^l \diagdown S, d^l x), \tag{10}$$

где S — произвольное замкнутое множество лебеговой меры нуль. Пусть

$$\nu > 0. \tag{11}$$

Рассмотрим на множестве $C_0^\infty(\mathbf{R}^l \setminus S)$ симметричную полуторалинейную форму

$$a_0[u, v] = \int\limits_{\mathbf{R}^l} \sum_{k,j} a_{kj}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} d^l x.$$

Рассмотрим также матрицы

$$(a_{kj}^{(n)}(x)) \equiv \left(\nu\delta_{kj} + (a_{kj}(x) - \nu\delta_{kj})\Big/\left(1 + \frac{1}{n}\sum_k a_{kk}(x)\right)\right)$$

(δ_{kj} — символы Кронекера), которые назовем усечением матрицы (a_{kj}). Из положительной определенности и симметричности (a_{kj}) следует, что $|a_{kj}| \leqslant (a_{kk} + a_{jj})/2$ и, значит, $|a_{kj}^{(n)}| \leqslant \mathrm{const}\,(n)$. Рассмотрим соответствующие полуторалинейные формы, заданные на пространстве Соболева $W^{2,1}(\mathbf{R}^l)$

$$a_n[u, v] \equiv \int\limits_{\mathbf{R}^l} \sum_{k,j} a_{kj}^{(n)}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} d^l x.$$

Очевидно, матрицы $(a_{kj}^{(n)})$ обладают следующими свойствами:

$$\nu|\xi|^2 \leqslant \sum_{k,j} a_{kj}^{(n)}(x)\xi_k\bar{\xi}_j \leqslant \mathrm{const}\,(n)|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbf{C}^l, \tag{12}$$

$$\sum_{k,j} a_{kj}^{(n)}(x)\xi_k\bar{\xi}_j \leqslant \sum_{k,j} a_{kj}^{(n+1)}(x)\xi_k\bar{\xi}_j. \tag{13}$$

Из (12) вытекает, что каждая из форм a_n, $n = 1, 2, \ldots$, с $\mathcal{D}(a_n) = W^{2,1}(\mathbf{R}^l)$ замкнута, а из (13) видно, что $a_n \leqslant a_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Итак, имеем монотонно возрастающую последовательность замкнутых симметричных неотрицательных форм $\{a_n\}$. Определим предельную форму $\mathcal{D}(a) = \left\{u \in \bigcap_{n\geqslant 1} \mathcal{D}(a_n) : \sup_n a_n[u, u] < \infty\right\}$, $a[u, u] = \lim_{n\to\infty} a_n[u, u]$. Эта форма замкнута (см. [6]) и плотно определена, т. к. ввиду (10) $C_0^\infty(\mathbf{R}^l \setminus S) \subset \mathcal{D}(a)$. Следовательно, согласно теоремам о представлении (см. [7], гл. 6) a ассоциирует неотрицательный самосопряженный оператор H. Согласно [7],

$$(H - \lambda)^{-1} = s - \lim_{n\to\infty} (H_n - \lambda)^{-1} \quad \forall \lambda \in \mathbf{C} \setminus [0, \infty),$$

где H_n — операторы, построенные по матрицам $(a_{kj}^{(n)})$.

В случае ограниченных a_{kj}, $kj = 1, \ldots l$, хорошо известно, что оператор H можно аппроксимировать в смысле сильной резольвентной сходимости соответствующими операторами с гладкими коэффициентами $a_{kj}^{(m)}$, например, положив $a_{kj}^{(m)} = \rho_m * a_{kj}$, где $\rho_m(x) = \rho(mx)\left(\int \rho(mx)\, d^l x\right)^{-1}$, $\rho \in C_0^\infty$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, и $\rho(x) = 1$ при $|x| \leqslant 1$, $\rho(x) = 0$ при $|x| > 2$. А поскольку при любом $n = 1, 2, \ldots$ $a_{kj}^{(n)} \in L^\infty$, то

$$(H - \lambda)^{-1} = s - \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} (H_{nm} - \lambda)^{-1} \quad \forall \lambda \in \mathbf{C} \setminus [0, \infty). \tag{14}$$

Если обозначить через $u_{nm}(\tau, x)$ решение задачи Коши (6), (2), (3), в которой оператор H заменен на H_{nm}, то согласно (7), (14) и теореме 8.20 из [8].

$$u(\tau, \cdot) = s - \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} u_{nm}(\tau, \cdot). \tag{15}$$

и носители начальных данных лежат в шаре $B_{R_0}(0)$ радиуса $R_0 > 0$.

4. Перейдем непосредственно к оценке функции $t(R)$. Рассмотрим задачу Коши (1) — (3), предполагая, что помимо (8) — (11) выполнено

$$\lambda,\ a_{kj} \in C^{\infty}(\mathbf{R}^l),\ k, j = 1, \dots, l;\ u(0),\ \dot{u}(0) \in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^l). \tag{16}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (8) — (11), (16). *Тогда*

$$M(R) \equiv \int\limits_{R_0}^{R} \frac{dr}{\sup\limits_{\omega\in S^l} \sqrt{\lambda(r,\omega)}} \leqslant t(R),$$

где (r, ω) — *сферические координаты точки* $x \in \mathbf{R}^l$, *т. е.* $r = |x|$, $\omega = x/|x|$, $\omega \in S^l$; $S^l = \{x \in \mathbf{R}^l : |x| = 1\}$; $\lambda(r, \omega)$ — *функция* $\lambda(x)$, *записанная в сферических координатах.*

Доказательство. Возьмем в Π_+ ограниченную область $\mathscr{D}_\tau$, гомеоморфную цилиндру $\{(t, x) : t \in [0, \tau], |x| \leqslant 1\}$; ее нижнее основание лежит в плоскости $t = 0$, верхнее — в плоскости $t = \tau$, а боковая поверхность ориентирована пространственно-характеристическим образом, т. е. если $\mathscr{F}(t, x) = 0$ — уравнение боковой поверхности, то на ней выполняется неравенство

$$\left|\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial t}\right|^2 - \sum_{k,j} a_{kj}(x) \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{\mathscr{F}}}{\partial x_j} \geqslant 0 \tag{17}$$

и нормаль к ней, направленная вне $\mathscr{D}_\tau$, образует с осью t острый угол. Пусть Ω_σ — сечение $\mathscr{D}_\tau$ плоскостью $t = \sigma$. Тогда справедливо энергетическое неравенство (см., напр., [9])

$$z(\tau) \equiv \sup_{0\leqslant\sigma\leqslant\tau} \int\limits_{\Omega_\sigma} \left(|u|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + \sum_{k,j} a_{kj}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j}\right) d^l x \leqslant c z(0), \tag{18}$$

где величина c зависит от τ и $\boldsymbol{\nu}$.

Пусть $c_1(r) = \sup\limits_{|x|=r} \lambda(x)$, а $\mathscr{D}_{\Delta\tau} \subset \Pi_+$ — область, нижнее основание которой лежит в плоскости $t = 0$, верхнее — в плоскости $t = \Delta\tau$, а боковая поверхность задается уравнением $\mathscr{F}_{\Delta\tau}(t, x) = 0$, где

$$\begin{gathered} \mathscr{F}_{\Delta\tau}(t, x) = (1+\varepsilon)^2 c_1(R_0)^2 |t - (1+\varepsilon)\Delta\tau|^2 - |x - x_{\Delta\tau}|^2, \\ x_{\Delta\tau} = (R_0 + (1+2\varepsilon) c_1(R_0)\Delta\tau, \omega), \end{gathered} \tag{19}$$

$\varepsilon > 0$, $\omega \in S^l$ — фиксированы.

Для данного $R > R_0$, $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ выберем $\Delta\tau = \varepsilon(2(1+2\varepsilon)^2 L_R)^{-1}$, где постоянная L_R, зависящая только от R, определяется как

$$L_R = \inf\{\alpha : |c_1(|x|) - c_1(|y|)| \leqslant \alpha |x - y| \quad \forall x,\ y \in B_{2R}(0)\}$$

(ее существование гарантируется предположением о гладкости $\lambda(\cdot)$).

Пусть $y = (R_0, \omega)$ и $x \in \mathscr{D}_{\Delta\tau}$, тогда, очевидно, $c_1(|x|) - c_1(|y|) \leqslant 2L_R(1+2\varepsilon)^2 c_1(|y|)\Delta\tau$ или $|1 - c_1(|x|)/c_1(|y|)| \leqslant 2(1+2\varepsilon)^2 L_R \Delta\tau$. Для выбранного $\Delta\tau$ получаем

$$(1+\varepsilon) c_1(R_0) \geqslant c_1(|x|); \qquad (1-\varepsilon) c_1(R_0) \leqslant c_1(|x|) \quad \forall x \in \mathscr{D}_{\Delta\tau}. \tag{20}$$

Непосредственная проверка показывает, что для $\mathscr{F}_{\Delta\tau}(t, x)$ из (19) справедливо (17) благодаря первому неравенству в (20) и, кроме того, все точки границы нижнего основания $\mathscr{D}_{\Delta\tau}$ $(1+\varepsilon) c_1(R_0)\Delta\tau = |x - x_{\Delta\tau}|$ по модулю больше значения R_0. Следовательно, согласно (18) $u(t, x) = 0$ $\forall (t, x) \in [0, \Delta\tau] \times B_\theta(x_{\Delta\tau})$, где $\theta = \varepsilon(1+\varepsilon) c_1(R_0)\Delta\tau$. Ясно также, что $u(t, x) = 0$ $\forall (t, x) \in [0, \Delta\tau] \times \bigcup\limits_{|x_{\Delta\tau}|\leqslant r} B_\theta((r, \omega))$. Если ω пробегает всю сферу S^l, имеем

$$\bigcup_{0\leqslant t\leqslant\Delta\tau} \operatorname{supp} u(t, \cdot) \subset B_{R_{\Delta\tau}}(0), \qquad R_{\Delta\tau} \equiv R_0 + [(1+2\varepsilon)^2 - \varepsilon(1+\varepsilon)] c_1(R_0)\Delta\tau.$$

Следовательно, $0 < R_{\Delta\tau} - R_0 \leqslant pc_1(R_0)\Delta\tau$, где $p = 1 + 3\varepsilon + 3\varepsilon^2$. Используя (20), имеем

$$\int\limits_{R_0}^{R_{\Delta\tau}} \frac{dr}{c_1(r)} \leqslant \frac{R_{\Delta\tau} - R_0}{(1-\varepsilon)\,c_1(R_0)} \leqslant \frac{p}{1-\varepsilon}\,\Delta\tau.$$

Далее, пусть $\mathcal{D}_{2\Delta\tau} \subset \Pi_+$ — область, боковая поверхность которой задается уравнением $\mathcal{F}_{2\Delta\tau}(t, x) = 0$; $\mathcal{F}_{2\Delta\tau}(t, x) = (1+\varepsilon)^2 c_1(R_{\Delta\tau})^2 |t - \Delta\tau - (1+\varepsilon)\Delta\tau|^2 - |x - x_{2\Delta\tau}|^2$, $x_{2\Delta\tau} = (R_{\Delta\tau} + (1+2\varepsilon)^2 c_1(R_{\Delta\tau})\Delta\tau, \omega)$, а ее нижнее и верхнее основания лежат в плоскостях $t = \Delta\tau$ и $t = 2\Delta\tau$ соответственно. Предполагая $R_{\Delta\tau} < 2R$, легко понять, что $(1+\varepsilon)\,c_1(R_{\Delta\tau}) \geqslant c_1(|x|)$; $(1-\varepsilon)\,c_1(R_{\Delta\tau}) \leqslant c_1(|x|)$ $\forall x \in \mathcal{D}_{2\Delta\tau}$, причем ε и $\Delta\tau$ те же, что и в (20).

Повторяя приведенные выше аргументы, заключаем:

$$\bigcup_{0\leqslant t\leqslant 2\Delta\tau} \operatorname{supp} u(t, \cdot) \subset B_{R_{2\Delta\tau}}(0); \qquad R_{2\Delta\tau} = R_{\Delta\tau} + pc_1(R_{\Delta\tau})\Delta\tau;$$

$$\int\limits_{R_{\Delta\tau}}^{R_{2\Delta\tau}} \frac{dr}{c_1(r)} \leqslant \frac{p}{1-\varepsilon}\,\Delta\tau.$$

Указанный процесс продолжим: на k-м шаге получим

$$\bigcup_{0\leqslant t\leqslant k\Delta\tau} \operatorname{supp} u(t, \cdot) \subset B_{R_{k\Delta\tau}}(0); \qquad R_{k\Delta\tau} < R;$$

$$\int\limits_{R_{(k-1)\Delta\tau}}^{R_{k\Delta\tau}} \frac{dr}{c_1(r)} \leqslant \frac{p}{1-\varepsilon}\,\Delta\tau. \tag{21}$$

Выберем число n из условия $R_{(n-1)\Delta\tau + \varkappa\Delta\tau} = R$ для некоторого $\varkappa \in (0, 1]$ и положим $(n-1)\Delta\tau + \varkappa\Delta\tau = t'(R)$. Суммируя (21) по $k = 1, 2, \ldots, n$, имеем

$$\int\limits_{R_0}^{R} \frac{dr}{c_1(r)} \leqslant \frac{p}{1-\varepsilon}\, t'(R) \leqslant \frac{p}{1-\varepsilon}\, t(R).$$

Учитывая произвольность ε, получаем утверждение теоремы.

Сформулируем аналогичный результат для случая негладких ограниченных или неограниченных коэффициентов уравнения (1).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (8)—(11) *и пусть начальные данные задачи Коши* (6), (2), (3) *сосредоточены в шаре* $B_{R_0}(0)$. *Тогда*

$$E(R) \equiv \int\limits_{R_0}^{R} \frac{dr}{\operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in S} \sqrt{\Lambda(r, \omega)}} \leqslant t(R) \tag{22}$$

(esssup *понимается в смысле обычной меры на* $\mathbf{S}^l$).

Доказательство. Предположим противное, т. е. $t(R) < E(R)$ для некоторого $R > R_0$. Это означает существование такого $t_0 < E(R)$, что для решения задачи Коши (6), (2), (3) $\operatorname{meas}(G) > 0$, где meas — мера Лебега в $\mathbf{R}^l$,

$$G = B_R^c \cap \Big\{ \bigcup_{0\leqslant t\leqslant t_0} \operatorname{supp} u(t, \cdot) \Big\}, \quad A^c = \mathbf{R}^l \setminus A.$$

Покажем, что $u(t, x) = 0$ $\forall t \in [0, t_0]$ и почти всех $x \in G$, и заключим отсюда, что предположение $t(R) < E(R)$ неверно.

Пусть $u_{nm}(t, x)$ — решения соответствующих задач Коши с гладкими коэффициентами $\{a_{kj}^{(nm)}\}$, определенными в п. 3. Тогда выполняется (15).

Пусть $\mu(x) = \mu(|x|) = \operatorname*{esssup}_{\omega\in S^l} \lambda(r, \omega)$; $\mu_n(r) = \operatorname*{esssup}_{\omega\in S^l} \lambda_n(r, \omega)$, где $\lambda_n(x)$ соответствует усечению $(a_{kj}^{(n)})$. Обозначим через $\mu_{nm}(x) = \mu_{nm}(|x|)$, $m=1, 2, \ldots$, регуляризацию функции $\mu_n(x)$. Тогда нетрудно видеть, что

$$\nu|\xi|^2 \leqslant \sum_{k,j} a_{kj}^{(nm)}(x)\,\xi_k\bar{\xi}_j \leqslant \mu_{nm}(x)\,|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbf{C}^l. \tag{23}$$

Очевидно, что $\mu_{nm}(r) \xrightarrow[\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}]{} \mu(r)$ для почти всех $r\in[0, \infty)$. Используя теоремы о предельном переходе под знаком интеграла, получаем

$$\int_{R_0}^{R} \frac{dr}{\sqrt{\mu_{nm}(r)}} \to \int_{R_0}^{R} \frac{dr}{\sqrt{\mu(r)}} \quad (m\to\infty,\ n\to\infty). \tag{24}$$

Из $t_0 < E(R)$ и (24) следует неравенство $t_0 < \int_{R_0}^{R} \frac{dr}{\sqrt{\mu_{nm}(r)}}$ для всех достаточно больших n, m, например $n > n_0$, $m > m_0$.

Поскольку $a_{kj}^{(nm)} \in C^\infty(\mathbf{R}^l)$, то, используя (23) и теорему 1, имеем

$$u_{nm}(t, x) = 0 \text{ для } n > n_0, \quad m > m_0 \quad \forall t\in[0, t_0] \tag{25}$$

и почти всех $x\in B_R^c(0)$. Из (15) вытекает, что

$$u(t, x) = \lim_{n'\to\infty} \lim_{m'\to\infty} u_{n'm'}(t, x) \tag{26}$$

для почти всех $x\in\mathbf{R}^l$ и некоторой подпоследовательности $\{u_{n'm'}\}$.

Сравнивая (25) и (26), получаем: $\operatorname{meas}(G) = 0$.

З а м е ч а н и е. В теореме 2 предполагалось $\nu > 0$ (см. (11)), однако величина ν не влияет на скорость распространения возмущений, так что результаты нетрудно обобщить на случай вырождающихся гиперболических уравнений.

С л е д с т в и е 1. *Предположим, что выполнены все условия теоремы 2 и*

$$\int_{R_0}^{\infty} \frac{dr}{\operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in S^l}\sqrt{\lambda(r, \omega)}} = \infty \quad \forall R\in[0, \infty). \tag{27}$$

Тогда скорость распространения возмущений для уравнения (6) *конечна.*

С л е д с т в и е 2. *Предположим, что матрица* (a_{kj}) *удовлетворяет условиям* (8) — (11) *и, кроме того,* $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, *где* $0 \leqslant \lambda_2 \in L^\infty$,

$$\int_0^\infty \operatorname*{esssup}_{\omega\in S^l} \sqrt{\lambda_1(r, \omega)}\,dr < \infty.$$

Тогда выполняется (27) *и, следовательно, соответствующее уравнение* (6) *обладает свойством конечности скорости распространения возмущений.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При фиксированном $R_0 < \infty$ имеем:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{R_0}^{R} \frac{dr}{\operatorname*{esssup}_{\omega\in S^l}\sqrt{\lambda(r, \omega)}} \geqslant \lim_{R\to\infty} \int_{R_0}^{R} \frac{dr}{1 + \sqrt{\|\lambda_2\|_\infty} + \operatorname*{esssup}_{\omega\in S^l}\sqrt{\lambda_1(r, \omega)}} =$$

$$= (1 + \sqrt{\|\lambda_2\|_\infty})^{-1} \lim_{R\to\infty} \int_{R_0}^{R} \left\{1 - \frac{\operatorname*{esssup}\sqrt{\lambda_1(r, \omega)}}{1 + \sqrt{\|\lambda_2\|_\infty} + \operatorname*{esssup}_{\omega\in S^l}\sqrt{\lambda_1(r, \omega)}}\right\} dr \geqslant$$

$$\geqslant (1 + \sqrt{\|\lambda_2\|_\infty})^{-1} \lim_{R\to\infty} \int_{R_0}^{R} (1 - \operatorname*{esssup}_{\omega\in S^l}\sqrt{\lambda_1(r, \omega)})\,dr = \infty.$$

Следствие 2 указывает на то, что условию (27) удовлетворяют, в частности, функции, в существенном неограниченные в окрестности любой точки. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть $\lambda_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\eta(|x|-a_n)$, где $\eta(r)=r^{-\alpha}$ при $r\in(0,1]$, $\eta(r)=0$ при $r\in(1,\infty)$; $\alpha<2$; $\{a_n\}$ — последовательность всех рациональных чисел на полуоси $(0,\infty)$.

Остановимся еще на нескольких признаках, гарантирующих конечность скорости распространения возмущений. Рассмотрим величины

$$I_1=\int_0^{\infty}\frac{dr}{\operatorname*{esssup}_{\omega\in S^l}\sqrt{\lambda(r,\omega)}},\quad I_2=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k-a_k}{\operatorname*{esssup}_{a_k\leqslant|x|\leqslant b_k}\sqrt{\lambda(x)}},$$

$$I_3=\int_0^{\infty}\frac{dr}{\operatorname*{esssup}_{|x|\leqslant r}\sqrt{\lambda(x)}},$$

где $0\leqslant a_0<b_0\leqslant a_1<b_1\leqslant\ldots\leqslant a_k<b_k\leqslant a_{k+1}<\ldots,\ \lim_{k\to\infty}a_k=\infty$.

Нетрудно видеть, что

$$I_1\geqslant I_2,\quad I_1\geqslant I_3. \tag{28}$$

Далее, если матрица (a_{kj}) невырождена, так что $\operatorname*{essinf}_{x\in R^l}\lambda(x)>0$, то условие (27) эквивалентно равенству $I_1=\infty$, поэтому согласно следствию 1 и (28) какое-либо из равенств

$$I_k=\infty,\quad k=1,2,3, \tag{29}$$

влечет конечность скорости распространения возмущений. При этом признак (29) с $k=3$ хорошо известен (см. [3]); случай $k=2$ рассмотрен в [4]. Нетрудно построить примеры, для которых $I_3<\infty$, $I_2=\infty$ или $I_2<\infty$, $I_1=\infty$.

5. В качестве приложения сформулируем следующую теорему.

Теорема 3. *Предположим, что выполнены условия следствия 1. Тогда оператор H имеет ядро, состоящее из финитных функций. Если, кроме того, коэффициенты a_{kj}, $k, j=1,\ldots,l$, вещественны, то H имеет ядро, состоящее из ограниченных финитных функций.*

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathcal{D}_0=\bigcup_{t>0}\hat{\alpha}(tH^{1/2})L^2_{\mathrm{comp}}$, где $\hat{\alpha}(\mu)=\int_0^1\cos(\mu\tau)\alpha(\tau)d\tau$, $\alpha\in C_0^{\infty}(-1,1)$, $\int_{-1}^{1}\alpha(\tau)d\tau=1$, $\alpha(\tau)\geqslant 0$, $\alpha(\tau)=\alpha(-\tau)$. Из теоремы 2 вытекает, что $\mathcal{D}_0\subset L^2_{\mathrm{comp}}$, а согласно [5] $\mathcal{D}_0\subset\mathcal{D}(H)$ и $\mathcal{D}_0$ — ядро H. В [5] показано также, что $\mathcal{D}_0\subset\mathcal{D}(H^n)$, $n=1,2,\ldots$. Но в случае вещественных коэффициентов a_{kj} и $n>l/4$ $\mathcal{D}(H^n)\subset L^{\infty}_{loc}$ (см., напр., [10]).

Из теоремы 3 вытекает, в частности, что соответствующая обобщенная форма Дирихле

$$\int_{R^l}\sum_{k,j}a_{kj}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x_j}d^lx \tag{30}$$

имеет ядро, состоящее из финитных функций, поскольку любое ядро оператора H — ядро соответствующей квадратичной формы.

В работах [11, 12] были построены примеры форм (30), которые не имеют ядер, состоящих из финитных функций и, следовательно (согласно теореме 3), для построенных в этих работах матриц (a_{kj}) соответствующее уравнение (1) не обладает свойством конечности скорости распространения возмущений. Так как в этих примерах $\int\limits_0^\infty (dr/\operatorname*{esssup}_{\omega\in S^l} \sqrt{\lambda(r,\omega)}) < \infty$, то они свидетельствуют о том, что следствие 1 является результатом, близким к оптимальному.

Отметим, что, используя теорему 3 и налагая на коэффициенты более жесткие условия регулярности, можно получить весьма общие признаки существенной самосопряженности. В частности, справедлива:

Теорема 4. *Предположим, что выполнены все условия следствия 1 и, кроме того, коэффициенты a_{kj}, $k, j = 1, \ldots, l$, — вещественны и принадлежат пространству Соболева $W^{4,1}_{\text{loc}}(\mathbf{R}^l)$. Тогда оператор*

$$\left(-\sum_{k,j} \frac{\partial}{\partial x_k} a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \upharpoonright C_0^\infty(\mathbf{R}^l)$$

в существенном самосопряжен.

1. *Повзнер А. Я.* О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора $-\Delta u + cu$.— Мат. сб., 1953, 32, № 1, с. 109—156.
2. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных.— Киев : Наук. думка, 1978.— 360 с.
3. *Chernoff P. R.* Essential self-adjointness of powers of generators of hyperbolic equations.— J. Funct. Anal., 1973, 12, N 4, p. 401—414.
4. *Орочко Ю. Б.* Конечная скорость распространения и существенная самосопряженность некоторых дифференциальных операторов.— Функцион. анализ и его прилож., 1979, 13, № 3, с. 95—96.
5. *Orocko Yu. B.* Self-adjointness of the minimal Schröinger operator with potential belonging to L^1_{loc} .— Rept. Math. Phys., 1979, 15, p. 163—172.
6. *Simon B.* A canonical decomposition for quadratic forms with application to monotone convergence theorem.— J. Funct. Anal., 1978, 28, N 3, p. 337—385.
7. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.— М. : Мир, 1972.— 740 с.
8. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ.— М. : Мир, 1978.— 358 с.
9. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики.— М. : Наука, 1973.— 408 с.
10. *Trudinger N. S.* Linear elliptic operators with measurable coefficients.— Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, 1973, 27, p. 265—308.
11. *Уральцева Н. Н.* О несамосопряженности в $L^2(\mathbf{R}^n)$ эллиптического оператора с быстро растущими коэффициентами. —Записки научн. семин. ЛОМИ, 1969, 14, с. 288—294.
12. *Лаптев С. А.* Замыкание в метрике обобщенного интеграла Дирихле.— Дифференц. уравнения, 1971, 7, № 4, с. 727—736.

ГПИ Укрпроектстальконструкция, Киев,
Киев. политехнический ин-т

Поступила в редакцию 25.01.82
после переработки — 10.04.83