УДК 517.91

Х. Овездурдыев

О периодических решениях нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с разрывными правыми частями

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$d^2x/dt^2 = f(t, x, dx/dt),$$

$$f(t, x, dx/dt) = \begin{cases} f_1(t, x, dx/dt) \text{ при } x \geqslant 0; \\ f_2(t, x, dx/dt) \text{ при } x < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где x — скаляр, $f_i(t, x, y)$ непрерывные по t, x, y в области

$$(t, x, y) \in R^1 \times [a_i, b_i] \times [-c_i, d_i] \tag{2}$$

периодические по t с периодом T функции, такие, что

$$|f_i(t, x, y)| \leqslant M_i, \quad |f_i(t, x', y') - f_i(t, x'', y'')| \leqslant K_i' |x' - x''| + K_i'' |y' - y''|. \tag{3}$$

В дальнейшем везде считаем $i = 1, 2$.

Будем предполагать, что положительные постоянные a_i, b_i, c_i, d_i, M_i, K_i', K_i'' удовлетворяют неравенствам

$$a_i > T^2 M_i/2; \qquad b_i > T^2 M_i/2; \qquad -c_i \leqslant -(5/6)\,M_i T \leqslant (5/6)\,M_i T \leqslant d_i, \tag{4}$$

$$T/2\,\{(T/2)\,K_i' + 5K_i''/3\} < 1. \tag{5}$$

Для уравнения (1), удовлетворяющего условиям (3)—(5), опираясь на идеи [1], используя численно-аналитический метод [6—8], решим задачу существования и построения периодических периода T решений.

Введем в рассмотрение линейный оператор $L(\tau)$, действующий на непрерывную при $t \in (\tau, \theta)$ функцию $f_1(t)$ по формуле

$$L(\tau) f_1(t) = \int_\tau^t (f_1(s) - \overline{f_1(t)})\, ds, \tag{6}$$

где $\overline{f_1(t)}$ — интегральное среднее по времени на отрезке (τ, θ). Получим

$$L^2(\tau) f_1(t) = L(\tau)(L(\tau) f_1(t)) = \int_\tau^t \left(\int_\tau^t (f_1(s) - \overline{f_1(t)})\, ds - \overline{\int_\tau^t (f_1(s) - \overline{f_1(t)})\, ds} \right) dt. \tag{7}$$

Очевидно, что если $f_1(t)$ — периодическая с периодом T функция, то и $L(\tau) f_1(t)$, а с ним $L^2(\tau) f_1(t)$ — также периодические с периодом T функции.

Согласно лемме из [5],

$$|L(\tau) f_1(t)| \leqslant \alpha_1(t)\, |f_1(t)|_0, \qquad |\cdot|_0 \leqslant \max_t |\cdot|, \tag{8}$$

$\alpha_1(t) = 2(t - \tau)(1 - (t - \tau)/(\theta - \tau))$, а поэтому

$$|L^2(\tau) f_1(t)| \leqslant \alpha_1(t)\, |L(\tau) f_1(t)|_0 \leqslant T\alpha_1(t)\, |f_1(t)|_0/2 \leqslant T^2 |f_1(t)|_0/4. \tag{9}$$

Рассмотрим вопрос об алгоритме построения периодических решений уравнения (1). Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть правая часть уравнения* (1) *удовлетворяет условиям* (3)—(5).

Тогда для произвольных τ, θ, $\tau < \theta < \tau + T$, *последовательности функций*

$$x_i^{m+1}(t, \tau, \theta) = L^2(\tau) f_i(t, x_i^m(t, \tau, \theta),\ dx_i^m(t, \tau, \theta)/dt),\ i = 1, 2; \quad m = 0, 1, \ldots,$$

$$x_i^0 = 0, \tag{10}$$

определены для $t \in (\tau, \theta)$ *и* $t \in (\theta, \tau + T)$ *соответственно и равномерно сходятся при* $m \to \infty$ *к функциям* $x_i^\infty(t, \tau, \theta) = \{x_1^\infty(t, \tau, \theta),\ x_2^\infty(t, \tau, \theta)\}$, *удовлетворяющим уравнениям*

$$x_i(t, \tau, \theta) = L^2(\tau) f_i(t, x_i(t, \tau, \theta),\ dx_i(t, \tau, \theta)/dt),\ i = 1, 2. \tag{11}$$

При этом верны оценки

$$\begin{pmatrix} |x_i^\infty(t, \tau, \theta) - x_i^m(t, \tau, \theta)| \\ |dx_i^\infty(t, \tau, \theta)/dt - dx_i^m(t, \tau, \theta)/dt| \end{pmatrix} \leqslant Q_{0i}^m (E - Q_{0i})^{-1} Z_1^{\alpha}, \tag{12}$$

где

$$Q_{0i} = T/2 \begin{pmatrix} TK_i'/2 & TK_i''/2 \\ 5K_i'/3 & 5K_i''/3 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

$$Z_1^{0i} \leqslant TM_i/2 \begin{pmatrix} T/2 \\ 5/3 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Доказательство. По индукции докажем, что $x_i^m(t, \tau, \theta)$ и $dx_i^m(t, \tau, \theta)/dt$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, при $t \in R^1$ принимают значения в области (2). Ради простоты изложения все выкладки делаем только для последовательности (10). Действительно, полагая $m = 0$, в соотношении (10) в силу (8) получаем

$$|x_1^1(t, \tau, \theta)| \leqslant |L^2(\tau) f_1(t, \tau, \theta)| \leqslant T^2 M_1/4,$$

так что, $-a_1 \leqslant x_1^1(t, \tau, \theta) \leqslant b_1$ для всех $t \in R^1$. Более того, дифференцируя $x_1^1(t, \tau, \theta)$, находим $dx_1'(t, \tau, \theta)/dt = L(\tau) f_1(t, \tau, \theta) - \overline{L(\tau) f_1(t, \tau, \theta)}$, следовательно,

$$|dx_1'(t, \tau, \theta)/dt| \leqslant \alpha_1(t) M_1 + (1/(\theta - \tau)) \int_\tau^\theta \alpha_1(t) M_1 dt \leqslant$$

$$\leqslant (\alpha_1(t) + (\theta - \tau)/3) M_1 \leqslant 5TM_1/6.$$

Из последнего неравенства в силу условия (4) следует, что $-c_1 \leqslant dx_1^1(t, \tau, \theta)/dt \leqslant d_1$ при $t \in R^1$.

Предположим, что $-a_1 \leqslant x_1^m(t, \tau, \theta) \leqslant b_1$ и $-c_1 \leqslant dx_1^m(t, \tau, \theta)/dt \leqslant d_1$ для всех m, меньших некоторого целого k, $k \geqslant 1$, и всех $t \in R^1$. Учитывая рекуррентное соотношение, определяющее $x_1^{k+1}(t, \tau, \theta)$, находим, что

$$|x_1^{k+1}(t, \tau, \theta)| \leqslant |L^2(\tau) f_1(t, x_1^k(t, \tau, \theta), dx_1^k(t, \tau, \theta)/dt)|_0 \leqslant \alpha_1(t) TM_1/2 \leqslant T^2 M_1/4,$$

$$|dx_1^{k+1}(t, \tau, \theta)/dt| \leqslant (\alpha_1(t) + T/3) |f_1(t, x_1^k(t, \tau, \theta), dx_1^k(t, \tau, \theta)/dt)|_0 \leqslant 5TM_1/6,$$

так что $-a_1 = x_1^{k+1}(t, \tau, \theta) \leqslant b_1$ и $-c_1 \leqslant dx_1^{k+1}(t, \tau, \theta)/dt \leqslant d_1$ для всех $t \in R^1$.

Из сказанного следует, что функции последовательности (10) удовлетворяют неравенствам

$$-a_1 \leqslant x_1^m(t, \tau, \theta) \leqslant b_1, \quad -c_1 \leqslant dx_1^m(t, \tau, \theta)/dt \leqslant d_1$$

для всех $m = 0, 1, 2, \ldots, t \in R^1$.

Докажем сходимость последовательности (10). Для этого оценим разность $|x_1^{m+1}(t, \tau, \theta) - x_1^m(t, \tau, \theta)|$. Обозначим через $\omega_m(t)$ выражение

$$\omega_m(t) = f_1(t, x_1^m(t, \tau, \theta), dx_1^m(t, \tau, \theta)/dt) - f_1(t, x_1^{m-1}(t, \tau, \theta), dx_1^{m-1}(t, \tau, \theta)/dt). \tag{15}$$

Имеем

$$|x_1^{m+1}(t, \tau, \theta) - x_1^m(t, \tau, \theta)| \leqslant |L^2(\tau) \omega_m(t)| \leqslant \alpha_1(t) |L(\tau) \omega_m(t)|_0 \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_1(t) T |\omega_m(t)|_0/2 \leqslant \alpha_1(t) T (K_1' |x_1^m(t, \tau, \theta) - x_1^{m-1}(t, \tau, \theta)|_0 +$$

$$+ K_1'' |dx_1^m(t, \tau, \theta)/dt - dx_1^{m-1}(t, \tau, \theta)/dt|_0)/2. \tag{16}$$

Дифференцируя тождество (10), находим

$$|dx_1^{m+1}(t, \tau, \theta)/dt - dx_1^m(t, \tau, \theta)/dt| \leqslant |L(\tau) \omega_m(t) - \overline{L(\tau) \omega_m(t)}| \leqslant$$

$$\leqslant (\alpha_1(t) + T/3) |\omega_m(t)|_0 \leqslant (\alpha_1(t) + T/3) (K_1' |x_1^m(t, \tau, \theta) - x_1^{m-1}(t, \tau, \theta)|_0 +$$

$$+ K_1'' |dx_1^m(t, \tau, \theta)/dt - dx_1^{m-1}(t, \tau, \theta)/dt|_0). \tag{17}$$

Неравенства (16) и (17) можно объединить векторной записью в одно:

$$Z_{m+1}(t) \leqslant Q(t) Z_m, \tag{18}$$

где

$$Z_{m+1}(t)=\begin{pmatrix} |x_1^{m+1}(t,\tau,\theta)-x_1^m(t,\tau,\theta)| \\ |dx_1^{m+1}(t,\tau,\theta)/dt-dx_1^m(t,\tau,\theta)/dt| \end{pmatrix},$$

$$Q(t)=\begin{pmatrix} \alpha_1(t)TK_1'/2 & \alpha_1(t)TK_1'' \\ (\alpha_1(t)+T/3)K_1' & (\alpha_1(t)+T/3)K_1'' \end{pmatrix}$$

$$Z_m^0=\begin{pmatrix} |x_1^m(t,\tau,\theta)-x_1^{m-1}(t,\tau,\theta)|_0 \\ |dx_1^m(t,\tau,\theta)/dt-dx_1^{m-1}(t,\tau,\theta)/dt\ _0| \end{pmatrix}, \quad Z_1^{01}\leqslant TM_1/2\begin{pmatrix} T/2 \\ 5/3 \end{pmatrix}.$$

Из неравенства (18) следует, что

$$Z_{m+1}^0\leqslant Q_{01}Z_m^0, \tag{19}$$

где

$$Q_{01}=T/2\begin{pmatrix} TK_1'/2 & TK_1''/2 \\ 5K_1'/3 & 5K_1''/3 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Итерируя неравенство (19), получаем

$$Z_{m+1}^0\leqslant Q_{01}^mZ_1^{01}, \tag{21}$$

что ведет к оценке

$$\sum_{j=1}^m Z_j^0\leqslant\sum_{j=1}^m Q_{01}^{j-1}Z_1^{01}. \tag{22}$$

Так как матрица Q_{01} имеет собственные числа $\lambda_1=0$ и $\lambda_2=T(TK_1'/2+$ $+5K_1''/3)/2<1$, то ряд (22) равномерно сходится:

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^m Q_{01}^{j-1}Z_1^{0''}=\sum_{j=1}^\infty Q_{01}^{j-1}Z_1^{01}=(E-Q_{01})^{-1}Z_1^{01}. \tag{23}$$

Предельное соотношение (23) означает равномерную сходимость последовательности $(x_1^m(t,\tau,\theta),\ dx_1^m(t,\tau,\theta)/dt)$:

$$\lim_{m\to\infty}x_1^m(t,\tau,\theta)=x_1^\infty(t,\tau,\theta),\quad \lim_{m\to\infty}dx_1^m(t,\tau,\theta)/dt=dx_1^\infty(t,\tau,\theta)/dt. \tag{24}$$

Для отклонения $(x_1^m(t,\tau,\theta),\ dx_1^m(t,\tau,\theta)/dt)$ от $(x_1^\infty(t,\tau,\theta),\ dx_1^\infty(t,\tau,\theta)/$ $/dt)$ на основании неравенства (21) получаем оценку (12) при $i=1$.

Переходя в соотношении (10) к пределу при $m\to\infty$, убеждаемся, что предельная функция $x_1^\infty(t,\tau,\theta)$ удовлетворяет уравнению (11), что и завершает доказательство.

Теорема 1 определяет условия, при выполнении которых последовательность (10) сходится. Связь между предельной функцией этой последовательности и решением уравнения (1) устанавливает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть правая часть уравнения* (1) *удовлетворяет условиям теоремы* 1.

Тогда, если уравнение (1) *имеет в области* (2) *периодическое периода T решение $x=x(t)$, имеющее на периоде ровно два простых нуля $x(\tau_1)=0$, $x(\theta_1)=0$* и *меняющее знак, так что $\dot x(\tau_1)<0$, $\dot x(\theta_1)>0$, то*

$$x(t)=\begin{cases} x_1^\infty(t,\tau_1,\theta_1) & \text{при } \tau_1<t<\theta_1, \\ x_2^\infty(t,\tau_1,\theta_1) & \text{при } \theta_1<t<\tau_1+T, \end{cases}$$

а τ_1 и θ_1 — корни системы уравнений

$$\begin{aligned} &\int_\tau^\theta f_1(t,x_1^\infty(t,\tau,\theta),dx_1^\infty(t,\tau,\theta)/dt)\,dt=0, \\ &\int_\theta^{\tau+T} f_2(t,x_2^\infty(t,\tau,\theta),dx_2^\infty(t,\tau,\theta)/dt)\,dt=0, \end{aligned} \tag{25}$$

такие, что

$$x_1^{\infty}(t, \tau_1, \theta_1) > 0 \text{ при } \tau_1 < t < \theta_1,$$

$$x_2^{\infty}(t, \tau_1, \theta_1) < 0 \text{ при } \theta_1 < t < \tau_1 + T.$$

Доказательство. Пусть $x(t)$ — периодическое периода T решение уравнения (1), такое, что на интервале (τ_1, θ_1) $x(t) > 0$, а на интервале $(\theta_1, \tau_1 + T) x(t) < 0$. Тогда

$$x(t) = \int_{\tau_1}^{t} f_1(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt > 0 \quad \forall t \in (\tau_1, \theta_1), \tag{26}$$

$$x(t) = \int_{\theta_1}^{t} f_2(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt < 0 \quad \forall t \in (\theta_1, \tau_1 + T). \tag{27}$$

Кроме того, так как $x(\tau_1) = 0$, $x(\theta_1) = 0$, то из (26), (27) следует, что

$$x(\tau_1)/(\theta_1 - \tau_1) = 1/(\theta_1 - \tau_1) \int_{\tau_1}^{\theta_1} f_1(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt = 0,$$

$$x(\theta_1)/(\tau_1 + T - \theta_1) = 1/(\tau_1 + T - \theta_1) \int_{\theta_1}^{\tau_1+T} f_2(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt = 0.$$

Отсюда получаем

$$L(\tau) f_1(t, x(t), \dot{x}(t)) > 0 \quad \forall t \in (\tau_1, \theta_1)$$

$$L(\theta) f_2(t, x(t), \dot{x}(t)) < 0 \quad \forall t \in (\theta_1, \tau + T).$$

Из этих соотношений получаем, что

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t, \tau_1, \theta_1) \text{ при } \tau_1 < t < \theta_1, \\ x_2(t, \tau_1, \theta_1) \text{ при } \theta_1 < t < \tau_1 + T. \end{cases}$$

Условия теоремы 2 обеспечивают единственность решения уравнений (11). Это легко доказывается методом от противного. Из единственности следует, что $x(t) = x^{\infty}(t, \tau_1, \theta_1)$.

Выясним вопрос существования периодического решения уравнения (1), исходя из его m-го приближения

$$x^m(t, \tau, \theta) = \begin{cases} x_1^m(t, \tau, \theta) \text{ при } \tau < t < \theta, \\ x_2^m(t, \tau, \theta) \text{ при } \theta < t < \tau + T. \end{cases}$$

Положим

$$\Delta^m(\tau, \theta) = \begin{cases} \Delta_1^m(\tau, \theta) = \overline{f_1(t, x_1^m(t, \tau, \theta), dx_1^m(t, \tau, \theta)/dt)} \\ \Delta_2^m(\tau, \theta) = \overline{f_2(t, x_2^m(t, \tau, \theta), dx_2^m(t, \tau, \theta)/dt)} \end{cases};$$

и обозначим через $\Delta^{\infty}(\tau, \theta)$ выражение

$$\Delta^{\infty}(\tau, \theta) = \begin{cases} \Delta_1^{\infty}(\tau, \theta) = \overline{f_1(t, x_1^{\infty}(t, \tau, \theta), dx_1^{\infty}(t, \tau, \theta)/dt)} = \lim\limits_{m \to \infty} \Delta_1^m(\tau, \theta), \\ \Delta_2^{\infty}(\tau, \theta) = \overline{f_2(t, x_2^{\infty}(t, \tau, \theta), dx_2^{\infty}(t, \tau, \theta)/dt)} = \lim\limits_{m \to \infty} \Delta_2^m(\tau, \theta), \end{cases}$$

где $x_1^{\infty}(t, \tau, \theta)$, $x_2^{\infty}(t, \tau, \theta)$ — пределы последовательностей (10).

Докажем справедливость следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть для уравнения* (1) *выполняется условие теоремы* 1 *и*

а) *для некоторого целого* $m \geqslant 1$ *отображение* $\tau, \theta \to \Delta^m(\tau, \theta)$ *имеет на интервале длины* T *изолированную особую точку* (τ_1, θ_1), *такую, что* $\tau_1 < \theta_1 < \tau_1 + T$ *и*

$$x_1^m(t, \tau_1, \theta_1) > 0 \text{ для } t \in (\tau_1, \theta_1),$$

$$x_2^m(t, \tau_1, \theta_1) < 0 \text{ для } t \in (\theta_1, \tau_1 + T);$$

б) *якобиан отображения* $\tau, \theta \to \Delta^m(\tau, \theta)$ *в точке* (τ_1, θ_3) *отличен от нуля:*

в) *существует такое* $\rho > 0$ $(\tau_1 + \rho < \theta_1 - \rho < \theta_1 + \rho < \tau_1 + T - \rho)$, *что в круге* S_ρ *радиуса* ρ *с центром в точке* (τ_1, θ_1) *отображение* $\tau, \theta \to \Delta^m(\tau, \theta)$ *не имеет отличных от* (τ_1, θ_1) *особых точек, а на ее границе* Γ_ρ *для всех* $m \geqslant 1$ *выполняется неравенство*

$$\min_{(\tau,\theta)\in\Gamma_\rho} |\Delta_i^m(\tau, \theta)| \geqslant \pi |Q_{0i}^m (E - Q_{0i})^{-1} M_i|/3;$$

г) *функция* $x^m(t, \tau_1, \theta_1)$ *такова, что*

$$\begin{pmatrix} |x_1^m(t, \tau_1, \theta_1)| \\ |dx_1^m(t, \tau_1, \theta_1)/dt| \end{pmatrix} > Q_{01}^m (E - Q_{01})^{-1} Z_1^{01} \text{ при } \tau_1 + \rho < t < \theta_1 - \rho,$$

$$\begin{pmatrix} |x_2^m(t, \tau_1, \theta_1)| \\ |dx_2^m(t, \tau_1, \theta_1)/dt| \end{pmatrix} > Q_{02}^m (E - Q_{02})^{-1} Z_1^{02} \text{ при } \theta_1 + \rho < t < \tau_1 + T - \rho.$$

Тогда можно указать такую точку $\tau_1^0, \theta_1^0 \in S_\rho$, *что уравнение* (1) *будет иметь периодическое периода* T *решение*

$$x(t) = \begin{cases} x_1^\infty(t, \tau_1^0, \theta_1^0) \text{ при } \tau_1^0 < t < \theta_1^0; \\ x_2^\infty(t, \tau_1^0, \theta_1^0) \text{ при } \theta_1^0 < t < \tau_1^0 + T, \end{cases}$$

для которого

$$x(t) > 0 \text{ при } \tau_1^0 < t < \theta_1^0;$$

$$x(t) < 0 \text{ при } \theta_1^0 < t < \tau_1^0 + T.$$

Доказательство. Так как периодическое решение $x = x(t)$, имеющее два простых нуля $t = \tau_1$, $t = \theta_1$, на периоде, такое, что $\dot{x}(\tau_1) > 0$, $\dot{x}(\theta_1) < 0$, удовлетворяет уравнению (1) и условию $\Delta_1^\infty(\tau_1, \theta_1) = 0$, $\Delta_2^\infty(\tau_1, \theta_1) = 0$, то задача сводится к отысканию изолированных нулей τ_1, θ_1, $\tau_1 < \theta_1 < \tau_1 + T$, отображения

$$\Delta^\infty(\tau, \theta) = (\Delta_1^\infty(\tau, \theta), \Delta_2^\infty(\tau, \theta)) \tag{28}$$

таких, что

$$x_1^\infty(t, \tau_1, \theta_1) > 0 \text{ при } \tau_1 < t < \theta_1,$$

$$x_2^\infty(t, \tau_1, \theta_1) < 0 \text{ при } \theta_1 < t < \tau_1 + T.$$

Условия, гарантирующие существование изолированных нулей отображений (28), выражаются известным образом (см. [2—4]), исходя из нулей отображения

$$\Delta^m(\tau, \theta) = (\Delta_1^m(\tau, \theta), \Delta_2^m(\tau, \theta)). \tag{29}$$

Дальнейшее доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3 [5].

Замечание. Отметим, что результаты настоящей работы легко распространяются на системы уравнений второго порядка вида (1), а также на неразрешенные относительно старшей производной уравнения второго порядка с разрывными правыми частями.

1. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику.— К. : Изд-во АН УССР, 1937.— 363 с.
2. *Александров П. С.* Комбинаторная топология.— М.— Л. : Гостехиздат, 1947.— 660 с.
3. *Бернштейн И., Халанай А.* Индекс особой точки и существование периодических решений систем с малым параметром.— Докл. АН СССР, 1956, **111**, № 5, с. 923—925.
4. *Красносельский А. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1966.— 331 с.
5. *Овездурдыев Х.* Периодические решения дифференциальных уравнений с разрывной правой частью.— В сб.: Методы нелин. мех. и их прилож. К. : Ин-т мат. АН УССР, 1982, с. 108—116.

6. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений.— Укр. мат. журн., 1965, 17, № 4, с. 82—93.
7. Там же, 1966, 18, № 2, с. 50—59.
8. *Самойленко А. М.* О периодических решениях нелинейных уравнений второго порядка.— Дифференц. уравнения, 1967, 3, № 11, с. 1903—1912.

Киев. гос. ун-т

Поступила в редакцию
25.10.82