УДК 517.9

Ю. А. Митропольский, А. К. Лопатин

Асимптотическая декомпозиция систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

Одним из вариантов развития метода усреднения Н. Н. Боголюбова [1] является использование в качестве замены переменных рядов Ли. Впервые эти ряды применены в методах теории возмущений Г. Хори [2]. В указанном направлении получены результаты в работах [3, 4]. Подробную библиографию можно найти в [5, 6]. В предлагаемой статье приводится вариант развития метода усреднения на основе упомянутого подхода. Часть результатов опубликована авторами [7—11].

1. Алгоритм асимптотической декомпозиции. Рассмотрим нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}'_1 = \omega(x') + \varepsilon\tilde{\omega}(x'), \quad x'(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $x' = \mathrm{colon}(x'_1, \ldots x'_n) \in R^n$; $\dot{x}' = dx'/dt$; $\omega(x') = \mathrm{colon}(\omega_1(x'), \ldots, \omega_n(x'))$;

$\tilde{\omega}(x') = \mathrm{colon}(\tilde{\omega}_1(x'), \ldots, \tilde{\omega}_n(x'))$; $\omega(x')$, $\tilde{\omega}(x'): M(x') \to R^n$, $M \in R^n$, M — область n-мерного фазового пространства; $0 < \varepsilon \ll 1$. Предположим, что $G = (a, b)(0, \bar{\varepsilon}) \times M(x')$, $t \in (a, b)$, — область единственности решения задачи Коши для уравнения (1). Функции $\omega(x')$, $\tilde{\omega}(x') \in C^k(G)$, $k < \infty$. Наряду с возмущенной системой (1) будем отдельно рассматривать систему нулевого приближения, получаемую при $\varepsilon = 0$:

$$\dot{x}' = \omega(x'), \qquad x'(t_0) = x_0. \tag{2}$$

Пусть $H^0(x') = (a, b) \times H(x')$, $H(x') \subseteq M(x')$, — область существования общего решения задачи Коши невозмущенной системы (2)

$$x' = \varphi(\tau, y), \quad \varphi(0, y) = y, \ \tau \overset{\mathrm{def}}{=} t - t_0. \tag{3}$$

Здесь $\varphi = \mathrm{colon}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, $y = \mathrm{colon}(y_1, \ldots, y_n)$ — вектор начальных условий, t_0 — начальный момент. Обозначим через $R^0(x')$, $R^0 \subseteq H$, область существования однозначного непрерывно дифференцируемого решения уравнений (3) относительно $n - 1$ начального значения, например $y_1, \ldots$ $\ldots, y_{n-1}$ и τ:

$$y_1 = v_1(x'), \ldots, y_{n-1} = v_{n-1}(x'), \quad \tau = w(x'). \tag{4}$$

Функции $v_1(x'), \ldots, v_{n-1}(x')$ являются первыми интегралами системы (2), независимыми в $R^0(x')$. Назовем эту область $R^0(x')$ областью существования первых интегралов системы (2).

Условимся о следующих обозначениях. Всюду в дальнейшем переменные x' будут преобразовываться в переменные x. Для произвольных функций $f(x')$ и $f(x)$ применим обозначения f' и f, имея в виду зависимость f от x' или от x, т. е. $f' = f(x')$, $f = f(x)$. Наряду с системой (1) рассмотрим соответствующий ей дифференциальный оператор первого порядка

$$U'_0 = U' + \varepsilon\tilde{U}', \tag{5}$$

где

$$U' = \omega'_1 \frac{\partial}{\partial x'_1} + \ldots + \omega'_n \frac{\partial}{\partial x'_n}, \qquad \tilde{U} = \tilde{\omega}'_1 \frac{\partial}{\partial x'_1} + \ldots + \tilde{\omega}'_n \frac{\partial}{\partial x'_n}.$$

Произведем в (5) замену переменных в виде рядов Ли:

$$x_k = \exp(-\varepsilon S')\, x'_k, \qquad x'_k = \exp(\varepsilon S)\, x_k, \quad k = \overline{1, n}, \tag{6}$$

где

$$\exp \varepsilon S = 1 + \frac{\varepsilon}{1!} S + \frac{\varepsilon^2}{2!} S^2 + \ldots,$$

$$S = S_1 + \varepsilon S_2 + \ldots, \quad S_i = \gamma_{i1}(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \gamma_{in}(x) \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Коэффициенты операторов S_i, $i = 1, 2 \ldots$, т. е. $\gamma_{ij}\ (x)$, неопределенные пока функции.

Оператор U_0' под действием преобразования (6) перейдет в соответствии с формулой Кэмпбелла — Хаусдорфа [12] в следующий:

$$U_0' \to U_0 = U + \varepsilon(-U]\, S_1 + F_1) + \ldots + \varepsilon^\nu(-U]\, S_\nu + F_\nu) + \ldots, \quad (7)$$

где $F_1 = \tilde{U},\ F_2 = -\tilde{U}\Big]\, S_1 + \frac{1}{2} U\Big]^2 S_1,\ F_\nu = F_\nu(U, \tilde{U}, S_1, \ldots, S_{\nu-1}),\ \nu = 3, 4, \ldots$

F_ν — известная функция от U, $\tilde{U}, S_1, \ldots, S_{\nu-1}$, явный вид которой можно найти, выполнив соответствующие вычисления ( ] — скобка Пуассона). Обозначим через $\mathrm{pr}\, F$ некоторый оператор, полученный из оператора F, и рассмотрим систему операторных уравнений

$$U]\, S_1 = F_1 - \mathrm{pr}\, F_1, \ldots, U]\, S_\nu = F_\nu - \mathrm{pr}\, F_\nu, \quad \nu = 2, 3, \ldots. \quad (8)$$

Неизвестными в этой системе являются операторы S_1, $S_2, \ldots$. Структура каждого из уравнений идентична: в левой части стоит неизвестный оператор S_ν, а в правой— известная функция от U, $\tilde{U}$, а также от операторов S_i, $i = 1, \ldots, \nu - 1$. Таким образом, если решено первое уравнение, то определена правая часть второго и т. д. Другими словами, имеем некоторую рекуррентную последовательность уравнений.

Как будет показано ниже, система уравнений (8) в области R^0 существования первых интегралов системы (2) имеет решениями операторы S_i, коэффициенты которых $\gamma_{ij}(x)$ на решениях (3) системы нулевого приближения (2) не содержат членов, пропорциональных независимой переменной t только при определенном выборе операторов проектирования $\mathrm{pr}\, F_\nu$ от правых частей F_ν. Наличие упомянутых слагаемых существенно сужает область применимости преобразования (6) при фиксированном значении ε, либо налагает жесткие ограничения на величину параметра ε.

После соответствующего выбора оператора проектирования $\mathrm{pr}\, F_\nu$ оператор U_0 (7) исходной системы примет вид

$$U_0 = U + \varepsilon\, \mathrm{pr}\, F_1 + \ldots + \varepsilon^\nu\, \mathrm{pr}\, F_\nu + \ldots,$$

а исходная система дифференциальных уравнений (1) —

$$\dot{x}_i = \omega_i(x) + \varepsilon\, \mathrm{pr}\, F_1 x_i + \ldots + \varepsilon^\nu\, \mathrm{pr}\, F_\nu x_i + \ldots, \quad i = \overline{1, n}, \quad x(t_0) = x_0. \quad (9)$$

Таким образом, нулевое приближение преобразованной системы (9)

$$\dot{x}_i = \omega(x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (10)$$

с точностью до обозначений совпадает с системой нулевого приближения (2) исходной системы (1).

Операторы $\mathrm{pr}\, F_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, порождают некоторую алгебру Ли β_0^k, которая всецело определяет свойства преобразованной системы (9). Нас в первую очередь будут интересовать структурные свойства системы (9), т. е. свойства, не зависящие от выбора системы координат. На основе построения алгебры Ли β_0^k, проведенного ниже, установлены следующие два основных результата: условия разделения переменных в преобразованной системе (9) на быстрые и медленные и условия декомпозируемости этой системы на подсистемы меньшей размерности в любом приближении.

Перейдем к вопросам разрешимости и установления вида решений системы (8). Ввиду одинаковости структур уравнений в последовательности (8) достаточно рассмотреть одно из них:

$$U \rfloor S_\nu = F_\nu. \tag{11}$$

Оператор F_ν имеет вид

$$F_\nu = \sum_{i=1}^{n} b_{\nu i}^{(0)}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{12}$$

Оператор S_ν будем отыскивать в виде

$$S_\nu = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{\nu i}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{13}$$

Подстановка выражений (12), (13) в (11) приводит к системе Якоби линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\mathbb{W}\gamma_\nu = b_\nu^{(0)}, \tag{14}$$

где $\mathbb{W} = UE + B(x)$, $B(x) \in \Re^{n,n}$ ($\Re^{n,n}$ — множество матриц с вещественными коэффициентами размерности $n \times n$), E — единичная матрица; $b^{(0)} = \mathrm{colon}(b_1^{(0)}, \ldots, b_n^{(0)})$, $\gamma_\nu = \mathrm{colon}(\gamma_{\nu 1}, \ldots, \gamma_{\nu n})$. Матрица $B(x)$ равна транспонированной матрице A ($B = A^T$, T — знак транспонирования), определяемой тождеством

$$U \rfloor \delta = A\delta, \quad \delta \overset{\text{def}}{=} \mathrm{colon}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right).$$

Лемма 1. *В области R^0 существования первых интегралов системы* (2) *общее решение системы* (14) *представимо в виде*

$$\gamma_\nu(x) = \Gamma(x)\, c(x) + \eta_\nu(x), \tag{15}$$

где $\Gamma(x)$ — *матрица фундаментальных решений однородной системы*

$$\mathbb{W}\gamma_\nu = 0, \quad \Gamma(x)|_{x_n = y_n} = E, \tag{16}$$

составленная из n *векторов* $\xi_1(x), \ldots, \xi_n(x)$, *линейно независимых на решениях* (3) *системы* (2), $c(x) = \mathrm{colon}(c_1(x), \ldots, c_n(x))$ — *вектор, компоненты которого — произвольные функции первых интегралов системы* (2), *т. е.* $c_i = c_i(v_1(x), \ldots, v_{n-1}(x))$, $i = \overline{1, n}$, — *решения уравнения* $Uf = 0$; $\eta_\nu(x)$ — *частное решение системы* (14), *получаемое при начальных условиях* $\gamma = 0$, $x_n = y_n$.

Благодаря специальной структуре системы Якоби (14) для доказательства можно применить метод характеристик Коши, разработанный в общем случае для одного квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка.

В качестве замены переменных примем общее решение системы нулевого приближения (11)

$$x = \varphi(\tau, y), \qquad \tau \overset{\text{def}}{=} t - t_0 \tag{17}$$

в области R^0, считая новыми переменными $y_1, \ldots, y_{n-1}, \tau$. По формулам (4) выразим новые переменные

$$y_i = v_i(x), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \tau = w(x) \tag{18}$$

через старые.

В новых переменных $y_1, \ldots, y_{n-1}$, τ система (14) преобразуется в систему линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{\partial \gamma_\nu}{\partial \tau} + B(\varphi)\gamma_\nu = b_\nu^{(0)}(\varphi). \tag{19}$$

Наряду с системой (19) рассмотрим соответствующую ей однородную систему $\partial\gamma_\nu/\partial\tau + B(\varphi)\gamma_\nu = 0$. Согласно сделанным выше предположениям эта система допускает фундаментальную матрицу решений

$$\Gamma(\tau, y_1, \ldots, y_{n-1}) = \| \xi_1, \ldots, \xi_n \|, \quad \Gamma(0, y_1, \ldots, y_{n-1}) = E,$$

где $\xi_i = \operatorname{colon}(\xi_{i1}(\tau, y_1, \ldots, y_{n-1}), \ldots, \xi_{in}(\tau, y_1, \ldots, y_{n-1}))$, $i = \overline{1, n}$.

Обозначим через $\eta_\nu(\tau, y_1, \ldots, y_{n-1})$ частное решение неоднородной системы (19) при начальных условиях $\gamma = 0$, $\tau = 0$. Общее решение неоднородной системы, как известно, представимо суммой

$$\gamma_\nu = \Gamma(\tau, y_1, \ldots, y_{n-1})\, c(y_1, \ldots, y_{n-1}) + \eta_\nu(\tau, y_1, \ldots, y_{n-1}). \tag{20}$$

Переходя в выражениях (20) к переменным x по формулам (18), приходим к записи решения системы (14) в виде (15).

Покажем, что любое решение $\psi(x)$ системы (14), определенное в R^0, может быть получено из (15) при соответствующем выборе вектора $c(x)$. Рассмотрим последнее из соотношений (17):

$$x_n = \varphi_n(\tau, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n). \tag{21}$$

При $\tau = 0$ из (21) следует $x_n = y_n$. Обратно: если положить в левой части (21) $x_n = y_n$, то в силу единственности решения этого уравнения (по крайней мере, в достаточно малой окрестности $\tau = 0$) получим $\tau \equiv 0$.

Итак, если положить $x_n = y_n$, то $\tau = 0$ и первые $n - 1$ уравнений (17) обратятся в тождества $y_i \equiv \varphi_i(0, y)$, $i = \overline{1, n-1}$. Следовательно, решение $\psi(\varphi(\tau, y))$ обратится в функцию $\psi(y)$. Запишем частное решение системы (19):

$$\gamma_\nu = \Gamma(\tau, y_1, \ldots, y_{n-1})\,\psi(y) + \eta_\nu(\tau, y_1, \ldots, y_{n-1}), \tag{22}$$

обращающееся в функцию $\psi(y)$ при $\tau = 0$.

Перейдем в (22) к старым переменным по формулам (18):

$$\gamma_\nu(x) = \Gamma(x)\,\psi(v_1, \ldots, v_{n-1}) + \eta_\nu(x). \tag{23}$$

При $x_n = y_n$ решение (23) обращается в $\psi(y)$ и совпадает в силу единственности решения задачи Коши с $\psi(x)$. Лемма доказана.

Перейдем к выяснению структуры частного решения системы (14), получаемого при начальных условиях $\gamma_\nu = 0$ при $x_n = y_n$.

Назовем **первым дифференциальным образом** вектора $b_\nu^{(0)}(x) = \operatorname{colon}(b_{\nu 1}^{(0)}, \ldots, b_{\nu n}^{(0)})$ вектор $W b_\nu^{(0)} \overset{\mathrm{def}}{=} b_\nu^{(1)}$ и его **нулевым дифференциальным прообразом** — частное решение уравнения $W\gamma_\nu^{(0)} = b_\nu^{(1)}$, $\gamma_\nu^{(0)} = \tilde{b}_\nu^{(0)}(y)$ при $x_n = y_n$, где $\tilde{b}_\nu^{(0)} \overset{\mathrm{def}}{=} b_\nu^{(0)} - \eta_\nu^{(0)}$, $\eta_\nu^{(0)}$ — составляющая вектора $b_\nu^{(0)}$, являющаяся решением однородной системы (16). Далее, введем понятие второго и т. д. дифференциального образов вектора $b_\nu^{(0)}: W b_\nu^{(m-1)} \overset{\mathrm{def}}{=} b_\nu^{(m)}$, $m = 2, 3, \ldots$, и, соответственно $(m-1)$-го, $m = 2, 3, \ldots$, дифференциальных прообразов вектора $b_\nu^{(0)}$ как частного решения уравнения

$$W\gamma_\nu^{(m-1)} = b_\nu^{(m)}, \; \gamma_\nu^{(m-1)} = \tilde{b}_\nu^{(m-1)}(y) \text{ при } x_n = y_n,$$

где $\gamma_\nu^{(m-1)} = \operatorname{colon}(\gamma_{\nu 1}^{(m-1)}, \ldots, \gamma_{\nu n}^{(m-1)})$, $\tilde{b}_\nu^{(m-1)} \overset{\mathrm{def}}{=} b_\nu^{(m-1)} - \eta_\nu^{(m-1)}$, $\eta_\nu^{(m-1)}$ — составляющая вектора $b_\nu^{(m-1)}$, являющаяся решением однородной системы (16).

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть в области R^0 существования первых интегралов системы* (2), *начиная с некоторого $k < +\infty$, дифференциальные образы совпадают с соответствующими им дифференциальными прообразами $b_\nu^{(m)} = \gamma_\nu^{(m)}$, $m \geqslant k_\nu$, $k_\nu \leqslant k$, $k < +\infty$. Тогда решение уравнения* (14), определяемое начальными условиями $\gamma_\nu = 0$ при $x_n = y_n$, представимо в виде суммы

$$\gamma_\nu = \sum_{j=0}^{k_\nu} \frac{\omega^{j+1}}{(j+1)!} \tilde{\rho}_\nu^{(j)} + \bar{\eta}_\nu + \gamma, \tag{24}$$

где $\tilde{\rho}_\nu^{(j)}$, η — известные векторы — решения однородной си⁻ е ıы, $\bar{\gamma}_\nu$ — последний член последовательности $\bar{\gamma}_\nu^{(k_\nu-1)}, \ldots, \bar{\gamma}_\nu^{(0)}, \bar{\gamma}_\nu$, составленной из частных решений рекуррентной последовательности уравнений

$$W\bar{\gamma}_\nu^{(k_\nu-1)} = b_\nu^{(k_\nu)},\ \ W\bar{\gamma}_\nu^{(j)} = \bar{\gamma}_\nu^{(j+1)},\ \ j = \overline{k_\nu - 2, 0},\ \ W\bar{\gamma}_\nu = \bar{\gamma}_\nu^{(0)},$$

причем каждое из этих решений не содержит составляющих, являющихся решениями однородной системы (16).

Действительно, рассмотрим последовательность неоднородных уравнений

$$W\gamma_\nu^{(k_\nu-1)} = b_\nu^{(k_\nu)},\ \ W\gamma_\nu^{(k_\nu-2)} = b_\nu^{(k_\nu-1)}, \ldots,\ W\gamma_\nu^{(0)} = b_\nu^{(1)},\ \ W\gamma_\nu = b_\nu^{(0)}. \tag{25}$$

Обозначим через $\tilde{\gamma}_\nu$, $\tilde{\gamma}_\nu^{(j)}$, частное решение системы (25) при начальных условиях $\tilde{\gamma}_\nu = \bar{\gamma}_\nu(y)$, $\tilde{\gamma}_\nu^{(j)} = \bar{\gamma}_\nu^{(j)}(y)$, $j = \overline{k_\nu - 1, 0}$, при $x_n = y_n$. Преобразуем правые части системы (25) очевидным образом:

$$b_\nu^{(j+1)} = (b_\nu^{(j+1)} - \gamma_\nu^{(j+1)}) + (\gamma_\nu^{(j+1)} - \tilde{\gamma}_\nu^{(j+1)}) + (\tilde{\gamma}_\nu^{(j+1)} - \bar{\gamma}_\nu^{(j+1)}) + \bar{\gamma}_\nu^{(j+1)}.$$

Согласно определению $b_\nu^{(j+1)} - \gamma_\nu^{(j+1)} \overset{\text{def}}{=} \eta_\nu^{(j+1)}$ — решение однородной системы (14). Легко также видеть, что разность $\zeta_\nu^{(j+1)} \overset{\text{def}}{=} \gamma_\nu^{(j+1)} - \tilde{\gamma}_\nu^{(j+1)}$ также является решением однородной системы. Обозначим $\tilde{\rho}_\nu^{(j+1)} = \eta_\nu^{(j+1)} + \zeta_\nu^{(j+1)}$. Аналогичное представление можно привести для правой части $b_\nu^{(0)}$ последнего уравнения из последовательности (25).

Рассмотрим первое уравнение последовательности (25), переписав его с учетом введенных обозначений

$$W\gamma_\nu^{(k_\nu-1)} = \tilde{\rho}_\nu^{(k_\nu)} + (\tilde{\gamma}_\nu^{(k_\nu)} - \bar{\gamma}_\nu^{(k_\nu)}) + \bar{\gamma}_\nu^{(k_\nu)}. \tag{26}$$

Согласно сделанным допущениям $\gamma_\nu^{(k_\nu)} \equiv b_\nu^{(k_\nu)}$, $b_\nu^{(k_\nu)} = \bar{\gamma}_\nu^{(k_\nu)}$ и поэтому $\gamma_\nu^{(k_\nu)} \equiv \tilde{\gamma}_\nu^{(k_\nu)} \equiv \bar{\gamma}^{(k_\nu)}$ и решение (26) легко выписать в явном виде

$$\tilde{\gamma}_\nu^{(k_\nu-1)} = \omega\tilde{\rho}_\nu^{(k_\nu)} + \bar{\gamma}_\nu^{(k_\nu-1)},$$

После $k_\nu - 1$ шага прийдем к уравнению

$$W\gamma_\nu^{(0)} = \tilde{\rho}_\nu^{(1)} + (\tilde{\gamma}_\nu^{(1)} - \bar{\gamma}_\nu^{(1)}) + \bar{\gamma}_\nu^{(1)}.$$

Здесь $\tilde{\rho}_\nu^{(1)} = \eta_\nu^{(1)} + \zeta_\nu^{(1)}$. Вектор $\tilde{\gamma}_\nu^{(1)}$ находится из предыдущих шагов:

$$\tilde{\gamma}_\nu^{(1)} = \sum_{j=2}^{k_\nu} \frac{\omega^{j-1}}{(j-1)!} \tilde{\rho}_\nu^{(j)} + \bar{\gamma}_\nu^{(1)}. \tag{27}$$

Решение уравнения (27) также легко выписать в виде

$$\gamma_\nu^{(0)} = \sum_{j=1}^{k_\nu} \frac{\omega^j}{j!} \tilde{\rho}_\nu^{(j)} + \bar{\gamma}_\nu^{(0)}. \tag{28}$$

На последнем шаге получаем уравнение $W\gamma_\nu = \tilde{\rho}_\nu^{(0)} + (\tilde{\gamma}_\nu^{(0)} - \bar{\gamma})_\nu^{(0)} + \bar{\gamma}_\nu^{(0)}$. С учетом соотношений (28) легко приходим к доказываемому результату (24).

Составляющие в сумме (24), пропорциональные w^i на решениях (3) системы (2), пропорциональны $(t - t_0)^i$ и называются в нелинейной механике секулярными членами. Определим оператор проектирования pr F от правой части (11) таким образом, чтобы решение не содержало секулярных членов.

Определение. В качестве проектора pr F_ν от правой части уравнения (11) примем оператор

$$\operatorname{pr} F_\nu \overset{\text{def}}{=} \delta^T (b_\nu^{(0)} - \bar{\gamma}_\nu^{(0)}) \overset{\text{def}}{=} N_{k_\nu}. \tag{29}$$

В силу соотношений

$$W (b_\nu^{(i)} - \bar{\gamma}_\nu^{(i)}) = b_\nu^{(i+1)} - \bar{\gamma}_\nu^{(i+1)}, \quad i = 0, 1, \ldots, \tag{30}$$

выбор оператора проектирования в виде (29) действительно приводит к исчезновению в решении секулярных членов. Составляющую $b_\nu^{(0)} - \bar{\gamma}_\nu^{(0)}$ в правой части (14) будем называть резонансной. Из соотношений (30) следует, что оператор N_{k_ν} удовлетворяет уравнению

$$\underbrace{U]\,U]\ldots U]}_{k_\nu} N_{k_\nu} \overset{\text{def}}{=} U]^{k_\nu} N_{k_\nu} \equiv 0.$$

Оператор N_{k_ν} назовем оператором индекса k_ν. Если $k = 1$, то $b_\nu^{(0)} - \bar{\gamma}_\nu^{(0)} = \rho_\nu^{(0)}$. Введем в рассмотрение дифференциальные операторы $Z_\nu \overset{\text{def}}{=} \delta^T \rho_\nu^{(0)}$, которые коммутируют с оператором U, т. е. $U]\,Z_\nu \equiv 0$. Если Z_i, Z_j — два элемента, коммутативных с U, то из тождества Якоби $U]\,Z_i]\,Z_j + Z_j]\,U]\,Z_i + Z_i]\,Z_j]\,U \equiv 0$ следует, что скобка Пуассона $Z_i]\,Z_j$ от этих операторов также перестановочна с U. Следовательно, элементы Z_ν порождают алгебру Ли — централизатор элемента U (определение см. в [13, с. 13]). Обозначим эту алгебру через β_0. Можно показать, что скобка Пуассона двух операторов N_{j_1}, N_{j_2} индексов j_1, j_2 является оператором индекса $j_1 + j_2 - 1$ и операторы N_{k_ν}, $\nu = 1, 2, \ldots$, порождают алгебру Ли (в общем случае бесконечномерную), которую будем называть алгеброй централизатора степени k и обозначать через β_0^k (по максимальному индексу порождающих ее элементов). Очевидно, $\beta_0 \subset \beta_0^k$. При выборе проектора в соответствии с определением (29) преобразованный оператор

$$U_0 = U + \varepsilon N_{k_1} + \ldots + \varepsilon^\nu N_{k_\nu} + \ldots, \tag{31}$$

а преобразованная система дифференциальных уравнений (10) принимает соответственно вид

$$\dot{x}_i = \omega_i(x) + \varepsilon N_{k_1} x_i + \ldots + \varepsilon^\nu N_{k_\nu} x_i + \ldots, \quad i = \overline{1, n}. \tag{32}$$

Систему уравнений (32) будем называть системой централизатора степени k.

Очевидно также, что с учетом выбора проектора по формулам (29) оператор преобразования $S_\nu = \delta^T \bar{\gamma}_\nu$. Подводя итог сказанному, основной результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Система уравнений*

$$\dot{x}' = \omega(x') + \varepsilon\tilde{\omega}(x'), \quad x'(t_0) = x_0,$$

в области R^0 существования первых интегралов системы нулевого приближения $\dot{x}' = \omega(x')$ заменой переменных

$$x_i = \exp(-\varepsilon S')\, x_i', \quad x_i' = \exp(\varepsilon S)\, x_i, \quad i = \overline{1, n},$$

может быть преобразована к системе централизатора степени k

$$\dot{x}_i = \omega_i(x) + \varepsilon N_{k_1} x_i + \ldots + \varepsilon^\nu N_{k_\nu} x_i + \ldots, \quad i = \overline{1, n},$$

где операторы N_{k_ν} удовлетворяют уравнению $U]^k N_{k_\nu} = 0$, $k < +\infty$. Коэффициенты $\overline{\gamma}_\nu$ операторов приводящих преобразований $S_\nu = \delta^T \overline{\gamma}_\nu$, $\nu = 1, 2\ldots$, находятся как частные решения линейной неоднородной системы Якоби порядка n и не содержат на решениях системы нулевого приближения секулярных членов.

2. Асимптотическое разделение движений. Система централизатора (32) обладает рядом специальных свойств, которые упрощают ее интегрирование по сравнению с возмущенной системой (1). К таким свойствам относится возможность разделения переменных на быстрые и медленные.

Теорема 2. *Замена переменных* (17), (18) *выделяет в системе централизатора* (32) $n-1$ *медленных переменных* $y_1, \ldots, y_{n-1}$ *и одну быструю переменную* τ.

Запишем в новых переменных оператор U_0 (31). Из тождеств $U]^{k_\nu} N_{k_\nu} v_i \equiv 0$, $i = 1, \overline{n-1}$, следует тождество $U^{k_\nu} N_{k_\nu} v_i \equiv 0$. Следовательно,

$$U^{k_\nu - 1} N_{k_\nu} v_i = \psi_{\nu i}(v). \tag{33}$$

Перепишем соотношение (33) как уравнение $U \cdot U^{k_\nu - 2} N_{k_\nu} v_i = \psi_{\nu i}(v)$. Его решение, обращающееся в $\psi_{\nu i}(y)$ при $x_n = y_n$, легко выписывается в виде

$$U^{k_\nu - 2} N_{k_\nu} v_i \equiv (w + 1)\, \psi_{\nu i}(v). \tag{34}$$

Рассматривая равенство (34) как уравнение относительно $U^{k_\nu - 3} N_{k_\nu} v_i$, найдем явный вид последней функции. После k_ν шагов приходим к выражению

$$N_{k_\nu} v_i = \left(\sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \frac{w^j}{j!}\right) \psi_{k_\nu i}(v), \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Аналогично можно убедиться в справедливости соотношения $N_{k_\nu} w = \left(\sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \frac{w^j}{j!}\right) \psi_{k_\nu n}(v)$. Следовательно, в новых переменных оператор

$$N_{k_\nu} = \delta_y^T \cdot \psi_\nu, \tag{35}$$

где $\delta_y \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{colon}\left(\frac{\partial}{\partial y_1} \ldots, \frac{\partial}{\partial y_{n-1}}, \frac{\partial}{\partial \tau}\right)$, $\psi_\nu = \mathrm{colon}\,(N_{k_\nu} v_1, \ldots, N_{k_\nu} v_{n-1} N_{k_\nu} w)$.

Тем самым определен вид оператора U_0. Запишем в итоге систему централизатора (32):

$$\begin{gathered} \dot{y}_i = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu \left(\sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \frac{\tau^j}{j!}\right) \psi_{k_\nu i}(y), \quad i = 1, \overline{n-1}, \\ \dot{\tau} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu \left(\sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \frac{\tau^j}{j!}\right) \psi_{k_\nu n}(y), \end{gathered} \tag{36}$$

что и доказывает теорему.

Система (36) по переменным $y_1, \ldots, y_{n-1}$ и τ не разделяется.

С л е д с т в и е. *Если степень алгебры централизатора равна единице, то в системе* (36) *уравнения для медленных переменных интегрируются независимо от уравнений для быстрой переменной.*

В самом деле, в этом случае в коэффициентах операторов (35) отсутствуют переменные τ и система (36) принимает вид

$$\dot{y}_i = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu \psi_{k_\nu i}(y), \quad i=\overline{1, n-1}, \quad \dot{\tau} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu \psi_{k_\nu n}(y).$$

3. А с и м п т о т и ч е с к а я д е к о м п о з и ц и я. Предположим, что система нулевого приближения (10) вполне приводима, т. е., разбив координаты вектора x' на группы $x'_{\nu_i} = \mathrm{colon}(x'_{1\nu_i}, \ldots, x'_{\nu_i\nu_i})$, $i=\overline{1, g}$, можно указать в G обратимую замену переменных $x' = \varphi(z)$, $z = \varphi^{-1}(x')$, которая приводит систему (10) к независимо интегрируемым подсистемам $\dot{z}_{\nu_i} = \Omega(z_{\nu_i})$, $\nu_1 + \ldots + \nu_g = n$, $i = \overline{1, g}$. Свойства системы нулевого приближения в этом случае вполне характеризуются обертывающей алгеброй Ли β с подалгебрами $P_{\nu_1}, \ldots, P_{\nu_g}$ и базисными линейно несвязными операторами $\{U_{1\nu_i}, \ldots, U_{\nu_i\nu_i}\}$, $i=\overline{1, g}$ [14].

Для полной приводимости необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\beta = P_{\nu_1} \dot{+} \ldots \dot{+} P_{\nu_q}, \quad P_{\nu_i}] P_{\nu_i} \in P_{\nu_i}, \quad P_{\nu_i}] P_{\nu_j} \equiv 0, \quad i \neq j.$$

Покажем, что система уравнений Якоби (14) или соответствующая ей система обыкновенных дифференциальных уравнений (19) также распадается на g независимо интегрируемых подсистем. Разложим оператор F_ν по базису β (предполагается, что он содержит n линейно несвязных операторов): $F_\nu = \sum_{i=1}^{g} (b^\nu_{1\nu_i} U_{1\nu_i} + \ldots + b^\nu_{\nu_i\nu_i} U_{\nu_i\nu_i})$. Оператор S_ν также ищем в виде суммы

$$S_\nu = \sum_{i=1}^{g} (\gamma^\nu_{1\nu_i} U_{1\nu_i} + \ldots + \gamma^\nu_{\nu_i\nu_i} U_{\nu_i\nu_i}).$$

Пусть $\hat{U} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{colon}(U_{1\nu_1}, \ldots, U_{\nu_1\nu_1}, \ldots, U_{1\nu_g}, \ldots, U_{\nu_g\nu_g})$, тогда имеет место тождество

$$U]\hat{U} = A\cdot\hat{U},$$

где

$$A = \mathrm{diag}(A_{\nu_1}, \ldots, A_{\nu_g}), \quad A_{\nu_i} \in \Re^{\nu_i\nu_i}, \quad i=\overline{1, g}, \tag{37}$$

квазидиагональная матрица.

Обозначая, как и выше, $B = A^\tau$, перейдем к системе Якоби (14), однако уже распадающейся на g подсистем, независимо интегрируемых в соответствии со структурой матрицы коэффициентов (37).

Отметим важный частный случай, когда алгебра β коммутативна. В этом случае матрица A в (37) тождественно равна нулю и система (14) обращается в систему $UE\gamma_\nu = b^{(0)}_\nu$, распадающуюся на n независимо интегрируемых линейных уравнений в частных производных первого порядка.

Представляет интерес выяснение условий, при которых преобразованная система также распадается на g независимо интегрируемых подсистем вида

$$\dot{y}_{\mu\nu_i} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu \left(\sum_{j=0}^{k_\nu-1} \frac{\tau_i^j}{j!}\right) \psi^{(\nu_i)}_{k_\nu\mu}(y_{1\nu_i}, \ldots, y_{\nu_i-1,\nu_i}), \quad \mu = \overline{1, \nu_i - 1}, \tag{38}$$

$$\dot{\tau}_i = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu \left(\sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \frac{\tau_i^j}{j!} \right) \psi_{k_\nu n}^{(\nu_i)} (y_{1\nu_i}, \ldots, y_{\nu_i - 1, \nu_i}), \quad i = \overline{1, g}.$$

Систему (1) назовем в этом случае асимптотически декомпозируемой.

Приведем без доказательства следующие результаты. В предложении о приводимости системы нулевого приближения (10) оператор $U = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ может быть представлен в виде прямой суммы:

$$U = U_1 \dot{+} \ldots \dot{+} U_g \quad U_i \in P_{\nu_i}, \quad U_i] \, U_j \equiv 0, \quad i \neq j,$$

Лемма 3. *Пусть в области R^0 система*

$$U_1 f = 0, \ldots, U_{i-1} f = 0, \quad U_{i+1} f = 0, \ldots, U_g f = 0 \tag{39}$$

имеет ν_i независимых решений и система

$$U_i f = 1, \quad U_j f = 0, \quad i \neq j, \tag{40}$$

имеет решение $w_i(x)$, $i = \overline{1, g}$.

Тогда уравнение $U_i f = 0$ имеет $\nu_i - 1$ решений $v_{1\nu_i}(x), \ldots, v_{\nu_i - 1, \nu_i}(x)$, аннулируемых операторами U_j, $i \neq j$, т. е. $U_j v_{1\nu_i} \equiv 0, \ldots, U_j v_{\nu_i - 1, \nu_i} \equiv 0$, $j \neq i$, $j = \overline{1, g}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть в области R^0 выполняются условия* (39), (40), *тогда для асимптотической декомпозируемости системы* (1) *к виду* (38) *необходимо и достаточно, чтобы алгебра централизатора β_0^k была вполне приводима и выполнялись соотношения*

$$\beta_0^k = \beta_{0\nu_1}^k \dot{+} \ldots \dot{+} \beta_{0\nu_g}^k, \quad \beta_{0\nu_j}^k] \, \beta_{0\nu_j}^k \in \beta_{0\nu_j}^k, \quad \beta_{0\nu_j}^k] \, \beta_{0\nu_i}^k \equiv 0, \quad i \neq j, \quad \nu_1 + \ldots + \nu_g = n.$$

4. Заключение. При обосновании изложенного алгоритма был использован переход от системы Якоби (14) к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (20), требующий знания общего решения и первых интегралов системы нулевого приближения. В ряде случаев, например для систем с полиномиальными коэффициентами, можно непосредственно решить соответствующие системы Якоби, не переходя к обыкновенным дифференциальным уравнениям, и найти элементы алгебры централизатора и операторы приводящего преобразования S_ν без знания общего решения и первых интегралов системы нулевого приближения.

Проиллюстрируем особенности приведенного алгоритма на примере системы

$$\dot{x}_1' = x_2', \quad \dot{x}_2' = -x_1' + \varepsilon (1 - x_1'^2) x_2', \quad x'(t_0) = x_0, \tag{41}$$

эквивалентной уравнению Ван-дер-Поля. Вычисление проведем для первого приближения.

Системе (41) соответствует дифференциальный оператор

$$U' + \varepsilon \tilde{U}',$$

где $U' = x_2' \frac{\partial}{\partial x_1'} - x_1' \frac{\partial}{\partial x_2'}$, $\tilde{U}' = \varepsilon (1 - x'^2) x_2' \frac{\partial}{\partial x_2'}$.

В результате преобразования по формулам (6) получаем в первом приближении выражение для оператора U_0:

$$U_0 = U + \varepsilon (- U] \, S_1 + \tilde{U}).$$

Рассмотрим уравнение

$$U] \, S_1 = \tilde{U} - \operatorname{pr} \tilde{U}. \tag{42}$$

Подстановка $S_1 = \gamma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ и операторов U, $\tilde{U}$ в (42) приводит к системе Якоби

$$(UE + B)\gamma = b^{(0)}, \tag{43}$$

где $B = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$, $E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $b^{(0)} = \mathrm{colon}\,(0; (1 - x_1^2)\, x_2)$.

Можно показать, что из полупростоты матрицы B следует, что степень алгебры централизатора равна единице. Следовательно, функции $\gamma^{(0)}$, $\bar{\gamma}^{(0)}$ (см. формулы (25)) находятся из системы

$$(UE + B)\gamma^{(0)} = b^{(1)}, \quad (UE + B)\bar{\gamma} = \bar{\gamma}^{(0)}, \quad (\bar{\gamma}^{(0)} = \gamma^{(0)}), \tag{44}$$

где первый дифференциальный образ вектора $b^{(0)}$ равен

$$b^{(1)} = (UE + B)\, b^{(0)}, \quad b^{(1)} = \mathrm{colon}\,(-x_2 + x_1^2 x_2;\ -x_1 - 2x_1 x_2^2 + x_1^3).$$

Так как коэффициенты системы (44) — полиномы степени не больше трех, то решение ищем также в виде полиномов степени три. Для коэффициентов получается система линейных алгебраических уравнений. Находим частное решение системы (44), и поэтому все произвольные параметры по ходу решения положим равными нулю. Запишем окончательный результат:

$$\gamma_1^{(0)} = \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{8} x_1 x_2^2 - \frac{1}{8} x_1^3; \quad \bar{\gamma}_1 = -\frac{1}{4} x_2 - \frac{1}{4} x_1^2 x_2 - \frac{1}{8} x_2^3;$$

$$\gamma_2^{(0)} = -\frac{1}{2} x_2 + \frac{7}{8} x_1^2 x_2 - \frac{1}{8} x_3^2; \quad \bar{\gamma}_2 = -\frac{1}{4} x_1 + \frac{3}{8} x_1^3.$$

Далее, находим резонансные составляющие в правой части уравнений (43):

$$\rho_1^{(0)} = b_1^{(0)} - \gamma_1^{(0)} = -\frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{8} x_1^3 + \frac{1}{8} x_1 x_2^2, \quad \rho_2^{(0)} = b_2^{(0)} - \gamma_2^{(0)} = -\frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{8} x_2^3 + \frac{1}{8} x_1^2 x_2.$$

Преобразованный оператор легко записать в первом приближении $U_0 = U - \varepsilon\left(\rho_1^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_1} + \rho_2^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$, систему централизатора

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - \varepsilon\left(-\frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{8} x_1^3 + \frac{1}{8} x_1 x_2^2\right), \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - \varepsilon\left(-\frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{8} x_2^3 + \frac{1}{8} x_1^2 x_2\right) \end{aligned} \tag{45}$$

и оператор преобразования S_1 в первом приближении $S_1 = \bar{\gamma}_1 \partial/\partial x_1 + \bar{\gamma}_1 \partial/\partial x_2$. Система нулевого приближения исходной системы допускает интеграл $x_1^2 + x_2^2$. Следовательно, в уравнениях (45) можно выделить одну медленную переменную. Произведем замену $y_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\tau = -\mathrm{arctg}\, x_2/x_1$, где $\mathrm{arctg}\, x_2/x_1$ — частное решение уравнения $Uf = 1$, и выпишем систему централизатора (45) в этих переменных:

$$\dot{y}_1 = \varepsilon/2\,(1 - 1/4 y_1^2)\, y_1, \quad \dot{\tau} = 1. \tag{46}$$

Уравнения (46) в точности совпадают с первым приближением, полученным асимптотическим методом [1, с. 81].

Подводя итог, отметим, что в предлагаемом алгоритме, в отличие от метода усреднения Н. Н. Боголюбова или его вариантов для систем дифференциальных уравнений с быстрыми и медленными переменными, не требуется приведения исследуемой системы к стандартному виду. В отличие от асимптотического метода, не используется явный вид решения системы нулевого приближения, а используются лишь структурные свойства обертывающей алгебры Ли системы нулевого приближения и исходной системы. Таким образом, построение алгебры централизатора по своему смыслу является обобщением усредняющего оператора.

Вопросы обоснования предложенного алгоритма будут рассмотрены в следующей работе.

1. *Боголюбов Н. Н.*, *Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 508 с.
2. *Hori G.* Theory of general perturbations with unspecified canonical variables.— J. Japan. Astron. Soc., 1966, 18, N 4, p. 287—296.
3. *Kirchgraber U.*, *Stiefel E.* Methoden der analytischen Störungsrechnung und ihre Anwendungen.— Stuttgart : B. C. Teubner, 1978.— 294 S.
4. *Povzner A.* Linear methods in problems of nonlinear differential equations with a small parameter.— Internat. J. Nonlinear Mech., 1974, 9, N 4, p. 279—323.
5. *Джакалья Г. Е. О.* Методы теории возмущений для нелинейных систем.— М. : Наука, 1979.— 319 с.
6. *Найфе А.* Методы возмущений.— М. : Мир, 1976.— 455 с.
7. *Mitropolsky Ju. A.* Sur la Decompositions Asumptotique des Systemes Differentieles Fondee sur des Transformations de Lie.— Nonlinear Differential Equations, Invariance, Stability and Bifurcation / Ed. by P. de Mottoni, L. Salvadori: Acad. Press, 1981, p. 283—326.
8. *Митропольский Ю. А.*, *Лопатин А. К.* Асимптотическое расщепление систем дифференциальных уравнений.— Киев, 1979.— 68 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики, 79.2).
9. *Лопатин А. К.* Асимптотическое расщепление систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности.— В кн.: Кибернетика и вычислительная техника.— Киев : Наук. думка, 1978, вып. 39, с. 39—45.
10. *Митропольский Ю. А.* Развитие метода усреднения.— В кн.: IX Международная конференция по нелинейным колебаниям : Тез. докл., Киев : 30 августа — 6 сентября 1981, с. 224.
11. *Лопатин А. К.* Асимптотическая декомпозиция систем дифференциальных уравнений высокой размерности и ее приложения.— Там же, с. 200.
12. *Campbell J. E.* Introductory Treatise on Lie's Theory of Finite Continuous Transformation Groups.— Oxford : Clarendon Press, 1903.— 411 p.
13. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли.— М. : Мир, 1976.— 496 с.
14. *Митропольский Ю. А.*, *Лопатин А. К.* О преобразовании систем нелинейных дифференциальных уравнений к нормальной форме.— Математическая физика, 1973, вып. 14, с. 125—140.

Институт математики
АН УССР, Киев

Поступила в редакцию
15.06.83