УДК 517.521.8

В. И. Мельник

Тауберовы теоремы с остатком для средних Рисса и Чезаро

1. Средние Рисса. Пусть $s(t)$ — данная функция, измеримая на $(0, +\infty)$, $s(0) = 0$, $p = k + il$ — комплексное число с положительной вещественной частью и

$$s^p(x) = p \int_0^x (x - t)^{p-1} s(t)\, dt, \ s^0(x) = s(x), \ x \geqslant 0.$$

Говорят, что функция имеет (R, p)-предел при $t \to +\infty$, равный s_0, если $x^{-p}s^p(x) \to s_0$, $x \to +\infty$.

Обозначим через $V_p(x)$ произвольную возрастающую мажоранту функции $s^p(x)$, т. е. будем предполагать, что выполнены условия

$$V_p(x)\uparrow, \ |s^p(x)| \leqslant V_p(x), \ x \geqslant 0. \tag{1}$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $\operatorname{Re} p = k > 0$ *и для некоторого* $x > 0$ *существуют действительные числа* $\theta(x)$, $h(x)$, α *такие, что* $0 < h(x) \leqslant x$, $0 < \alpha$, $\operatorname{Re}[\exp(i\theta(x))\, s(t)] \geqslant \alpha\, |s(x)|$, $x - h(x) < t < x$.

Предположим также, что выполнены условия (1).

Тогда найдется константа C_p, *зависящая только от* p, *для которой справедливо неравенство*

$$|s(x)| \leqslant C_p \alpha^{-1} h^{-k}(x)\, V_p(x).$$

Если же предположение имеет вид $\operatorname{Re}[\exp(i\theta(x))\, s(t)] \geqslant \alpha\, |s(x)|$, $x < t < x + h(x)$, *то справедливо заключение*

$$|s(x)| \leqslant C_p \alpha^{-1} h^{-k}(x)\, V_p(x + h(x)).$$

Теорема 2. *Пусть функции* $s(x)$, $\Phi(x)$ *измеримы на* $(0, +\infty)$. *Предположим, что функции* $\Phi(x)$, $\Phi^p(x) = p\int_0^x (x-t)^{p-1}\Phi(t)\,dt$, $V_p(x)$, $h(x)$, $T(x)$ *и число* p *удовлетворяют условиям*: а) $0 < \operatorname{Re} p$; б) $0 < h(x) < x$; в) $|\Phi(v) - \Phi(x)| = O(T(x))$ *при* $|x - v| \leqslant h(x)$; г) $\overline{\lim}\, |\operatorname{Arg}(s(v) - s(x) + O(T(x))) - a(x)| < \pi/2$, $x \leqslant v \leqslant x + h(x)$, $x \to +\infty$, $\overline{\lim}\, |\operatorname{Arg}(s(x) - s(v) + O(T(x))) - a(x)| < \pi/2$, $x - h(x) \leqslant v \leqslant x$, $x \to +\infty$; д) *функция* $V_p(x)$ *возрастает и* $|s^p(x) - \Phi^p(x)| \leqslant V_p(x)$, $x \geqslant 0$; е) $V_p(x + h(x))\, h^{-k}(x) = O(T(x))$.

Тогда $s(x) = \Phi(x) + O(T(x))$, $x \to +\infty$, *причем константа* $O(1)$ *в заключении теоремы зависит только от констант в предположениях теоремы.*

Теоремы 1 и 2 — общие тауберовы теоремы с остатком для метода суммирования Рисса [1]. Из теоремы 1 легко получить и обычные тауберовы теоремы [2, 3]. Условие возрастания мажоранты $V_p(x)$ в этих работах часто заменяется некоторыми другими условиями. В наших теоремах условие возрастания $Y_p(x)$ может быть также ослаблено, но объем статьи не позволяет подробно остановиться на этом. В частности, для натуральных p достаточно предполагать, что функция $V_p(x)$ мажорирует соответствующую функцию на отрезке $[x - h(x), x + h(x)]$ (в теореме 1: $s^p(v) \leqslant V_p(x)$ при $x - h(x) \leqslant v \leqslant x + h(x)$, но $V_p(x)$ не обязательно возрастает).

Для доказательства теоремы 1 будем использовать известную формулу (см., напр., [2], (1.21))

$$s^p(x) = B^{-1}(q+1, p-q)\int_0^x (x-t)^{p-q-1} s^q(t)\,dt, \quad 0 < \operatorname{Re} p < \operatorname{Re} q. \tag{2}$$

Введем вспомогательную функцию $\psi(t) = (x-t)^m (t - x + h)^m$, m—натуральное, которая имеет следующие легко проверяемые свойства:

$$\begin{gathered} \psi(x) = \psi'(x) = \ldots = \psi^{(m-1)}(x) = 0, \\ \psi(x-h) = \psi'(x-h) = \ldots = \psi^{(m-1)}(x-h) = 0; \end{gathered} \tag{3}$$

$$|\psi(t)| \leqslant C_m h^{2m}, \ |\psi^{(m)}(t)| \leqslant C_m h^m, \ x - h \leqslant t \leqslant x. \tag{4}$$

Всюду в дальнейшем h имеет значение, равное $h(x)$ из теоремы 1.

Лемма 1. *При выполнении условий теоремы* 1 *и натуральном* m, *удовлетворяющим условию* $k < m$, *справедливо неравенство*

$$\left| \int_{x-h}^{x} \psi(t)\, s(t)\, dt \right| \leqslant C_p \,[h(x)]^{-k+2m+1}\, V_p(x). \qquad (5)$$

Ввиду формулы (2), первообразной для функции $s^q(t)$ будет функция $(q+1)^{-1} s^{q+1}(t)$ при любом q, $\operatorname{Re} q > 0$. Используя это, а также условия (3), левую часть неравенства (5) с помощью m-кратного интегрирования по частям приведем к виду

$$\frac{1}{m!} \left| \int_{x-h}^{x} \psi^{(m)}(t)\, s^m(t)\, dt \right|. \qquad (6)$$

По формуле (2)

$$s^m(t) = B^{-1}(p+1,\, m-p) \int_0^t (t-u)^{m-p-1} s^p(u)\, du.$$

После подстановки этого выражения в формулу (6) и перемены порядка интегрирований с помощью неравенства (1) получим

$$C_p \left| \int_0^x s^p(u)\, J(x, u)\, du \right| \leqslant C_p V_p(x) \int_0^x |J(x, u)|\, du, \qquad (7)$$

где

$$J(x, u) = \int_{\max(u,\, x-h)}^{x} (t-u)^{m-p-1} \psi^{(m)}(t)\, dt.$$

При $x - h \leqslant u \leqslant x$ с помощью неравенства (4) получим

$$|J(x, u)| \leqslant C_m h^m \int_u^x (t-u)^{m-k-1}\, dt \leqslant C_p h^{2m-k}, \qquad (8)$$

и это же неравенство сохраняется при $\max(0,\, x-2h) \leqslant u \leqslant x-h$. Если $x - 2h \leqslant 0$, то, подставив оценку (8) в неравенство (7), получим правую часть неравенства (5). Если же $x - 2h > 0$, то при $0 \leqslant u \leqslant x - 2h$ неравенство (8) можно улучшить. С помощью m-кратного интегрирования по частям и неравенства (4) найдем

$$|J(x, u)| = C_p \left| \int_{x-h}^{x} (t-u)^{-p-1} \psi(t)\, dt \right| \leqslant C_p h^{2m+1} (x-h-u)^{-k-1}.$$

Используя это, а также (8), оценку выражения (7) продолжим следующим образом:

$$\leqslant C_p V_p(x) \left(\int_0^{x-2h} (x-h-u)^{-k-1} h^{2m+1}\, du + \int_{x-2h}^{x} h^{2m-k} du \right) \leqslant C_p V_p(x)\, h^{2m+1-k},$$

и неравенство (5) полностью доказано.

Теперь легко завершить доказательство теоремы 1. Из условий этой теоремы следует

$$\left| \int_{x-h}^{x} \psi(t)\, s(t)\, dt \right| \geqslant \operatorname{Re} \left\{ \int_{x-h}^{x} \psi(t)\, e^{i\theta(x)} s(t)\, dt \right\} \geqslant \alpha\, |s(x)| \int_{x-h}^{x} \psi(t)\, dt =$$

$$= \alpha B(m+1,\, m+1)\, |s(x)|\, h^{2m+1}.$$

Это вместе с неравенством (6) доказывает теорему 1.

Если же выполнено предположение второй части теоремы, то рассуждения проводятся аналогично, исходя из интеграла

$$\int_x^{x+h} \psi(t)\, s(t)\, dt, \ \ \psi(t) = (x+h-t)^m (t-x)^m.$$

Перейдем к доказательству теоремы 2. Разъясним сначала условие г) этой теоремы. Оно обозначает, что существует функция $\beta(x, v)$ такая, для которой при подходящем выборе $\operatorname{Arg}(s(v) - s(x) + \beta(x, v))$ выполняется условие $\overline{\lim}\,|\operatorname{Arg}(s(v) - s(x) + \beta(x, v)) - a(x)| < \pi/2$, $x \leqslant v \leqslant x + h(x)$, $x \to +\infty$, причем $|\beta(x, v)| \leqslant AT(x)$, $x \geqslant x_0$ (и аналогично для отрезка $x - h(x) \leqslant v \leqslant x$). Если же $s(v) - s(x) + \beta(x, v) = 0$, то за $\operatorname{Arg} 0$ будем принимать любое подходящее число, и условие г) выполняется автоматически. Поэтому условие г) выполнено, если $s(v) - s(x) = O(T(x))$, $x - h(x) \leqslant v \leqslant x + h(x)$, $x \to +\infty$. Условие г) выполнено и для всех возрастающих функций (тогда полагаем $\beta(x, v) = 0$).

Для дальнейшего необходимы также следующие рассуждения, которые становятся очевидными после построения рисунка. Пусть z — комплексное число, и на комплексной плоскости задано два симметричных сектора с вершиной в точке z, раствор которых $\leqslant \pi - \tau$, $\tau > 0$. Тогда расстояние от начала координат до одного из этих секторов не меньше $\mu|z|$ где $\mu > 0$ зависит только от τ. Обозначим этот сектор через Γ. Можно найти направление l (совпадающее с биссектрисой сектора или близкое к ней), проекция на которое любого вектора $w \in \Gamma$ не меньше $\mu|z|$. Более того, если ω — комплексное число с достаточно малым модулем, $|\omega| < \varepsilon(\tau)$, то проекция на l любого вектора $(1 + \omega)w$, $w \in \Gamma$, не меньше $\mu_2|z|$, $\mu_2 = \mu_2(\tau) > 0$, так как все числа $(1 + \omega)w$, $w \in \Gamma$, можно заключить в новый сектор Γ' такого же типа, как и сектор Γ.

Переходя к доказательству теоремы 2, приведем к удобному виду условие г) этой теоремы. Из условий в), г) теоремы 2 и тождества $s(v) - \Phi(v) = s(x) - \Phi(x) + (s(v) - s(x)) + (\Phi(x) - \Phi(v))$ для функции $s_1(v) = s(v) - \Phi(v)$ получим представление

$$s_1(v) = s_1(x) + \Delta(x, v) + O(T(x)),\ x \leqslant v \leqslant x + h(x),\ x > x_0, \tag{9}$$

где $\Delta(x, v)$ лежит в некотором секторе Γ с вершиной в начале координат, раствор сектора меньше π, а биссектриса имеет направление $\exp(ia(x))$. Аналогично

$$s_1(x) = s_1(v) + \Delta(v, x) + O(T(x)),\ \ x - h(x) \leqslant v \leqslant x,\ \ x > x_0, \tag{10}$$

где $\Delta(v, x)$ лежит в том же секторе Γ, раствор которого меньше π и не зависит от x. Умножая равенство (10) на -1, запишем его в виде

$$s_1(v) = s_1(x) - \Delta(v, x) + O(T(x)),\ \ x - h(x) \leqslant v \leqslant x,\ \ x > x_0, \tag{11}$$

где число $-\Delta(v, x)$ принадлежит сектору $-\Gamma$, симметричному с сектором Γ относительно начала координат. Объединяя соотношения (11) и (9), получаем

$$s_1(v) = s_1(x) + \Delta^*(x, v) + O(T(x)),\ x - h(x) \leqslant v \leqslant x + h(x),\ x > x_0, \tag{12}$$

где $\Delta^*(x, v)$ принадлежит сектору Γ при $x < v$ или сектору $-\Gamma$ при $v < x$. Оценка члена $O(T(x))$, входящего в формулу (12), содержит некоторую константу, т. е. $O(T(x)) \leqslant AT(x)$, $x \to +\infty$. Если с самого начала рассуждений считать, что $|s_1(x)| > 4AT(x)$, то для членов в формуле (12) справедлива оценка

$$|s_1(x) + O(T(x))| \geqslant |s_1(x)| - AT(x) \geqslant (1/2)\,|s_1(x)|.$$

Применим сделанное выше замечание к равенству (12), выбрав $z = s_1(x) + O(T(x))$. Существуют $\mu > 0$ и функция $\theta(x)$ такие, для которых неравенство $\operatorname{Re}\{\exp(i\theta(x)) s_1(v)\} \geqslant \mu\,|s_1(x)|$ будет выполнено по крайней мере на одном из отрезков $x - h(x) \leqslant v \leqslant x$ или $x \leqslant v \leqslant x + h(x)$, $x > x_0$. Этим показано, что для любого достаточно большого x, удовлетворяющего условию $|s_1(x)| > 4AT(x)$, будет выполнено условие $\operatorname{Re}[\exp(i\theta(x)) s_1(t)] \geqslant \alpha\,|s_1(x)|$ теоремы 1.

Теперь можно закончить доказательство теоремы 2 путем разбора отдельных случаев. Если для достаточно большого x окажется $|s_1(x)| \leqslant 4AT(x)$, где A — упоминавшаяся выше константа, то утверждение теоремы 2 имеет место. Если же $|s_1(x)| > 4AT(x)$, то применима теорема 1, согласно которой $|s_1(x)| \leqslant C_p \alpha^{-1} h^{-k}(x) V_p(x + h(x))$, и ввиду условия е) теоремы 2 можно переписать в виде $s_1(x) = O(T(x))$. Таким образом, во всех случаях справедливо заключение теоремы 2.

При применениях теоремы 2 функции $V_p(x)$, $\Phi(x)$ известны. Если $s(v)$, например, возрастает, то условие г) теоремы 2 выполнено при любом $h(x)$, поэтому обычно полагаем

$$T(x) = \inf_{0<h<x} \{ \sup_{|v-x|\leqslant h} |\Phi(v) - \Phi(x)| + h^{-k} V_p(x+h) \},$$

а за $h(x)$ принимаем то значение h, при котором в написанном выше выражении достигается значение, близкое к инфимуму.

2. Средние Чезаро. Пусть (s_n) — данная последовательность, $p = k + il$ — комплексное число, $k > -1$ и $s_n^p = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{p-1} s_v$, $s_n^0 = s_n$, $n = 0, 1, \ldots$, где числа A_ν^{p-1} определены как коэффициенты степенного разложения $(1-x)^{-p} = \Sigma A_\nu^{p-1} x^v$, $|x| < 1$. Говорят, что последовательность (s_n) имеет (C, p)-предел при $n \to +\infty$, равный s, если $s_n^p / A_n^p \to s$, $n \to \infty$.

Обозначим через $V_p(n)$ произвольную возрастающую мажоранту последовательности s_n^p, т. е. будем предполагать, что выполнены условия

$$V_p(n) \uparrow, \quad |s_n^p| \leqslant V_p(n).$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 3. *Пусть* $\operatorname{Re} p = k > 0$ *и для натурального* n *существуют действительные числа* $\theta(n)$, α *и натуральное число* $h(n)$ *такие, что* $3(k+1) < h(n) \leqslant n$, $\alpha > 0$, *и*

$$\operatorname{Re}[e^{i\theta(n)} s_\nu] \geqslant \alpha |s_n|, \quad n - h(n) < \nu < n.$$

Предположим, что $V_p(n)$ — *возрастающая мажоранта последовательности* s_n^p.

Тогда найдется константа C_p, *зависящая только от* p, *для которой справедливо неравенство*

$$|s_n| \leqslant C_p \alpha^{-1} h^{-k}(n) V_p(n).$$

Если же предположение имеет вид

$$\operatorname{Re}[e^{i\theta(n)} s_\nu] \geqslant \alpha |s_n|, \quad n < \nu < n + h(n),$$

то справедливо заключение $|s_n| \leqslant C_p \alpha^{-1} h^{-k}(n) V_p(n + h(n))$.

Теорема 4. *Пусть последовательности* (s_n), (Φ_n), $\Phi_n^p = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{p-1} \Phi_\nu$, $V_p(n)$, $h(n)$, $T(n)$ *и число* p *удовлетворяют следующим условиям*: а) $\operatorname{Re} p = k > 0$; б) $3(k+1) < h(n) < n$; в) $|\Phi_n - \Phi_\nu| = O(T(n))$ *при* $|n - \nu| \leqslant h(n)$; г) $\overline{\lim} |\operatorname{Arg}(s_\nu - s_n + O(T(n))) - a_n| < \pi/2$, $n \leqslant \nu \leqslant n + h(n)$, $n \to +\infty$, $\overline{\lim} |\operatorname{Arg}(s_n - s_\nu + O(T(n))) - a_n| < \pi/2$, $n - h(n) \leqslant \nu \leqslant n$, $n \to +\infty$; д) *последовательность* $V_p(n)$ *возрастает и* $|s_n^p - \Phi_n^p| \leqslant V_p(n)$; е) $V_p(n + h(n)) h^{-k}(n) = O(T(n))$.

Тогда $s_n = \Phi_n + O(T(n))$, $n \to +\infty$, *причем константа* $O(1)$ *в заключении теоремы зависит только от констант в предположениях теоремы.*

Теоремы 3 и 4 — общие тауберовы теоремы с остатком для метода суммирования Чезаро, которые для этого метода разработаны еще недостаточно (см. [1]). Для натуральных p частные случаи теоремы 3 отмечены в [4, 5], где изучен также случай нецелого p. В работах [4, 5] условие возрастания мажорант часто заменяется некоторыми другими условиями. В наших теоремах условие возрастания мажоранты также может быть ослаблено, но объем статьи не позволяет подробно остановиться на этом. В частности, для натуральных p достаточно предполагать, что последовательность $V_p(n)$ мажорирует соответствующую последовательность на отрезке $[n—h(n), n+h(n]$ в) теореме 3: $|s_\nu^p|\leqslant V_p(n)$ при $n-h(n)\leqslant\nu\leqslant n+h(n)$, но $V_p(n)$ не обязательно возрастает).

Для доказательства теоремы 3 будем использовать формулу (см. напр., [6], с. 126)

$$s_n^p=\sum_{\nu=0}^{n}A_{n-\nu}^{p-q-1}s_\nu^p,\ -1<\operatorname{Re}q<\operatorname{Re}p. \tag{13}$$

Введем вспомогательную последовательность

$$\varphi(\nu)=(\nu-n+h)(\nu-n+h-1)\dots(\nu-n+h-m+1)\times$$
$$\times(n-m+1-\nu)(n-m+2-\nu)\dots(n-\nu),$$

m — натуральное число, которая имеет следующие легко проверяемые свойства:

$$\varphi(n-h)=\Delta\varphi(n-h)=\dots=\Delta^{m-1}\varphi(n-h)=0,$$
$$\varphi(n)=\Delta\varphi(n-1)=\dots=\Delta^{m-1}\varphi(n-m+1)=0,$$
$$|\varphi(\nu)|\leqslant h^{2m},\ |\Delta^m\varphi(\nu)|\leqslant c_m h^m,\ n-h\leqslant\nu\leqslant n,$$

где $\Delta\varphi(\nu)=\varphi(\nu)-\varphi(\nu+1)$, $\Delta^2\varphi(\nu)=\Delta(\Delta\varphi(\nu))$ и т. д. Всюду в дальнейшем h имеет значение, равное $h(n)$ из теоремы 1.

Лемма 2. *При выполнении условий теоремы 3 и натуральных* m, h, *удовлетворяющих условиям* $k<m\leqslant k+1$, $3m<h\leqslant n$, *справедливо неравенство*

$$\left|\sum_{\nu=n-h}^{n}\varphi(\nu)s_\nu\right|\leqslant C_p h^{-k+2m+1}(n)V_p(n). \tag{14}$$

Ввиду формулы (13) $\sum\limits_{\nu=0}^{n}s_\nu^q=s_n^{q+1}$. Используя это и свойства последовательности $\varphi(\nu)$, левую часть неравенства (14) с помощью m-кратного суммирования по частям приведем к виду

$$\left|\sum_{\nu=n-h}^{n-m}\Delta^m\varphi(\nu)s_\nu^m\right|. \tag{15}$$

По формуле (13) $s_\nu^m=\sum\limits_{\mu=0}^{\nu}A_{\nu-\mu}^{m-p-1}s_\mu^p$. После подстановки этого выражения в формулу (15) и перемены порядка суммирований получим

$$\left|\sum_{\mu=0}^{n-m}s_\mu^p\Omega_{n,\mu}\right|\leqslant V_p(n)\sum_{\mu=0}^{n-m}|\Omega_{n,\mu}|, \tag{16}$$

где

$$\Omega_{n,\mu}=\sum_{\nu=\max(n-h,\mu)}^{n-m}A_{\nu-\mu}^{m-p-1}\Delta^m\varphi(\nu).$$

При $n-h\leqslant\mu\leqslant n$, используя свойства последовательности $\varphi(\nu)$, получим

$$|\Omega_{n,\mu}|\leqslant C_m h^m\sum_{\nu=\mu}^{n-m}|A_{\nu-\mu}^{m-p-1}|\leqslant C_p h^{2m-k}, \tag{17}$$

и это же неравенство сохраняется при $\max(0,\ n-2h)\leqslant\mu\leqslant n-h$. Если $n-2h\leqslant 0$, то, подставив оценку (17) в неравенство (16), получим правую часть неравенства (14). Если же $n-2h>0$, то при $0\leqslant\mu\leqslant n-2h$ неравенство (17) можно улучшить. С помощью m-кратного суммирования по частям и свойств $\varphi(\nu)$ найдем

$$|\Omega_{n,\mu}|=\left|\sum_{\nu=n-h}^{n}\varphi(\nu)\,A_{\nu-\mu}^{-p-1}\right|\leqslant h^{2m}\sum_{\nu=n-h}^{n}|A_{\nu-\mu}^{-p-1}|\leqslant C_p h^{2m+1}(n-\mu)^{-k-1}.$$

Используя это, (17), оценку выражения (16) продолжим следующим образом:

$$\leqslant C_pV_p(n)\left(\sum_{\mu=0}^{n-2h}h^{2m+1}(n-\mu)^{-k-1}+\sum_{\mu=n-2h+1}^{n}h^{2m-k}\right)\leqslant C_pV_p(n)\,h^{2m+1-k},$$

и неравенство (14) полностью доказано.

Теперь легко завершить доказательство теоремы 3. Так как $\varphi(\nu)$ сохраняет знак при $n-h\leqslant\nu\leqslant n$, то из условий теоремы 3 получим

$$\left|\sum_{\nu=n-h}^{n}\varphi(\nu)s_\nu\right|\geqslant \mathrm{Re}\left\{\sum_{\nu=n-h}^{n}\varphi(\nu)\exp(i\theta(n))\,s_\nu\right\}\geqslant$$

$$\geqslant\alpha|s_n|\sum_{\nu=n-h}^{n}|\varphi(\nu)|\geqslant\alpha C_m|s_n|\,h^{2m+1},\qquad C_m>0.$$

Это вместе с неравенством (14) доказывает теорему 3.

Если же выполнено предположение второй части теоремы 3, то рассуждения проводятся аналогично, исходя из суммы $\sum_{\nu=n}^{n+h}\varphi(\nu)s_\nu$, где $\varphi(\nu)=$ $=(\nu-n)(\nu-n-1)\ldots(\nu-n-m+1)(n+h-m+1-\nu)\ldots(n+h-\nu)$. Теорема 4 теперь получается точно так же, как ранее была доказана теорема 2.

В некоторых случаях применения теоремы 4 последовательности $V_p(n)$, Φ_n известны. Если s_ν, например, возрастает, то условие г) теоремы 4 выполнено при любом $h(n)$, поэтому обычно полагаем

$$T(n)=\min_{3(k+1)<h<n}\{\max_{|\nu-n|\leqslant h}|\Phi_\nu-\Phi_n|+h^{-k}V_p(n+h)\},$$

а за $h(n)$ принимаем то значение h, при котором в написанном выше выражении достигается минимум.

1. *Субханкулов М. А.* Тауберовы теоремы с остатком.— М. : Наука, 1976.— 399 с.
2. *Candrasekharan K. and Minakshisundaran S.* Typical means.— Bombay, 1952.— 140 p.
3. *Rajagopal C. T.* On tauberian theorems for the Riemann Liouville integral.— Publ. Inst. Math., 1954, **6**, p. 27—46.
4. *Таммерайд И.* Тауберовы теоремы с остаточным членом для методов суммирования Чезаро и Гельдера.— Уч. зап. Тартус. ун-та, 1971, 277, с. 161—170.
5. *Таммерайд И.* О теоремах тауберова типа с остаточным членом.— Тр. Таллин. политехн. ин-та. Сер. А, 1971, **312**, с. 27—38.
6. *Харди Г.* Расходящиеся ряды.— М. : Изд-во иностр. лит., 1951.— 504 с.

Киев. пед. ин-т

Поступила в редакцию
22.11.82