УДК 519.41—47

*Л. А. Курдаченко, В. В. Пылаев*

# Группы с нециклическими подгруппами конечного индекса

Одним из основных направлений теории групп является изучение строения групп с теми или иными ограничениями, налагаемыми на некоторую выделенную систему подгрупп. В [1] на систему всех неединичных подгрупп группы налагалось условие конечности их индексов. Оказалось, что бесконечные группы такого рода циклические. В [2—4] изучались группы, в которых конечный индекс имеют все неединичные нормальные или субнормальные подгруппы. В настоящей работе рассматриваются группы, в которых конечный индекс имеет каждая нециклическая подгруппа. Очевидно, к этому классу групп принадлежат группы, в которых всякая собственная подгруппа циклическая. В общем случае строение таких групп не выяснено. Поэтому в настоящей работе строение групп с нециклическими подгруппами конечного индекса выясняется при дополнительном условии их локальной почти разрешимости. Для краткости в дальнейшем через $\mathfrak{X}$ будем обозначать класс локально почти разрешимых групп, в каждой из которых всякая нециклическая подгруппа имеет конечный индекс.

Лемма 1. *Пусть $G \in \mathfrak{X}$. Если группа $G$ не имеет конечной системы порождающих, то она является группой одного из следующих типов*: 1) *$G$ — квазициклической группой;* 2) *$G = K \times R$, $K$ — квазициклическая $q$-группа, $R$ — циклическая группа и $(q, |R|) = 1$;* 3) *$G$ — аддитивной группой $p$-ичных дробей, $p$ — простое число.*

Доказательство. Так как группа $G$ не является конечно порожденной, то $G$ — нециклическая группа. Пусть $g_1 \in G$. Так как $(g_1) \neq G$, то $G$ содержит элемент $g_2 \in (g_1)$. Подгруппа гр $(g_1, g_2)$ будет циклической, ибо в противном случае она имела бы конечный индекс в $G$. Однако это означало бы, что $G$ имеет конечную систему порождающих, а это противоречит условию леммы. Рассуждая таким образом, построим бесконечный набор $\{a_n | n \in N\}$ таких элементов группы $G$, что $a_{n+1} \notin$ гр $(a_k | 1 \leqslant k \leqslant n)$ и гр $(a_1, \ldots, a_n)$ — циклическая для любого $n \in N$. Пусть $A =$ гр $(a_n | n \in N)$. Подгруппа $A$ уже не будет циклической, поэтому индекс $|G : A|$ конечен. Не ограничивая общности, можно считать, что $A$ нормальна в $G$. Предположим, что подгруппа $A$ периодическая. Так как $A$ локально циклическая и $A \in \mathfrak{X}$, то $A = K \times C$, где $K$ — квазициклическая $q$-группа, $C$ — конечная циклическая группа, причем $(q, |C|) = 1$ (в частности, подгруппа $C$ может быть единичной). Из конечности индекса $|C : A|$ следует, что $G$ — периодическая почти абелева группа. Поэтому $G$ можно представить в виде $G = AD$, где $D$ — конечная подгруппа. Из соотношений $A \lhd G$ и $(q, |C|) = 1$ следует, что нормальной в $G$ будет и подгруппа $C$. Подгруппа $CD$ конечна. Из условий леммы получаем, что подгруппа $CD$ циклическая (в частности, если $CD = (1)$, то $C = K$ — группа типа 1). Пусть $CD = Q \times R$, где $Q$ — силовская $q$-подгруппа $CD$, $R$— ее силовская $q'$-подгруппа. Если предположить, что $Q \nleqslant K$, то подгруппа $QK_1$, где $K_1$ — нижний слой $K$, не является циклической, а потому должна иметь в $G$ конечный индекс. Но это невозможно. Итак $Q \leqslant K$. Из равенства $G = K\,CD$ следует равенство $G = K \times R$. Пусть $K_n$ — слой элементов подгруппы $K$ порядка $q^n$, $n \in N$. Подгруппа $K_n \times Q$ конечна и, следовательно, циклическая. В частности, $R \leqslant C_G(K_n)$. Так как это соотношение справедливо при любом $n \in N$, то $R \leqslant C_G(K)$, т. е. $G = K \times R$ — группа типа 2.

Осталось рассмотреть случай, когда $A$ — подгруппа без кручения. Так как $A$ — нециклическая локально циклическая группа и $A \in \mathfrak{X}$, то нетрудно показать, что $A$ — аддитивная группа $p$-ичных дробей. Пусть $a \in \in A$. Из конечности индекса $|G:A|$ следует, что элемент $a$ имеет в $G$ конечное множество сопряженных. Из выбора $A$ следует, что нормальная подгруппа $(a)^G$, порожденная элементом $a$, циклическая. Но тогда $(a)$, будучи характеристической подгруппой $(a)^G$, будет нормальной в $G$. Таким образом, всякая подгруппа из $A$ нормальна в группе $G$. Снова обозначим через $D$ подгруппу, порожденную представителями всех различных смежных классов группы $G$ по подгруппе $A$, взятыми по одному в каждом классе, и рассмотрим подгруппу $B = (a)\, D$. Подгруппа $B$ конечно порождена, и из условий леммы получаем, что $B$ — циклическая группа. Отсюда следует включение $D \leqslant C_G(A)$, и потому $G$ — абелева группа без кручения. Но тогда $G \cong A$, т. е. $G$ — группа типа 3. Лемма доказана.

В дальнейшем через $t(G)$ обозначим наибольшую периодическую нормальную подгруппу $G$.

Лемма 2. *Пусть $G \in \mathfrak{X}$ и $t(G) \neq (1)$. Если $G$ — бесконечная конечно порожденная группа, то $G$ является группой одного из следующих типов:*

*1) $G = (t) \leftthreetimes (a)$, $t$ — элемент конечного порядка, $a$ — элемент бесконечного порядка;*

*2) $G = ((t) \times (a)) \leftthreetimes (b)$, где гр $(t, b)$ — конечная циклическая группа, $a$ — элемент бесконечного порядка и $G/(t)$ — бесконечная диэдральная группа.*

Доказательство. Пусть $T = t(G)$. Так как $T \neq (1)$ и группа $G$ бесконечна, то $T$ — циклическая подгруппа. В самом деле, в противном случае индекс $|G:T|$ был бы конечным и из конечной порожденности $G$ следовала бы конечная порожденность $T$. В частности, группа $G$ оказалась бы конечной. В фактор-группе $H = G/T$ рассмотрим максимальную абелеву нормальную подгруппу $A$. Из неравенства $T \neq (1)$ вытекает, что $A$ — бесконечная циклическая подгруппа и индекс $|H:A|$ конечен. Пусть $C = C_H(A)$. Тогда $C$—конечная над центром группа, в частности все элементы конечного порядка из $C$ образуют подгруппу. Из выбора $T$ следует, что периодическая часть $C$ единична. Но тогда подгруппа $C$ будет абелевой (ведь всякая $FC$-группа без кручения абелева). Это означает, что $C = A$.

Пусть $T = (t)$, $a$ — элемент $G$, для которого $(aT) = A$. Легко видеть, что либо $G/T = (aT)$, либо $G/T$ — бесконечная группа диэдра, т. е. $G/T = (aT) \leftthreetimes (bT)$, где $(aT)^{bT} = (aT)^{-1}$. В первом случае $G = (t) \leftthreetimes (a)$ — группа типа 1. Во втором случае гр $(t, b)$, будучи конечной, является циклической, так что $G$ — группа типа 2.

Лемма 3. *Пусть $G \in \mathfrak{X}$, $t(G) = (1)$ и $A$ — максимальная абелева нормальная подгруппа $G$. Если группа $G$ бесконечна и конечно порождена, то $A$ — свободная абелева группа ранга, не превосходящего 2, $A = C_G(A)$, $G/A$ — $\{2, 3\}$-группа.*

Доказательство. Из соотношений $G \in \mathfrak{X}$ и $t(G) = 1$ следует, что либо $A$ — бесконечная циклическая подгруппа, либо $A$ — свободная абелева группа ранга 2. Во втором случае индекс $|G:A|$ конечен. Покажем, что этот индекс конечен и в первом случае. Пусть $C = C_G(A)$. Если предположить, что фактор-группа $C/A$ содержит элементы бесконечного порядка, то из соотношения $G \in \mathfrak{X}$ нетрудно получить, что в $G$ существует нормальная абелева подгруппа ранга 2, включающая в себя подгруппу $A$. Но это противоречит максимальности $A$. Следовательно, $C/A$ — периодическая группа. Предположим, что эта фактор-группа бесконечна. Тогда $C$ — нециклическая группа и индекс $|G:C|$ конечен. Подгруппа $C$ не может иметь конечного множества порождающих, а из конечности индекса $|G:C|$ следует, что и группа $G$ не может быть конечно порожденной, т. е. получаем противоречие с условием леммы. Итак, индекс $|C:A|$ конечен, т. е. $C$ — конечная над центром группа. Из равенства $t(G) = (1)$ следует, что и $t(C) = 1$. Поэтому $C$ — группа без кручения. В частности, $C$ абелева, и $C = A$. Итак, в первом случае $A$ — подгруппа индекса не более 2.

Во втором случае сразу индекс $|C:A|$ конечен. Отсюда снова получаем равенство $C = A$. Но тогда $G/A$ изоморфна конечной подгруппе $GL_2(Z)$. Поэтому $\Pi(G/A) \subset \{2, 3\}$ (см., например, лемму 5 из [5]).

Следующий результат, по-видимому, известен, и мы проведем его доказательство схематично.

Лемма 4. *Все элементы второго порядка группы $GL_2(Z)$ исчерпываются матрицами* $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}k & s\\ p & -k\end{pmatrix}$, *где* $k^2+ps=1$. *Все элементы третьего порядка* $GL_2(Z)$ *исчерпываются матрицами вида* $\begin{pmatrix}n & u\\ v & -1-n\end{pmatrix}$, *где* $n^2+n+uv=-1$. *Если* $A$ — элемент *4-го* порядка $GL_2(Z)$, *то* $A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. *Всякая силовская 3-подгруппа* $GL_2(Z)$ *имеет порядок 3.*

Доказательство. Непосредственным подсчетом можно убедиться в том, что все элементы 2-го и 3-го порядка группы $GL_2(Z)$ исчерпываются матрицами, выписанными в условиях леммы. Из равенства $k^2+ps=1$ следует, что определитель матрицы $\begin{pmatrix}k & s\\ p & -k\end{pmatrix}$ равен $-1$, поэтому в группе $GL_2(Z)$ из этой матрицы не извлекается корень 2-й степени.

Покажем, что корень 3-й степени не извлекается в группе $GL_2(Z)$ из матрицы $\begin{pmatrix}n & u\\ v & -1-n\end{pmatrix}$, где $n^2+n+uv=-1$. Погрузим группу $GL_2(Z)$ в группу $GL_2(C)$. В группе $GL_2(C)$ матрицу $\begin{pmatrix}n & u\\ v & -1-n\end{pmatrix}$ можно сопряжением привести к виду $\begin{pmatrix}p_1 & 0\\ 0 & p_2\end{pmatrix}$, где $p_1^3=p_2^3=1$, $p_1\neq 1$, $p_2\neq 1$. Положим $P=\begin{pmatrix}p_1 & 0\\ 0 & p_2\end{pmatrix}$ и пусть $M=\begin{pmatrix}m_1 & m_2\\ m_3 & m_4\end{pmatrix}$ — элемент $GL_2(C)$, для которого $M^3=P$, $|M|=1$. Для коэффициентов матрицы $M$ тогда получим систему уравнений

$$m_1^3+(m_1m_4-1)(2m_1+m_4)=p_1,\qquad M_2[(m_1+m_4)^2-1]=0,$$

$$M_3[(m_1+m_4)^2-1]=0,\qquad M_4^3+(m_1m_4-1)(2m_4+m_1)=p_2.$$

Если предположить, что $m_1+m_4=1$, то, подставив вместо $m_4$ в первое уравнение $1-m_1$, получим противоречие. Если предположить, что $m_1+m_4=-1$, то в этом случае $M^3=E$. Таким образом, $(m_1+m_4)^2-1\neq 0$. Следовательно, $m_2=m_3=0$ и $m_1^3=p_1$, $m_4^3=p_2$. Итак, матрица $M$ имеет вид $M=\begin{pmatrix}q_1 & 0\\ 0 & q_2\end{pmatrix}$, где $q_1, q_2$ — первообразные корни 9-й степени из 1.

Покажем, что матрица $M$ не может быть сопряжена ни с какой из матриц подгруппы $GL_2(Z)$. Предположим противное: пусть существует матрица $Y=\begin{pmatrix}y_1 & y_2\\ y_3 & y_4\end{pmatrix}\in GL_2(C)$, для которой $YMY^{-1}=K\in GL_2(Z)$. Пусть $K=\begin{pmatrix}k_1 & k_2\\ k_3 & k_4\end{pmatrix}$. Перепишем последнее равенство в виде $YM=KY$. Простыми вычислениями получим из него два равенства $q_1^2-(k_1+k_4)q_1=k_2k_3$, $q_2^2-(k_1+k_4)q_2=k_2k_3$.

Нетрудно показать, что число $q^2-tq$, где $q$ — первообразный корень 9-й степени из 1, $t\in Z$, не может быть целым. Полученное противоречие показывает, что никакая из матриц, сопряженных с $M$, не содержится в $GL_2(Z)$.

Предположим, что группа $GL_2(Z)$ содержит элемент $D$ порядка 9. Тогда матрица $F=D^3$ имеет порядок 3. В группе $GL_2(C)$ существует такая матрица $X_1$, что $X_1^{-1}FX_1=P$.

Все корни 3-й степени из $P$ исчерпываются, как показано выше, матрицами вида $M = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}$, где $q_1$, $q_2$ — первообразные корни 9-й степени из 1. Тогда $X_1^{-1} DX = M$. Но выше было показано, что матрица $X_1 M X_1^{-1}$ не может содержаться в подгруппе $GL_2(Z)$ для любой матрицы $X_1 \in GL_2(C)$. Полученное противоречие показывает, что группа $GL_2(C)$ не имеет элементов порядка 9. Используя этот факт, уже нетрудно показать, что всякая силовская 3-подгруппа $GL_2(Z)$ имеет порядок 3. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $G \in \mathfrak{X}$, $A$ — ее нормальная абелева подгруппа. Если $A$ — свободная абелева группа ранга 2, то $G$ не может индуцировать на $A$ автоморфизм, задаваемый в некоторой базе $A$ матрицей* $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Доказательство. Предположим противное, пусть $b$ — элемент группы $G$, индуцирующий на $A$ автоморфизм, задаваемый в базе $a_1$, $a_2$ матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Пусть $H = \text{гр}(A, B)$. Тогда $(a_1) \lhd H$, $(a_2) \lhd H$. Фактор-группа $H/(a_1)$ неабелева, а потому будет бесконечной диэдральной группой. В частности, $b^2 \in (a_1)$. По аналогичной причине $b^2 \in (a_2)$. Из равенства $(a_1) \cap (a_2) = 1$ следует, что $b$ — элемент порядка 2. Но подгруппа $(a_1) \leftthreetimes (b)$ неабелева, в частности, ее индекс должен быть конечным, что невозможно. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Лемма 6. *Пусть $G \in \mathfrak{X}$, $A$ — ее нормальная абелева подгруппа. Если $A$ — свободная абелева группа ранга 2, $A = C_G(A)$ и $|G/A| = 2$, то $G = \text{гр}(g_1, g_2 \mid g_1^{-1} g_2 g_1 = g_1^{2p} g_2^{-1}, P \in Z)$.*

Доказательство. Пусть $G = A(b)$, $b^2 \in A$. Ввиду лемм 4 и 5 элемент $b$ индуцирует на $A$ автоморфизм, имеющий относительно некоторого базиса $a_1$, $a_2$ матрицу $\begin{pmatrix} k & s \\ p & -k \end{pmatrix}$, где $k^2 + ps = 1$. Найдем элемент, неподвижный относительно этого автоморфизма. Пусть это $a_1^i a_2^j$. Тогда получим $b^{-1}(a_1^i a_2^j) b = a_1^{ki+pj} a_2^{si-kj} = a_1^i a_2^j$. Отсюда $(k-1)i + pj = 0$, $si - (k+1)j = 0$.

Числа $i = k+1$, $j = s$ являются, очевидно, решением этой системы. Поэтому $C_A(b) \neq 1$. Этот централизатор является сервантной подгруппой $A$, а так как $G$ неабелева, то $C_A(b) = (d_1)$. Пусть $d_2$ — элемент $A$, для которого $A = (d_1) \times (d_2)$. Тогда в базисе $d_1$, $d_2$ матрица автоморфизма, индуцированного элементом $b$, имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & -1 \end{pmatrix}$. Рассмотрим подгруппу $\text{гр}(d_1, b)$ Она абелева и имеет в $G$ бесконечный индекс. Поэтому $\text{гр}(d_1, b) = (g_1)$. Положим $d_2 = g_2$. Тогда $G = \text{гр}(g_1, g_2)$ и $g_1^{-1} g_2 g_1 = g_1^{2p} g_2^{-1}$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть $G \in \mathfrak{X}$, $A$ — ее нормальная абелева подгруппа. Если $A$ — свободная абелева группа ранга 2, $A = C_G(A)$ и $|G/A| = 3$, то $G = \text{гр}(b, g_1, g_2 \mid b^3 = 1,\ g_1^b = g_1^n g_2^u,\ g_2^b = g_1^v g_2^{-1-u},\ [g_1, g_2] = 1,\ n^2 + n + uv = -1)$.*

Доказательство. Пусть $G = \text{гр}(b, A)$, $b^3 \in A$. Тогда элемент $b$ индуцирует на $A$ автоморфизм, который в некотором базисе $g_1, g_2$ имеет матрицу вида $\begin{pmatrix} n & u \\ v & -1-n \end{pmatrix}$, где $n^2 + n + uv = -1$ (см. лемму 4). Найдем $C_A(b)$. Пусть $g_1^k g_2^l \in C_A(b)$. Имеем $(g_1^k g_2^l)^b = g_1^{nk+lv} g_2^{uk-l-ln} = g_1^k g_2^l$. Отсюда $(n+1)k + vl = 0$, $uk - (2+n)l = 0$. Определитель этой системы равен $2n+1$. В частности, при любом целом $n$ этот определитель отличен от нуля. Поэтому $k = l = 0$, т. е. $C_A(b) = 1$. Это означает, что $b^3 = 1$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть $G \in \mathfrak{X}$, $A$ — ее нормальная абелева подгруппа. Если $A$ — свободная абелева группа ранга 2, $A = C_G(A)$ и $|G/A| = 6$, то $G = \text{гр}(b, g_1, g_2 \mid b^3 = 1,\ g_1^{-1} g_2 g_1 = g_1^{2p} g_2^{-1},\ g_1^{-1} b g_1 = b^2 g_1^{2l} g_2^{\frac{n(l-1)}{n}},\ b^{-1} g_2 b = g_1^{2v} g_2^{-1-n})$, причем $n^2 + n + uv = -1$, $2n + up + 1 = 0$.*

Доказательство. Пусть $G/A=(bA)\times(cA)$, где $b^3A=A$, $c^2A=A$. Пусть, далее, $G_1=\text{гр}(c, A)$. Из леммы 6 следует, что $G_1=\text{гр}(g_1, g_2 \mid g_2^{g_1}=g_1^{2p}g_2^{-1},\ p\in Z)$, в частности элементы $g_1^2, g_2$ составят базис подгруппы $A$. В этом базисе автоморфизм, индуцированный на $A$ элементом $c$, имеет матрицу $\begin{pmatrix}1 & 0\\ p & -1\end{pmatrix}$. Ввиду леммы 4 автоморфизму, индуцированному на $A$ элементом $b$, будет соответствовать в этом базисе матрица $\begin{pmatrix}n & u\\ v & -1-n\end{pmatrix}$, где $n^2+n+uv=-1$. Так как в $G/A$ имеет место одно из следующих двух равенств $(cA)(bA)=(bA)(cA)$ или $(cA)(bA)=(bA)^2(cA)$, то, переходя к матрицам, получим равенства

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ p & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n & u\\ v & -1-n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n & u\\ v & -1-n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ p & -1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ p & -1\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}n & u\\ v & -1-n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-n & -u\\ -v & n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ p & -1\end{pmatrix}.$$

Из первого матричного равенства получаем $u=0$. Из равенства $n^2+n+uv=-1$ следует, что число $n$ не может быть целым. Следовательно, фактор-группа $G/A$ неабелева. Второе матричное равенство приводит к равенству $2n+up+1=0$. Подводя итог, получим, учитывая лемму 7, что $G=\text{гр}(b, g_1, g_2)$, где $b^3=1$, $g_2^{g_1}=g_1^{2p}g_2^{-1}$, $(g_1^2)^b=g_1^{2n}g_2^u$, $g_2^b=g_1^{2v}g_2^{-1-n}$, $(g_1A)(bA)(g_1A)=(b^2A)$. Имеем, $g_1^{-1}bg_1=b^{-1}g_1^{2l}g_2^r$. Далее, $g_1^{-2}bg_1^2=(g_1^{-1}bg_1)^{-1}g_1^{2l}(g_1^{-1}g_2g_1)^r=g_1^{-2l}g_2^{-r}bg_1^{2l+2pr}g_2^{-r}$. Рассмотрим элемент $b^{-1}g_1^{-2l}\times g_2^{-r}b=(g_1^{2n}g_2^u)^{-l}(g_1^{2v}g_2^{-1-n})^{-r}=g_1^{-2nl-2vr}g_2^{-ul+r+rn}$. Имеем $g_1^{-2l}g_2^{-r}b=bg_1^{-2nl-2vr}g_2^{r+rn-nl}$. Тогда

$$g_1^{-2}bg_1^2=bg_1^{-2nl-2vr}g_2^{r+rn-nl}g_1^{2l+2pr}g_2^{-r}=bg_1^{2l+2pr-2vr-2nl}g_2^{rn-nl}\ \text{и}\ [b, g_1^2]=$$

$$=g_1^{2l+2pr-2vr-2nl}g_2^{rn-nl}.$$

с другой стороны, $b^{-1}g_1^{-2}b=g_1^{-2n}g_2^{-u}$ и $[b, g_1^2]=g_1^{2-2n}g_2^{-u}$. Отсюда получаем систему

$$l(1-n)+r(p-v)=1-n,\qquad -lu+rn=-u.$$

Используя равенства $n^2+n+uv+1=0$ и $2n+up+1=0$, получаем, что определитель матрицы этой системы равен 0. Но тогда $r=\dfrac{u(l-1)}{n}$. Лемма доказана.

Теорема. *Пусть $G$ — бесконечная локально почти разрешимая группа. Каждая нециклическая подгруппа $G$ тогда и только тогда имеет в $G$ конечный индекс, когда $G$ — группа одного из следующих типов:*

1) *$G$ — бесконечная циклическая группа;*

2) *$G$ — прямое произведение двух циклических групп, по меньшей мере одна из которых бесконечна;*

3) *$G$ — квазициклическая группа;*

4) *$G=K\times Q$, $K$ — квазициклическая $p$—группа, $Q$ — конечная циклическая группа, причем $(p, |Q|)=1$;*

5) *$G$ — аддитивная группа $p$-ичных дробей, $p$ — простое число;*

6) *$G=(t)\times(a)$, $t$ — элемент конечного порядка, $a$ — элемент бесконечного порядка;*

7) *$G=((t)\times(a))\times(b)$, гр $(t, b)$ — конечная циклическая группа, $a$ — элемент бесконечного порядка, $G/(t)$ — бесконечная диэдральная группа (в частности, если $t=1$, то $G$ — бесконечная диэдральная группа;*

8) *$G$ — полупрямое произведение двух бесконечных циклических групп;*

9) *$G=A\times(b)$, $A=C_G(A)$ — свободная абелева группа ранга 2, $b^3=1$, элемент $b$ действует на $A$ неприводимо;*

10) $G = H \cdot (b)$, *$H$-группа типа 8)*, $b^3 = 1$, *$G/H_G$ — неабелева группа порядка 6)*, $H_G = C_G(H_G)$ *— свободная абелева группа ранга 2*, $\text{гр}(b, H_G)$ *— группа типа 9) (здесь $H_G \bigcap\limits_{g \in G} H^g$).*

Примечание. В условиях теоремы даны структурные характеристики групп. Определяющие соотношения приведены выше в леммах 6—8.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что любая собственная подгруппа $G$ циклическая. Тогда, очевидно, $G$ будет конечно порожденной группой и, в частности, $G$ — почти разрешимая группа либо $G$ — квазициклическая группа. Если предположить, что $G$ — неразрешимая группа, то $G$ будет включать в себя нормальную циклическую подгруппу $A$ конечного индекса. Из выбора $G$ следует также, что $C_G(A) = G$, в частности все элементы конечного порядка группы $G$ составят конечную подгруппу $t(G)$. Из того факта, что $G$ неразрешима, следует неразрешимость подгруппы $t(G)$, но это противоречит выбору $G$. Итак, группа $G$ разрешима. Пусть $G$ неабелева (в частности, $G$ конечно порождена). Так как произведение двух нормальных абелевых подгрупп — нильпотентная подгруппа, то либо группа $G$ нильпотентна, либо $|G : [G, G]|$ — простое число. Во втором случае $G$ — группа без кручения и по теореме из [1] группа $G$ будет циклической. В первом случае $t(G) = (1)$ и снова нетрудно получить, что $G$ — бесконечная циклическая группа. Итак, в случае, если всякая собственная подгруппа $G$ циклическая, $G$ — группа типа 1) или 3).

Теперь можно предполагать, что группа $G$ включает в себя нециклические подгруппы. Если $G$ — конечно порожденная абелева группа, то $G$ — группа типа 2). Если $G$ не имеет конечной системы порождающих, то из леммы 1 следует, что $G$ — группа одного из типов 3)—5).

Если $G$ — неабелева конечно порожденная группа и $t(G) \neq (1)$, то из леммы 2 следует, что $G$ — группа типов 6)—7).

Если же $t(G) = (1)$ и $A$ — максимальная абелева подгруппа, то ранг $A$ не больше 2. Если $A$ — бесконечная циклическая подгруппа, то из равенства $A = C_G(A)$ (лемма 3) и того факта, что $G$ — неабелева группа, следует, что $G$ — бесконечная диэдральная группа, т. е. $G$ — группа типа 7). Пусть теперь $A$ — свободная абелева группа ранга 2. Из лемм 3—5 вытекает, что $|G/A| \leqslant 6$. Если $|G/A| = 2$, то из лемм 5 и 6 следует, что $G$ — группа типа 8). Если $|G/A| = 3$, то из леммы 7 следует, что $G$ — группа типа 9. И наконец, если $|G/A| = 6$, то ввиду леммы 8 $G$ — группа типа 10).

Достаточность условий теоремы почти очевидна. Теорема доказана.


1. *Федоров Ю. Г.* О бесконечных группах, все нетривиальные подгруппы которых имеют конечный индекс.— Успехи мат. наук, 1951, **6**, № 1, 187—189.
2. *McCarthy D.* Infinite groups whose proper quotient groups are finite. I.— Comm. Pure Appl. Math., 1968, **21**, p. 545—562.
3. *McCarthy D.* Infinite groups whose proper quotient groups are finite. II.—Comm. Pure Appl. Math., 1970, **23**, p. 767—789.
4. *Wilson J. S.* Groups with every proper quotient finite.— Proc. Cambridge Phil. Soc., 1971, **69**, p. 373—392.
5. *Чарин В. С.* О группах, обладающих разрешимыми возрастающими инвариантными рядами.— Матем. сб., 1957, **41**, № 3, с. 297—316.



Днепропетровский государственный университет
Киевский педагогический институт



Поступила в редакцию
02.02.82