УДК 519.21

В. А. Грищенко

Поток потерянных требований в многолинейных системах обслуживания с редкими потерями

В настоящей работе рассматривается система массового обслуживания (смо) вида $GI\,|GI|\,m\,|\,0$, заданная множеством независимых в совокупности случайных величин r_i, η_i, $i \geqslant 1$, распределения которых не зависят от индекса i, и являющихся интервалом между поступлениями i-го и $i+1$-го требований, а также длительностью обслуживания i-го требования соответственно. Будем предполагать, что распределения случайных величин τ_i, η_i, а также число обслуживающих устройств m так зависят от параметра серии, что

$$\varepsilon = mP\{\eta_1 \geqslant \tau_1 + \ldots + \tau_m\} + \sum\nolimits_{k=m}^{\infty} P\{\eta_1 \geqslant \tau_1 + \ldots \tau_k\} \to 0. \qquad (1)$$

В дальнейшем везде, где не оговорено противное, предельные переходы будут производиться по этому параметру серии.

Пусть α_k — случайная величина, равная времени функционирования смо до k-й потери требования, $k \geqslant 1$. Целью настоящей работы является описание предельного при $\varepsilon \to 0$ поведения соответствующим образом нормированного семейства α_k, $k \geqslant 1$.

Приведем некоторые легко обозримые примеры, для которых имеет место (1).

1. Предположим, существуют такие константы C_1, C_2, что для всех значений параметра серии $P\{\eta_1 > C_1\} = P\{\tau_1 < C_2\} = 0$. Тогда (I) будет следовать из $P\{\eta_1 \geqslant \tau_1 + \ldots + \tau_m\} \to 0$ (заметим, что в данном примере это условие необходимо для обеспечения малой вероятности потерь отдельных требований).

2. Пусть μ — случайная величина, равная числу поступивших требований за время обслуживания первого требования и, $M\mu \to 0$. Такие системы называют смо с быстрым обслуживанием [1].

3. Предположим $m \to \infty$, а функции $P\{\tau_1 < x\}$, $P\{\eta_1 < x\}$ остаются при этом неизменными. Тогда из $M\mu < \infty$ следует (1).

В основу исследования положено представление $\alpha_k = \sum\nolimits_{i=1}^{\beta_k-1} \tau_i$, где $\beta_k = \min\left\{j: \sum\nolimits_{i=1}^{j} \chi_i = k\right\}$, $\chi_1 = 0$, $\chi_i = \chi\left\{\sum\nolimits_{j=1}^{i-1} (1-\chi_j)\,\chi\left\{\eta_j \geqslant \sum\nolimits_{k=j}^{i-1} \tau^k\right\} \geqslant m\right\}$, $\chi\{\cdot\}$ — индикатор события $\cdot$; т. е. χ_k — индикатор того, что k-е требование поступило на занятую систему и оказалось потерянным.

Упомянутое выше нормирование будем производить с помощью множителя γ, являющегося функцией параметра серии и определяемого условием

$$p^{-1}(M \exp\{i\gamma\tau_1 s\} - 1) \to a(s), \qquad (2)$$

где $a(s)$ — непрерывная функция, $p = P\{\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_{m-1}, A_m\} > 0$, $A_i = \bigcup\nolimits_{r=m-1}^{\infty} \left\{\chi\{\eta_i \geqslant \sum\nolimits_{j=i}^{i+r} \tau_j\} \sum\nolimits_{l=i}^{i+r} \chi\left\{\eta_l \geqslant \sum\nolimits_{j=l}^{i+r} \tau_j\right\} \geqslant m\right\}$,

$\bar{A}$ — дополнение к событию A. Можно придать следующий физический смысл событию A_i: за время обслуживания i-го требования, при условии его поступления в пустую систему, произойдет потеря требования.

Легко видеть, что последовательность α_k однозначно определяется процессами

$$\tau(t) = \gamma \sum\nolimits_{j=1}^{[t/p]} \tau_j, \; \chi(t) = \sum\nolimits_{j=1}^{[t/p]} \chi_j; \quad t \geqslant 0,$$

где $[\cdot]$ — целая часть числа $\cdot$. Оказывается, при $\varepsilon \to 0$ они приобретают весьма простую структуру.

Теорема 1. *Если выполнены* (1), (2) *и*

$$P\left\{\sum\nolimits_{1\leqslant k\leqslant \sqrt{\varepsilon p^{-1}}}\chi_k = r / \sum\nolimits_{1\leqslant k\leqslant \sqrt{\varepsilon p^{-1}}}\chi_k > 0\right\} \to b_r, \tag{3}$$

где $\sum\nolimits_{r=1}^{\infty} b_r = 1$, *то распределения процессов* $\tau(t)$, $\chi(t)$ *сходятся к распределениям независимых между собой процессов с независимыми приращениями.*

Доказательство. Пусть $T>0$ — фиксированное число. Покажем, что для любой последовательности разбиений промежутка $[0, T]$ $0 \leqslant t_0 < < t_1 < \ldots < t_n = T$ таких, что $\lim \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(t_k - t_{k-1}) = 0$, и для действительных u_k, v_k, $k \geqslant 1$, выполняется

$$|M\exp\left\{i \sum\nolimits_{k=1}^{n}(u_k\tau(t_k) + v_k\chi(t_k)\right\} - M\exp\left\{i\sum\nolimits_{k=1}^{n}u_k\tau(t_k)\right\} \times$$
$$\times M\exp\left\{i\sum\nolimits_{k=1}^{n}v_k\chi(t_k)\right\}\Big| \to 0, \tag{4}$$

а процессы $\tau(t)$, $x(t)$ сходятся к некоторым процессам с независимыми приращениями.

Предположим, что числа t_k в зависимости от параметра серии имеют вид, удовлетворяющий соотношению $[s_k/p] = k[\sqrt{\varepsilon}/p]$. Введем обозначения $N = [\sqrt{\varepsilon}/p]$, $l_k = (k-1)N$, $\tau^k = \gamma\sum\nolimits_{j=l_k+1}^{l_{k+1}}\tau_j$, $\chi^k = \sum\nolimits_{j=l_k+1}^{l_{k+1}}\chi_j$ и семейство случайных величин $\bar\chi^k = \sum\nolimits_{j=l_k+1}^{l_{k+1}}\bar\chi_j$, $k \geqslant 1$, где $\bar\chi_{l_k+1} = 0$, $\bar\chi_j = \chi \times \times \left\{\sum\nolimits_{i=l_k+1}^{j-1}(1-\bar\chi_i)\chi\left\{\eta_i \geqslant \sum\nolimits_{r=i}^{j-1}\tau_r\right\} \geqslant m\right\}$, $l_k + 1 < j \leqslant l_{k+1}$. Дальнейшее доказательство проведем в несколько этапов.

1°. Покажем, что если $\bar\tau^k = \chi\{\bar\chi^k = 0\}\tau^k$, то

$$\sup_{\substack{|u_k|<C\\|v_k|<C}}\left|M\exp\left\{i\sum\nolimits_{k=1}^{n}(u_k\tau^k + v_k\bar\chi^k)\right. - M\exp\left\{i\sum\nolimits_{k=1}^{n}(u_k\bar\tau^k + v_k\bar\chi^k)\right\}\right| \to 0. \tag{5}$$

Для этого оценим $\varphi_k(u, v) = M\left(e^{i(u\tau^k + v\bar\chi^k)} - e^{(u\bar\tau^k + v\bar\chi^k)}\right)$. Воспользовавшись тождеством $\exp\{iu\tau^k\} - \exp\{iu\bar\tau^k\} = \chi\{\bar\chi^k \neq 0\}(\exp\{iu\tau^k\} - 1)$ и неравенством $|\exp\{i\alpha\} - 1| \leqslant |\alpha|$, получим для произвольного $\delta > 0$ $\sup\limits_{\substack{|u|<C\\|v|<C}}|\varphi_k(u, v)| \leqslant$
$\leqslant 2P\{\tau^k > \delta,\ \bar\chi^k \neq 0\} + \delta CP\{\bar\chi^k \neq 0\}$.

Нетрудно убедиться в справедливости неравенства

$$P\left\{\sum\nolimits_{k=l}^{l+j}\tau_k > s,\ \sum\nolimits_{k=l}^{l+j}\chi_k > 0\right\} \leqslant P\left\{\sum\nolimits_{k=l}^{l+j}\tau_k > s\right\}P\left\{\sum\nolimits_{k=l}^{l+j}\chi_k > 0\right\}, \tag{6}$$

выполняемом для любых $l = 1, 2, \ldots,$ $j = 0, 1, \ldots,$ $s > 0$. Для этого его левую часть запишем в виде

$$\int\ldots\int\chi\left\{\sum\nolimits_{k=l}^{l+j}x_k > s\right\}\chi\left\{\sum\nolimits_{k=l}^{l+j}\chi_k(x_l, \ldots, x_{l+j}) > 0\right\}\times$$
$$\times dP\{\tau_l < x_l\}\cdot\ldots\cdot dP\{\tau_{l+j} < x_{l+j}\}.$$

Поскольку под интегралами стоит произведение двух функций, одна из которых не убывает, а вторая не возрастает по аргументам $x_l, \ldots, x_{l+j}$, то (6) вытекает из следующего варианта неравенства Чебышева [2] с. 202: если $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g(x_1, \ldots, x_n)$ — неотрицательные функции, одна из которых не убывает по каждому из аргументов, а вторая — не возрастает, и $F(x)$ — функция распределения, то

$$\int\ldots\int f(x_1, \ldots, x_n)g(x_1, \ldots, x_n)\,dF(x_1)\ldots dF(x_n) \leqslant \int\ldots\int f(x_1, \ldots, x_n)\times$$
$$\times dF(x_1)\ldots dF(x_n)\int\ldots\int g(x_1, \ldots, x_n)\,dF(x_1)\ldots dF(x_n).$$

Следсвательно,

$$\sup_{\substack{|u|<C\\|v|<C}} |\varphi_k(u, v)| \leqslant P\{\bar{\chi}^k \neq 0\}(2P\{\tau^k > \delta\} + \delta C). \tag{7}$$

Из неравенства

$$\left|\prod_{k=1}^{n} a_k - \prod_{k=1}^{n} b_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k|, \tag{8}$$

справедливого для $|a_k| \leqslant 1$, $|b_k| \leqslant 1$, следует, что для доказательства (5) достаточно показать, что

$$\sup_{\substack{|u_k|<C\\|v_k|<C}} \sum_{k=1}^{n} |\varphi_k(u_k, v_k)| \to 0.$$

Ввиду же (7) для этого достаточно установить, что $P\{\tau^k > \delta\} \to 0$. Имеем

$$|M\exp\{iu\tau^k\} - 1| = |M\exp\{iuN\gamma\tau_1\} - 1| = |M\exp\{iu\gamma\tau_1\} - 1| \times$$
$$\times\left|\sum_{j=1}^{N} M\exp\{iu(j-1)\gamma\tau_1\}\right| \leqslant Np|a_\varepsilon(u)| \leqslant \sqrt{\varepsilon}|a_\varepsilon(u)| \to 0.$$

Следовательно, $P\{\tau^k > \delta\} \to 0$ для каждого $\delta > 0$.

2°. Покажем, что

$$\sup_{\substack{|u_k|<C\\|v_k|<C}} \left| M\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}(u_k\tau^k + v\chi^k)\right\} - M\exp\left\{i\left|\sum_{k=1}^{n}(u_k\tau^k + v_k\bar{\chi}^k)\right\}\right|\right| \to 0. \tag{9}$$

Для этого достаточно указать такое событие B, что

$$B \subseteq \{\chi^k = \bar{\chi}^k,\ 1 \leqslant k \leqslant n\}, \quad P\{B\} \to 1. \tag{10}$$

Положим $B_k = \{\eta_j < \tau_j + \ldots + \tau_{l_{k-1}},\ l_{k-1} \leqslant j \leqslant l_k - m;\ \eta_i < \tau_i + \ldots + \tau_{i+m-1},\ l_k - m + 1 \leqslant i \leqslant l_k - 1\}$. Поскольку $P\{B_k\} \geqslant 1 - \varepsilon$, то $P\{B\} \geqslant 1 - n\varepsilon \geqslant 1 - \sqrt{\varepsilon T} \to 1$. А так как из $\bigcap_{j=1}^{k} B_j \subseteq \{\chi^j = \bar{\chi}^j,\ 1 \leqslant j \leqslant k\}$ следует $\bigcap_{j=1}^{k+1} B_j \subseteq \{\chi^j = \bar{\chi}^j,\ 1 \leqslant j \leqslant k+1\}$, то (10) проверяется индукцией по k.

3°. Докажем соотношение

$$\sup_{\substack{|u_k|<C\\|v_k|<C}} \Big| M\exp\left\{i\textstyle\sum_{k=1}^{n}(u_k\bar{\tau}^k + v_k\bar{\chi}^k)\right\} -$$
$$- \textstyle\prod_{k=1}^{n} M\exp\{iu_k\bar{\tau}^k\}\prod_{k=1}^{n} M\exp\{iv_k\bar{\chi}^{(k)}\}\Big| \to 0. \tag{11}$$

Поскольку случайные величины $u_k\bar{\tau}^k + v_k\bar{\chi}^k$ по построению независимы в совокупности, то ввиду (8) для доказательства (11) достаточно показать справедливость соотношения

$$\sup_{\substack{|u_k|<C\\|v_k|<C}} \textstyle\sum_{k=1}^{n} |M\exp\{i(u_k\bar{\tau}^k + v_k\bar{\chi}^k)\} - M\exp\{iu_k\bar{\tau}^k\}M\exp\{iv_k\bar{\chi}\}| \to 0. \tag{12}$$

Из величин $\bar{\tau}^k$, $\bar{\chi}^k$ хотя бы одна равна нулю, значит, $\exp\{i(u_k\bar{\tau}^k + v_k\bar{\chi}^k)\} = \exp\{iu_k\bar{\tau}^k\} + \exp\{iv_k\chi^k\} - 1$ и, следовательно, $|M\exp\{i(u_k\bar{\tau}^k + v_k\chi^k)\} - M\exp\{iu_k\bar{\tau}^k\}M\exp\{iv_k\chi^k\}| = |M\exp\{iu_k\bar{\tau}^k\} - 1||M\exp\{iv_k\bar{\chi}^k\} - 1|$. Теперь соотношение (12) вытекает из равенства $\lim \sup_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\|u_k|<C}} |M\exp\{iu_k\tau^k\} - 1| = 0$, доказанного в п. 1°, и соотношения $\lim \sup_{|v_k|<C} \sum_{k=1}^{n} |M\exp\{iv_k\bar{\chi}^k\} - 1| < \infty$.

4°. Из (5), (9), (11) следует (4).

Для нахождения $\lim M \exp\{is\chi(t)\}$ заметим, что из тождества $p \equiv M\varphi_k$, где $\varphi_k \doteq \chi\{\bar{A}_k, \ldots, \bar{A}_{k+m-2}, A_{k+m-1}\}$ следует неравенство $(1-\varepsilon)\, lp - \frac{1}{2}(lp)^2 \leqslant P\left\{\sum_1^l \varphi_k > 0\right\} \leqslant lp$, исходя из которого построениями, аналогичными п. 2°, находим $\lim M\exp\{is\chi(t)\} = \exp\left\{t\left(\sum_{r=1}^{\infty} b_r e^{isr} - 1\right)\right\}$.

Осталось учесть, что непосредственным следствием из (2) есть $\lim M \exp\{is\tau(t)\} = \exp\{ta(s)\}$. Окончательное утверждение теоремы следует теперь из (4) и стохастической непрерывности предельных процессов.

Далее будем изучать последовательность случайных величин $\alpha(k) = \tau(\sigma(k))$, $k \geqslant 1$, где $\beta(k) = \inf\{t : \chi(t) \geqslant k\}$. Введем в рассмотрение независимые между собой процессы $\tilde{\tau}(t)$ и $\tilde{\chi}(t)$, стохастически эквивалентные процессам $\tau(t)$ и $\chi(t)$ соответственно. Положим $\tilde{\alpha}(k) = \tilde{\tau}(\tilde{\beta}(k))$, $k \geqslant 1$, где $\tilde{\beta}(k) = \inf\{t : \tilde{\chi}(t) \geqslant k\}$. Оказывается, распределения случайных величин $\alpha(k)$ можно аппроксимировать распределениями $\tilde{\alpha}(k)$.

Теорема 2. *При выполнении* (1)—(3) *имеет место*

$$\left|P\{\alpha(k) < x\} - \int_0^{\infty} P\{\tau(t) < x\}\, dP\{\chi(t) \geqslant k\}\right| \to 0.$$

Доказательство. Введем вспомогательные случайные величины $\alpha_\delta(k)$ и $\tilde{\alpha}_\delta(k)$ следующим образом: пусть $\delta > 0$ и $\beta_\delta(k) = \min\{l : \beta(k) \in [l\delta, (l+1)\delta),\ l = 0, 1, 2, \ldots\}$, $\tilde{\beta}_\delta(k) = \min\{l : \tilde{\beta}(k) \in [l\delta, (l+1)\delta),\ l = 0, 1, 2, \ldots\}$, тогда $\alpha_\delta(k) = \tau(\delta\beta_\delta(k))$, $\tilde{\alpha}_\delta(k) = \tilde{\tau}(\delta\tilde{\beta}_\delta(k))$.

Воспользуемся неравенством $|P\{\alpha(k) < x\} - P\{\tilde{\alpha}(k) < x\}| \leqslant |P\{\alpha(k) < x\} - P\{\alpha_\delta(k) < x\}| + |P\{\alpha_\delta(k) < x\} - P\{\tilde{\alpha}_\delta(k) < x\}| + |P\{\tilde{\alpha}_\delta(k) < x\} - P\{\tilde{\alpha}(k) < x\}| = f_1(\delta) + f_2(\delta) + f_3(\delta)$ и докажем, что $\lim f_2(\delta) = 0$ при каждом фиксированном $\delta > 0$, а $\overline{\lim} f_1(\delta)$ и $\overline{\lim} f_3(\delta)$ стремятся к нулю при $\delta \to 0$. Первое достаточно просто вытекает из соотношения $\lim |P\{\alpha_\delta(k) < x\} - P\{\tilde{\alpha}_\delta(k) < x\}| \leqslant \lim \sum_{j=1}^{[T/\delta]} |P\{\tau(j\delta) < x,\ \beta_\delta(k) = j\} - P(\tilde{\tau}(j\delta) < x\} \times P\{\tilde{\beta}_\delta(k) = j\}| + \lim P\{\beta_\delta(k) > T\} + \lim P\{\tilde{\beta}_\delta(k) > T\}$, последние два слагаемых которого могут быть сделаны сколь угодно малыми выбором достаточно большого T, а сумма $\sum_{j=1}^{[T/\delta]}$ стремится к нулю согласно теореме 1.

Докажем, что

$$\overline{\lim}\, f_1(\delta) \underset{\delta \to 0}{\to} 0. \tag{13}$$

Обозначив $\xi_\delta = \alpha(k) - \alpha_\delta(k)$, получим для каждого $\Delta > 0$ $|M \exp\{is\alpha(k)\} - M\exp\{is\alpha_\delta(k)\}| \leqslant M|e^{is\xi_\delta} - 1| \leqslant 2P\{\xi_\delta > \Delta\} + |s\Delta|$. Следовательно, для доказательства (13) достаточно показать, что

$$\sup_{\Delta > 0} \lim_{\delta \to 0} \lim P\{\xi_\delta > \Delta\} = 0. \tag{14}$$

Покажем, что для этого достаточно установить

$$\sup_{\Delta > 0} \lim_{\delta \to 0} \lim P\{\tau(\delta) > \Delta\} = 0. \tag{15}$$

Из соотношения $\{\xi_\delta > \Delta,\ \beta_\delta(k) = j\} \subseteq \{\tau(\delta(j+1)) - \tau(\delta j) > 0,\ \chi(\delta(j+1)) - \chi(\delta j) > 0\}$ вытекает неравенство

$$P\{\xi_\delta > \Delta\} \leqslant \sum_{j=1}^{[T/\delta]} P\{\tau(\delta(j+1)) - \tau(\delta j) > 0,\ \chi(\delta(j+1)) - \chi(\delta j) > 0\} + P\{\beta(k) > T - \delta\}.$$

Принимая во внимание неравенство (6), получаем, что

$$P\{\xi_\delta > \Delta\} \leqslant P\{\tau(\delta) > \Delta\} \sum_{j=1}^{[T/\delta]} P\{\chi(\delta(j+1)) - \chi(\delta j) > 0\} +$$
$$+ P\{\beta(k) > T - \delta\} \leqslant P\{\tau(\delta) > \Delta\}(T + \varepsilon) + P\{\beta(k) > T - \delta\}.$$

Поскольку второе слагаемое выбором T может быть сделано сколь угодно малым, то из (15) следует (14).

Для доказательства (15) стандартным образом выводим

$$\lim P\{\tau(\delta) > \Delta\} \leqslant \frac{\Delta}{2} \int_{|s| < \frac{2}{\Delta}} |1 - e^{\delta a(s)}| \, ds. \tag{16}$$

Ввиду непрерывности $a(s)$ разность $1 - e^{\delta a(s)}$ равномерно стремится к нулю при $\delta \to 0$ в каждом конечном промежутке $|s| < C$. Следовательно, из (16) следует (15). Теорема доказана.

1. *Соловьев А. Д.* Системы массового обслуживания с быстрым обслуживанием: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— М.:, 1972.— 21 с.
2. *Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства.— М. : Изд-во иностр. литер., 1948.— 456 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию 30.06.82
После переработки 23.03.83