УДК 517.937

В. Г. Задорожний

О нелокальных решениях V-диссипативных дифференциальных уравнений

В работе рассматриваются вопросы существования нелокальных решений V-диссипативных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, а также существование ограниченных и почти периодических решений. В случае гильбертова пространства и монотонности уравнений эти вопросы изучены в [1—3], в конечномерном случае укажем на работы [4—5]. Случаю аккретивных уравнений в банаховом пространстве посвящена работа [6]. V-диссипативные уравнения более общие, чем монотонные и аккретивные, однако рассмотрение ведется только в вещественных банаховых пространствах.

1. Пусть X — вещественное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, R — вещественная прямая.

Функцию $V : X \to R$ будем называть функцией Ляпунова, если она удовлетворяет условию Липшица $|V(x + \Delta x) - V(x)| \leqslant L(V(x))\|\Delta x\|$, где L — непрерывная функция и $V(0) = 0$.

Функция $V : X \to R$ называется положительно определенной, если существует непрерывная строго возрастающая функция $a : [0, \infty) \to [0, \infty)$ такая, что $V(x) \geqslant a(\|x\|)$ и $a(0) = 0$.

Рассмотрим в банаховом пространстве X задачу Коши

$$dx/dt = f(t, x), \ x(\alpha) = x_0. \tag{1}$$

По аналогии с определением из [7] функцию

$$V^-[x - y, t] = \limsup_{h \to -0} \{V[x - y + h[f(t, x) - f(t, y)]] - V(x - y)\}/h$$

будем называть левой верхней производной функции V вдоль разности решений уравнения (1).

Дифференциальное уравнение (1) и функцию $f(t, x)$ будем называть V-диссипативными (на отрезке $\Delta \subset R$), если существует положительно определенная функция Ляпунова, для которой выполнено условие

$$V^-[x - y, t] \leqslant 0, \ x, y \in X, \ t \in \Delta. \tag{2}$$

Монотонные и аккретивные дифференциальные уравнения V-диссипативны соответственно с функциями $V(x) = (Ux, x)$ и $V(x) = \|x\|$, где U — самосопряженный положительно определенный оператор.

Приведем условия существования нелокального решения V-диссипативного уравнения.

Теорема 1. *Пусть непрерывная функция* f: $[\alpha, \beta] \times X \to X$ *V-диссипативна и выполнено хотя бы одно из условий:*

а) *функция f ограничена на любом ограниченном множестве $T \subset [\alpha, \beta] \times X$ и функция* $F(v) = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{L(v)}$ *при* $v > v_0 = V(x_0)$ *принимает значения, большие чем* $(\beta - \alpha) \max_{\alpha \leqslant t \leqslant \beta} \|f(t, 0)\|$;

б) *для любого достаточно малого $r_0 > 0$ существуют положительные постоянные c и μ такие, что при $\|f(t, x)\| \geqslant c$, $\|x\| \geqslant r_0$ выполняются неравенства*

$$V^-(x, t) \leqslant -\mu L(V(x)) \|f(t, x)\|; \tag{3}$$

в) *сходится интеграл*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \lim_{k\to+0} \sup_{z\in X} k^{-1}a^{-1}\left[\bar{V}(\varphi(\alpha+k)-\varphi(\alpha))+F^{-1}\left(\int_{\alpha}^{t}\|f(s+k, z)-f(s, z)\|\,ds\right)\right]dt, \tag{4}$$

где φ — локальное решение задачи Коши (1), *a — функция из условия положительной определенности функции V.*

Тогда задача Коши (1) *будет иметь единственное решение и оно продолжимо на весь отрезок* $[\alpha, \beta]$.

Доказательство. Повторяя рассуждения, приведенные в работе [1], получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ можно построить ломаную Эйлера $\varphi_\varepsilon(t)$, удовлетворяющую на некотором отрезке $[\alpha, \gamma]$ неравенствам $\|\dot{\varphi}_\varepsilon(t)-f(t, \varphi_\varepsilon(t))\|\leqslant\varepsilon$, $\|\varphi_\varepsilon(t)-x_0\|\leqslant r$ для некоторого числа $r>0$. Пусть $\varepsilon>0$, $\delta>0$ — произвольные числа и $\varphi_\varepsilon(t)$, $\varphi_\delta(t)$ — соответствующие им ломаные Эйлера. Положим $v(t)=V(\varphi_\varepsilon(t)-\varphi_\delta(t))$. Пусть $D^{-}v(t)$ — левое верхнее производное число Дини, тогда

$$D^{-}v(t)=V^{-}[\varphi_\varepsilon(t)-\varphi_\delta(t)]=\lim_{h\to-0}\sup h^{-1}[V(\varphi_\varepsilon-\varphi_\delta+h[f(t, \varphi_\varepsilon)-$$

$$-f(t, \varphi_\delta)+\varepsilon(t)+\delta(t)])-V(\varphi_\varepsilon-\varphi_\delta)],$$

где $\varepsilon(t)=\dot{\varphi}_\varepsilon(t)-f(t, \varphi_\varepsilon(t))$, $\delta(t)=\dot{\varphi}_\delta(t)-f(t, \varphi_\delta(t))$. Прибавим и вычтем под знаком $\lim\sup$ выражение $h^{-1}V(\varphi_\varepsilon-\varphi_\delta+h[f(t, \varphi_\varepsilon)-f(t, \varphi_\delta)])$. Воспользовавшись V-диссипативностью функции f и условием Липшица для функции V, получим $D^{-}v(t)\leqslant L(v)(\varepsilon+\delta)$. Так как φ_ε и φ_δ ограничены, то ограничена и функция $L(v)$ $(L(v)\leqslant L)$. Согласно теореме о дифференциальных неравенствах [5] (с. 16) $v(t)\leqslant L(\varepsilon+\delta)(t-\alpha)$ при $\alpha\leqslant t\leqslant\gamma$. Отсюда получаем $\|\varphi_\varepsilon(t)-\varphi_\delta(t)\|\leqslant a^{-1}(L(\varepsilon+\delta)(t-\alpha))\to 0$ при $\varepsilon+\delta\to 0$. Тогда последовательность $\{\varphi_\varepsilon(t)\}$ будет равномерно сходиться на отрезке $[\alpha, \gamma]$ при $\varepsilon\to 0$.

Обычным образом показывается, что ее предел $\varphi(t)$ — решение задачи Коши (1). Таким образом, для существования локального решения задачи Коши достаточно непрерывности и V-диссипативности функции f.

Пусть решение φ непродолжимо на отрезок $[\alpha, \beta]$. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что оно определено на промежутке $[\alpha, \beta)$. Тогда будет расходиться интеграл

$$\int_{\alpha}^{\beta}\|\dot{\varphi}(t)\|\,dt, \tag{5}$$

ибо, как хорошо известно, его сходимость влечет продолжимость решения φ в точку $t=\beta$.

Непродолжимое решение φ при $t\to\beta$ отделено от нуля, т. е. существует такое число $r_0>0$, что $\|\varphi(t)\|>r_0$ при t, достаточно близких к β. Действительно, пусть φ не отделено от нуля при $t\to\beta$. Тогда будет существовать последовательность $\{t_k\}$, сходящаяся к β такая, что $\{\varphi(t_k)\}\to 0$ при $t_k\to\beta$. В силу непрерывности функций φ и f при $t\to\beta$ имеем $f(t, \varphi(t))\to$ $\to f(\beta, 0)$. Тогда $\|\dot{\varphi}(t)\|$ будет ограниченным и решение φ — продолжимым в точку β, что противоречит предположению.

Положим $v(t)=V(\varphi(t))$. В силу (2) имеем

$$D^{-}v(t)=\lim_{h\to-0}\sup[V(\varphi+hf(t, \varphi))-V(\varphi)]/h\leqslant L(v)\max_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}\|f(t, 0)\|=L(v)M. \tag{6}$$

Согласно теореме о дифференциальных неравенствах функция v при $t>\alpha$ не превосходит решения задачи Коши $\dot{u}=L(u)M$, $u(\alpha)=V(x_0)$. Решение этой задачи удовлетворяет уравнению $F(u(t)-F(V(x_0))=M(t-\alpha)$.

Поскольку $F(v)$ принимает значения большие, чем $M(\beta - \alpha)$, то решение $u(t)$ продолжимо на отрезок $[\alpha, \beta]$. Тогда на $[\alpha, \beta]$ ограничена функция $v(t) = V(\varphi(t))$. Следовательно, ограничена и функция φ, а в силу условия а) ограничена и функция $f(t, \varphi(t)) = \dot{\varphi}(t)$. Это противоречит расходимости интеграла (5).

Пусть выполнено условие б). Заметим, что

$$V^-[x, t] = \lim_{h\to -0} \sup [V[x + hf(t, x)] - V(x)]/h \leqslant L(V(x)) \| f(t, x) \|. \qquad (7)$$

Пусть решение φ непродолжимо на отрезок $[\alpha, \beta]$. Тогда для функции $v(t) = V(\varphi(t))$ в силу (3) и (7) получим $D^- v(t) \leqslant -\mu L(v) \| f(t, \varphi(t)) \|$, $\| f(t, \varphi(t)) \| \geqslant c$, $\| \varphi(t) \| > r_0$, $D^- v(t) \leqslant L(v) \| f(t, \varphi(t)) \|$. Из этих неравенств следует $D^- v(t) \leqslant L(v)(1 + \mu) c - \mu L(v) \| \dot{\varphi}(t) \|$. Отсюда, учитывая (6), находим $\| \dot{\varphi}(t) \| \leqslant (1 + 1/\mu) c - D^- v(t)/\mu L(v) \leqslant (1 + 1/\mu) c + M/\mu$. Это противоречит расходимости интеграла (5).

Пусть выполнено условие в) и φ — непродолжимое решение на отрезок $[\alpha, \beta]$. Пусть k — произвольное достаточно малое положительное число. Рассмотрим функцию $v(t) = V[\varphi(t + k) - \varphi(t)]$. Имеем

$$D^- v(t) = \lim_{h\to -0} \sup \{V[\varphi(t + k) - \varphi(t) + h[f(t + k, \varphi(t + k)) - f(t, \varphi(t))] - V[\varphi(t + k) - \varphi(t)]\}/h.$$

Прибавляя и вычитая под знаком lim sup выражение $V[\varphi(t + k) - \varphi(t) + h[f(t, \varphi(t + k)) - f(t, \varphi(t))]]/h$, пользуясь V-диссипативностью и условием Липшица для функции V, получаем $D^- v(t) \leqslant L(v) \| f(t + k, \varphi(t + k)) - f(t, \varphi(t + k)) \|$. Отсюда в силу теоремы о дифференциальных неравенствах и условия положительной определенности функции V получим

$$\| \varphi(t + k) - \varphi(t) \| \leqslant a^{-1} \left[V(\varphi(\alpha + k) - \varphi(\alpha)) + F^{-1} \left(\int_\alpha^t \| f(s + k, \varphi(s + k)) - f(s, \varphi(s + k)) \| ds \right) \right].$$

Разделив на k, переходя к пределу при $k \to 0$ и используя (4), получаем сходимость интеграла (5), т. е. решение φ продолжимо на $[\alpha, \beta]$.

Единственность решения легко следует из V-диссипативности уравнения. Теорема полностью доказана.

Отметим, что в случае монотонных уравнений условие (3) является следствием монотонности функции f (см. [1]). Условие в) удобно при исследовании автономных уравнений.

2. Найдем условия, обеспечивающие существование ограниченного на всей числовой оси R решения уравнения (1).

Функцию $f: R \times X \to X$ будем называть сильно V-диссипативной, если существуют положительно определенная функция Ляпунова $V: X \to R$ и неположительная отличная от нуля функция $g: R \times R \to R$ такие, что выполняется неравенство

$$V^-[x - y, t] \leqslant g(t, V(x - y)), \quad t \in R, \ x, y \in X. \qquad (8)$$

Теорема 2. *Пусть непрерывная функция f — сильно V-диссипативна и существует такой интервал $0 < r_1 < r_2$, что*

$$g(t, V(x)) + L(V(x)) \| f(t, 0) \| \leqslant 0, \quad t \in R \qquad (9)$$

при всех x, удовлетворяющих условию $r_1 \leqslant V(x) \leqslant r_2$. Пусть кроме того на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset R$ выполнено хотя бы одно из условий а), б), в) *теоремы 1.*

Тогда дифференциальное уравнение (1) *будет иметь по крайней мере одно ограниченное на всей числовой оси решение. Оно устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. В силу условий теоремы при любых $\alpha \in R$, $x_0 \in X$ существует единственное решение $\varphi(t, \alpha, x_0)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию $\varphi(\alpha, \alpha, x_0) = x_0$. Пусть $V(x_0) \leqslant r_1$. Рассмотрим решение $\varphi(t) = \varphi(t, \alpha, x_0)$, где $\alpha \in R$ — любое фиксированное число. Предположим, что в некоторый момент времени t_0 выполняется неравенство $V(\varphi(t_0)) > r_1$. Тогда будет существовать отрезок $(t_1, t_2]$ такой, что при $t_1 < t \leqslant t_2$ справедливы соотношения

$$V(\varphi(t_1)) = r_1 < V(\varphi(t)) < r_2. \tag{10}$$

Полагая $v(t) = V(\varphi(t))$, из соотношений (6), используя (8) и (9), получаем $D^- v(t) \leqslant g(t, v(t)) + L(v) \; \| f(t, 0) \| \leqslant 0$. Тогда $V(\varphi(t)) \leqslant r_1$ при $t \in (t_1, t_2]$, что противоречит неравенствам (10). Следовательно, при всех $t \geqslant \alpha$ для решения φ выполняется условие $V(\varphi(t)) \leqslant r_1$.

Для каждого натурального числа n введем в рассмотрение множество $S_n = \{x \mid x = \varphi(0, -n, x_0),\ V(x_0) \leqslant r_1\}$. Это — сечение гиперплоскостью $t = 0$ множества интегральных кривых, проходящих в момент времени $t = -n$ через точки x_0, удовлетворяющие условию $V(x_0) \leqslant r_1$. Согласно доказанному выше для таких решений справедливы неравенства $V(\varphi(t)) \leqslant r_1$ при $t \geqslant -n$. Тогда будет справедливой цепочка включений $S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \ldots$. Из V-диссипативности функции f легко следует, что множества S_n замкнуты. В силу полноты пространства X пересечение множеств S_n непусто. Рассмотрим решение $\varphi(t, 0, x_0)$, где $x_0 \in \bigcap S_n$. Поскольку $x_0 \in S_n$, то существует точка x_n такая, что $V(x_n) \leqslant r_1$ и $\varphi(0, -n, x_n) = x_0$. В силу единственности $\varphi(t, 0, x_0) = \varphi(t, -n, x_n)$ при $t \geqslant -n$. Таким образом, решение $\varphi(t, 0, x_0)$ ограничено на всей оси R. Из V-диссипативности следует, что оно устойчиво по Ляпунову. Теорема доказана.

3. Приведем условия, обеспечивающие единственность ограниченного решения.

Теорема 3. *Пусть непрерывная функция $f: R \times X \to X$ сильно V-диссипативна и решения задач Коши $\dot v = g(t, v)$, $v(t_0) = v_0$ обладают свойством*

$$v(t, v_0) \to +\infty \text{ при } v_0 > 0,\ t \to -\infty. \tag{11}$$

Тогда уравнение (1) *не может иметь более одного ограниченного на всей числовой оси R решения.*

Доказательство. Пусть уравнение (1) имеет два ограниченных на всей числовой оси R решения $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$. Тогда функция $u(t) = V(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))$ будет ограниченной на R. При этом $D^- u(t) = V^- [\varphi_1(t) - \varphi_2(t), t] \leqslant g(t, u(t))$. По теореме о дифференциальных неравенствах $u(t) \geqslant v(t, u(t_0))$ при $t \leqslant t_0$ и это неравенство имеет место для любого $t_0 \in R$. Если $u(t_0) > 0$, то из последнего неравенства и из (11) следует, что функция $u(t)$ неограничена при $t \to -\infty$. Полученное противоречие показывает, что $V[\varphi_1(t) - \varphi_2(t)] \equiv 0$, т. е. $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$. Теорема доказана.

4. Хорошо известна теорема Минти — Браудера [8] (с. 95) о разрешимости уравнения

$$f(x) = 0 \tag{12}$$

с монотонным отображением f. Следующая теорема дает условия разрешимости уравнения (12) в случае V-диссипативного отображения f.

Теорема 4. *Пусть непрерывное отображение $f: X \to X$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *f сильно V-диссипативна, т. е. существует положительно определенная функция Ляпунова V такая, что*

$$\overset{\circ}{V}{}^- [x - y] \leqslant g(V(x - y)) \leqslant 0, \quad x, y \in X;$$

2) *решения $v(t, v_0)$ задач Коши $\dot v = g(v)$, $v(t_0) = v_0$ обладают свойством $v(t, v_0) \to +\infty$ при $v_0 > 0$, $t \to -\infty$;*

3) *существует интервал $0 < r_1 < r_2$ такой, что $g(V(x)) + L(V(x)) \times \| f(0) \| \leqslant 0$ при $r_1 \leqslant V(x) \leqslant r_2$;*

4) $\limsup\limits_{k \to +0} k^{-1} a^{-1} [V(\varphi(k) - \varphi(0))] < \infty$, *где φ — решение уравнения* $\dot{x} = f(x)$.

Тогда уравнение (12) *будет иметь единственное решение.*

Доказательство. Рассмотрим дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(x)$. Условия теоремы позволяют использовать первые три теоремы. Из них следует, что уравнение $\dot{x} = f(x)$ имеет единственное ограниченное на всей числовой оси R решение $\varphi(t)$. В силу автономности уравнения функция $\varphi(t+k)$ при любом $k \in R$ также является решением этого уравнения. По свойству единственности они совпадают, откуда следует, что φ постоянно и $f(\varphi) = 0$. Теорема доказана.

Замечание. Если при любом $z \in X$ существуют числа $0 < r_1(z) < r_2(z)$ такие, что при $r_1(z) \leqslant V(x) \leqslant r_2(z)$ выполняется условие $g(V(x)) + L(V(x)) \| f(0) + z \| \leqslant 0$ и предположения 1), 2), 4) теоремы 4, то оператор f обратим.

Для доказательства следует рассмотреть уравнение $f(x) = z$ при любом $z \in X$ и провести предыдущее рассуждение для дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x) - z$.

5. Рассмотрим вопрос о почти периодичности единственного ограниченного решения.

Теорема 5. *Пусть для уравнения* (1) *выполнены следующие условия:*

1) *функция $f: R \times X \to X$ почти периодична по t и непрерывна по x равномерно относительно $t \in R$;*

2) *функция f сильно V-диссипативна и ограничена на каждом множестве $R \times S$, где $S \subset X$ — любое ограниченное множество;*

3) *функция* $F(v) = \int\limits_{v_0}^{v} \frac{dv}{L(v)}$ *неограничена при $v > v_0$ и $v < v_0$, где v_0 — любое число;*

4) *существуют числа $0 < r_1 < r_2$ такие, что при $r_1 \leqslant V(x) \leqslant r_2$ будет выполняться неравенство $g(t, V(x)) + L(V(x)) \| f(t, 0) \| \leqslant 0$, $t \in R$;*

5) *решение $v(t, v_0, \varepsilon)$ задач Коши $\dot{v} = g(t, v) + \varepsilon$, $v(t_0) = v_0$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ и любых t_0 существуют на любом конечном отрезке вещественной оси R, при этом $v(t, v_0, 0) \to +\infty$ для $v_0 > 0$, $t \to -\infty$ и $v(t, v_0, \varepsilon) \to 0$ равномерно относительно $t \in R$ при $\varepsilon \to 0$.*

Тогда уравнение (1) *будет иметь единственное почти периодическое решение φ_0, причем*

$$\operatorname{mod} \varphi_0 \subseteq \operatorname{mod}(f \mid K), \qquad (K = \overline{\varphi_0(R)}). \tag{13}$$

Здесь $\operatorname{mod} \varphi_0$ — модуль почти периодической функции [9] (с. 126), K — замыкание множества значений функции φ_0, $f \mid K$ — сужение отображения f на множество $R \times K$.

Доказательство. Из теорем 1, 2, 3 следует, что уравнение (1) имеет единственное ограниченное на всей оси R решение φ_0. Обычным образом показывается (см. [6]), что для любых компактных множеств $T \subset R$, $S \subset X$ из любой последовательности сдвигов $f(t + h_n, x)$ можно извлечь подпоследовательность $f_n(t, x) = f(t + k_n, x)$, равномерно сходящуюся на множестве $T \times S$. Предельная функция $\hat{f}$ также удовлетворяет условиям теорем 1, 2, 3. Обозначим через $\hat{\varphi}$ единственное ограниченное на R решение дифференциального уравнения $\dot{x} = \hat{f}(t, x)$. Пусть $\varphi_n(t) = \varphi_0(t + k_n)$. Для функции $v_n(t) = V[\varphi_n(t) - \hat{\varphi}(t)]$, как и в (6), получаем

$$D^- v_n(t) = \limsup_{h \to -0} \{V[\varphi_n(t) - \hat{\varphi}(t) + h[f(t + k_n, \varphi_n(t)) - \hat{f}(t, \hat{\varphi}(t))]] - V[\varphi_n(t) - \hat{\varphi}(t)]\}/h \leqslant g(t, v_n(t)) + L(v_n) \| f(t + k_n, \varphi_n(t)) - \hat{f}(t, \varphi_n(t)) \|. \tag{14}$$

При $n \to \infty$ второе слагаемое в правой части (14) равномерно на R стремится к нулю. Согласно условию 5) при $n \to \infty$ имеем $v_n(t) \to 0$ равномерно по $t \in R$. Тогда $\| \varphi_n(t) - \hat{\varphi}(t) \| \to 0$ равномерно по $t \in R$ при $n \to \infty$. Таким образом, любая последовательность сдвигов $\{\varphi_0(t + h_n)\}$ содержит равномерно сходящуюся на R подпоследовательность $\{\varphi_0(t + k_n)\}$. Согласно критерию Бохнера функция φ_0 почти периодична. Отсюда же следует и включение (13). Теорема доказана.

6. В случае конечномерного пространства X вопросы существования и единственности ограниченных и периодических решений подробно обсуждены в [5], однако мы налагаем на функции V менее ограничительные условия. Теорема 4, являющаяся аналогом теоремы Минти—Браудера для V-диссипативных отображений, по-видимому, нова. Мы получаем ее как следствие предыдущих результатов для дифференциальных уравнений. Вероятно, можно получить и прямое доказательство этого утверждения. Анализируя доказательство теоремы 2, нетрудно заметить, что условие (9) может быть ослаблено. Это автоматически повлечет ослабление условия 3) теоремы 4.

1. *Перов А. И., Трубников Ю. В.* Монотонные дифференциальные уравнения. I.— Дифференц. уравнения, 1974, **10**, № 5, с. 804—815.
2. *Перов А. И., Трубников Ю. В.* Монотонные дифференциальные уравнения. II.— Дифференц. уравнения, 1976, **12**, № 7, с. 1223—1237.
3. *Перов А. И., Трубников Ю. В.* Монотонные дифференциальные уравнения. III.— Дифференц. уравнения, 1978, **14**, № 2, с. 232—244.
4. *Чересиз В. М* Устойчивые и условно устойчивые почти периодические решения V-монотонных систем.— Сиб. матем. журнал, 1974, **15**, № 1, с. 162—176.
5. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1966.— 332 с.
6. *Трубников Ю. В.* Аккретивные дифференциальные уравнения.— Сиб. матем. журнал, 1979, **20**, № 4, с. 835—853.
7. *Массера Х. Л., Шеффер Х. Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства.— М.: Мир, 1970.— 456 с.
8. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1978.— 336 с.
9. *Левитан Б. М.* Почти периодические функции.— М.: ГИТТЛ, 1953.— 396 с.

Воронежский
государственный университет

Поступила в редакцию
15.12.80