АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР ● ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 35, № 4, 1983

Научный журнал основан в 1949 г.
Выходит один раз в два месяца

Киев Наукова думка

УДК 517.5

А. М. Авакян

О приближении функций двух переменных линейными методами

Пусть $I = [0,1] \times [0,1]$ — единичный квадрат на координатной плоскости и $L_p^{\sigma_1,\sigma_2} = \{f : D^{\nu,\mu} f \in C(I)$ при $0 \leqslant \nu \leqslant \sigma_1 - 1, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant \sigma_2 - 1$ $D^{\nu,\mu} f \in L_p(I)$ при $0 \leqslant \nu \leqslant \sigma_1, \ 0 \leqslant \mu \leqslant \sigma_2\}$, где $\sigma_1, \ \sigma_2 = 1, 2, 3, \ldots, C(I)$ — пространство непрерывных, $L_p(I)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, — пространство измеримых на I функций с обычными нормами $D^{\nu,\mu} f(x, y) = f^{(\nu,\mu)}(x, y) = \partial^{\nu+\mu}/\partial x^\nu \times \partial y^\mu f(x, y)$, при этом производные понимаются в обобщенном (по Соболеву) смысле. Во многих случаях погрешность приближения функции $f(x, y) \in L_p^{\sigma_1,\sigma_2}$ линейными методами представима в виде

$$G(f, x, y) = -\int_0^1\int_0^1 K_1(x, u) K_2(y, v) f^{(\sigma_1,\sigma_2)}(u, v)\, du dv +$$

$$+ \int_0 K_1(x, u) f^{(\sigma_1,0)}(u, y)\, du + \int_0 K_2(y, v) f^{(0,\sigma_2)}(x, v)\, dv \qquad (1)$$

где $K_1(x, u)$, $K_2(y, v)$ — некоторые достаточно гладкие функции, характеризующие метод приближения.

Докажем теорему общего характера, позволяющую получить точную погрешность приближения на классе через соответствующие точные одномерные оценки во многих случаях приближения функции двух переменных линейными методами.

Пусть функции $K_1(x, u)$ и $K_2(y, v)$, фигурирующие в формуле (1), измеримы, определены на I и удовлетворяют следующим условиям:

1) существуют суммируемые на $[0, 1]$ функции $M_{1,\nu}(u)$ и $M_{2,\mu}(v)$ такие, что $|K_1^{(\nu,0)}(x, u)| \leqslant M_{1,\nu}(u)$, $|K_2^{(\mu,0)}(y, v)| \leqslant M_{2,\mu}(v)$, $(0 \leqslant \nu < \sigma_1, \ 0 \leqslant \mu < \sigma_2)$;

2) если $1 < p \leqslant \infty$, $q = p/(p-1)$ — сопряженное к p число, то $\|K_1^{(\nu,0)}(x, \cdot)\|_q < \infty$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, $\|K_2^{(\mu,0)}(y, \cdot)\|_q < \infty$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Если же $p = 1$, $q = \infty$, то при каждых фиксированных x и y из отрезка $[0, 1]$ $K_1^{(\nu,0)}(x, u)$ и $K_2^{(\mu,0)}(y, v)$ будут непрерывными справа или слева функциями от переменных u и v.

Условие 1), наложенное на ядра $K_1(x, u)$ и $K_2(y, v)$, позволяет продифференцировать $G(f, x, y)$ ν раз, $0 \leqslant \nu \leqslant \sigma_1 - 1$, по переменной x и μ раз, $0 \leqslant \mu \leqslant \sigma_2 - 1$, по переменной y:

$$G^{(\nu,\mu)}(f, x, y) = -\int_0^1\int_0^1 K_1^{(\nu,0)}(x, u) K_2^{(\mu,0)}(y, v) f^{(\sigma_1,\sigma_2)}(u, v)\,du dv +$$

$$+\int_0^1 K_1^{(\nu,0)}(x, u) f^{(\sigma_1,\mu)}(u, y)\,du + \int_0^1 K_2^{(\mu,0)}(y, v) f^{(\nu,\sigma_2)}(x, v)\,dv. \tag{2}$$

При $\sigma_1, \sigma_2 = 1, 2, 3, \ldots, 1 \leqslant p \leqslant \infty$, $0 \leqslant \nu \leqslant \sigma_1$, $0 \leqslant \mu \leqslant \sigma_2$ определим класс $D^{\nu,\mu}W_p^{\sigma_1,\sigma_2}$ следующим образом:

$$D^{\nu,\mu}W_p^{\sigma_1,\sigma_2} = \{f \in L_p^{\sigma_1,\sigma_2} : \sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\mathrm{vrai}\, \| f^{(\nu,\sigma_2)}(x, \cdot)\|_p \leqslant 1,$$

$$\sup_{0\leqslant y\leqslant 1}\mathrm{vrai}\, \| f^{(\sigma_1,\mu)}(\cdot, y)\|_p \leqslant 1, \quad \| f^{(\sigma_1,\sigma_2)}\|_{L_p(I)} \leqslant 1\},$$

где $\| f^{(\sigma_1,\sigma_2)}\|_{L_p(I)}$ — обычная p-норма функции $f^{(\sigma_1,\sigma_2)}$ на I, а

$$\| f^{(\nu,\sigma_2)}(x, \cdot)\|_p = \left\{\int_0^1 | f^{(\nu,\sigma_2)}(x, v)|^p dv\right\}^{1/p},$$

$$\| f^{(\sigma_1,\mu)}(\cdot, y)\|_p = \left\{\int_0^1 | f^{(\sigma_1,\mu)}(u, y)|^p du\right\}^{1/p}.$$

Теорема 1. *Пусть функции $K_1(x, u)$ и $K_2(y, v)$, определенные на I, удовлетворяют условиям 1), 2) и для $f \in L_p^{\sigma_1,\sigma_2}$ функция $G(f, x, y)$ на I определяется равенством* (1). *Если $\sigma_1, \sigma_2 = 3, 4, 5, \ldots$, $0 \leqslant \nu \leqslant \sigma_1 - 3$ и $0 \leqslant \mu \leqslant \sigma_2 - 3$, то при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ в любой точке $(x, y) \in I$ выполняется равенство*

$$\sup_{f\in D^{\nu,\mu}W_p^{\sigma_1,\sigma_2}} | G^{(\nu,\mu)}(f, x, y)| = \| K_1^{(\nu,0)}(x, \cdot)\|_q \times$$
$$\times \| K_2^{(\mu,0)}(y, \cdot)\|_q + \| K_1^{(\nu,0)}(x, \cdot)\|_q + \| K_2^{(\mu,0)}(y, \cdot)\|_q, \tag{3}$$

где $q = p/(p-1)$.

Доказательство. Применяя неравенство Гельдера к интегралам в формуле (2), получаем неравенство

$$| G^{(\nu,\mu)}(f, (x, y) \leqslant \| K_1^{(\nu,0)}(x, \cdot)\|_q \| K_2^{(\mu,0)}(y, \cdot)\|_q \| f^{(\sigma_1,\sigma_2)}\|_{L_p(I)} +$$

$$+ \| K_1^{(\nu,0)}(x, \cdot)\|_q \| f^{(\sigma_1,\mu)}(\cdot, y)\|_p + \| K_2^{(\mu,0)}(y, \cdot)\|_q \| f^{(\nu,\sigma_2)}(x, \cdot)\|_p,$$

из которого видно, что левая часть равенства (3) не больше его правой части.

Зафиксируем точки x_0 и y_0 из сегмента $[0, 1]$ и целые числа ν и μ, $0 \leqslant \nu \leqslant \sigma_1 - 3$, $0 \leqslant \mu \leqslant \sigma_2 - 3$, указанные в теореме. Пусть сначала $1 < p \leqslant \infty$, $q = p/(p-1)$. Рассмотрим следующие функции, определенные на $[0, 1]$:

$$g_0(u) =$$
$$= \begin{cases} | K_1^{(\nu,0)}(x_0, u)|^{q-1}\,\mathrm{sgn}\, K_1^{(\nu,0)}(x_0, u)/\| K_1^{(\nu,0)}(x_0, \cdot)\|_q^{q-1}, & \text{если } \| K_1^{(\nu,0)}(x_0, \cdot)\|_q > 0, \\ 0, & \text{если } \| K_1^{(\nu,0)}(x_0, \cdot)\|_q = 0; \end{cases}$$

и

$$h_0(v) = \begin{cases} | K_2^{(\mu,0)}(y_0 v)|^{q-1}\,\mathrm{sgn}\, K_2^{(\mu,0)}(y_0, v)/\| K_2^{(\mu,0)}(y_0, \cdot)\|_q^{q-1}, \\ \qquad \text{если } \| K_2^{(\mu,0)}(y_0, \cdot)\|_q > 0, \\ 0, \qquad \text{если } \| K_2^{(\mu,0)}(y_0, \cdot)\|_q = 0. \end{cases}$$

Тогда
$$\int_0^1 K_1^{(\nu,0)}(x_0,u)\,g_0(u)\,du=\|K_1^{(\nu,0)}(x_0,\cdot)\|_q,$$
$$\int_0^1 K_2^{(\mu,0)}(y_0,v)\,h_0(v)\,dv=\|K_2^{(\mu,0)}(y_0,\cdot)\|_q. \qquad (4)$$

Поскольку $(q-1)p=q$, то легко убедиться в том, что $\int_0^1|g_0(u)|^p du=1$, $\int_0^1|h_0(v)|^p dv=1$. В силу неравенства Гельдера $\int_0^1|g_0(u)|\,du=\int_0^1|g_0(u)|\times$ $\times 1du\leqslant\|g_0\|_p=1$.

Аналогичным образом получим такое неравенство для функции $h_0(v)$. Итак,
$$\int_0^1|g_0(u)|\,du\leqslant 1,\qquad \int_0^1|h_0(v)|\,dv\leqslant 1. \qquad (5)$$
По индукции построим функции $g_1, g_2, \ldots, g_{\sigma_1}$ следующим образом: $g_i(u)=$ $=\int_0^u g_{i-1}(t)\,dt-c_i$, где
$$c_1=\min_{0\leqslant u\leqslant 1}\int_0^u g_0(t)\,dt,\quad c_2=\ldots=c_{\sigma_1-\nu-2}=0,\quad c_{\sigma_1-\nu-1}=\int_0^{x_0} g_{\sigma_1-\nu-2}(u)\,du,$$
$$c_{\sigma_1-\nu}=\min_{0\leqslant u\leqslant 1}\int_0^u g_{\sigma_1-\nu-1}(t)\,dt,\quad c_{\sigma_1-\nu+1}=\ldots c_{\sigma_1}=0.$$
Если $\bigvee_0^1(g_1)$ — полная вариация функции g_1 на сегменте $[0, 1]$, то в силу формулы (5) $\bigvee_0^1(g_1)=\int_0^1|g_0(u)|\,du\leqslant 1$. Так как $g_i'=g_{i-1}$, $\bigvee_0^1(g_i)=$ $=\int_0^1|g_{i-1}(u)|\,du$, $\bigvee_0^1(g_1)\leqslant 1$, и каждая функция g_i, $i=1, 2, \ldots, \sigma_1$, обращается в нуль в некоторой точке сегмента $[0, 1]$, то $|g_i(u)|\leqslant 1$. Учитывая выбор констант $c_1, c_2, \ldots, c_{\sigma_1-\nu-2}$, можем утверждать, что $0\leqslant g_i(u)\leqslant$ $\leqslant 1$, $i=1, 2, \ldots, \sigma_1-\nu-2$. Поэтому функция $g_{\sigma_1-\nu-1}$ монотонна и $g_{\sigma_1-\nu-1}(x_0)=$ $=0$. Следовательно, x_0 — точка минимума для функции $g_{\sigma_1-\nu}$, а в силу выбора константы $c_{\sigma_1-\nu}$ $g_{\sigma_1-\nu}(x_0)=0$, $0\leqslant g_{\sigma_1-\nu}(u)\leqslant 1$, $0\leqslant u\leqslant 1$.

Итак, при фиксированных ν, $0\leqslant\nu\leqslant\sigma_1-3$, и μ, $0\leqslant\mu\leqslant\sigma_2-3$, мы построили систему функций $g_0, g_1, \ldots, g_{\sigma_1}$, обладающую следующими свойствами: *a*) $\int_0^1|g_0(u)|^p du=1$; *в*) $g_i'(u)=g_{i-1}(u)$, $i=1, 2, \ldots, \sigma_1$); *c* ($0\leqslant$ $\leqslant g_{\sigma_1-\nu}(u)\leqslant 1$, $0\leqslant u\leqslant 1$, *d*) $g_{\sigma_1-\nu}(x_0)=0$.

Заметим, что при построении системы функций $g_1, g_2, \ldots, g_{\sigma_1}$ мы воспользовались только измеримостью функции g_0 и соотношением (5).

Аналогичным образом построим функции $h_1, h_2, \ldots, h_{\sigma_2}$ со следующими свойствами:
$$a')\ \int_0^1|h_0(v)|^p dv=1;\quad в')\ \ h_j'(v)=h_{j-1}(v),\quad j=1, 2, \ldots, \sigma_2;$$
$$c')\ \ 0\leqslant h_{\sigma_2-\mu}(v)\leqslant 1,\ 0\leqslant v\leqslant 1;\ d')\ \ h_{\sigma_2-\mu}(y_0)=0.$$
Рассмотрим функцию $f_0(u,v)=[g_{\sigma_1}(u)-u^\nu/\nu!]\,[v^\mu/\mu!-h_{\sigma_2}(v)]$. В силу свойств *в*) и *в'*)
$$f_0^{(\nu,\sigma_2)}(u,v)=[g_{\sigma_1-\nu}(u)-1]\,[-h_0(v)],$$
$$f_0^{(\sigma_1,\mu)}(u,v)=g_0(u)\,[1-h_{\sigma_2-\mu}(v)], \qquad (6)$$
$$f_0^{(\sigma_1,\sigma_2)}(u,v)=-g_0(u)\,h_0(v).$$

Поэтому, во-первых, из свойств a), a') и c) c') функций $g_0,\ g_1, \dots, g_{\sigma_1},\ h_0,\ h_1, \dots, h_{\sigma_2}$ следует, что $f \in D^{\nu,\mu} W_p^{\sigma_1,\sigma_2}$; во-вторых, из свойств d) и d') следует, что

$$
\begin{gathered}
f_0^{(\nu,\sigma_2)}(x_0, v) = h_0(v), \\
f_0^{(\sigma_1,\mu)}(u, y_0) = g_0(u), \\
f_0^{(\sigma_1,\sigma_2)}(u, v) = -g_0(u)\, h_0(v).
\end{gathered} \tag{7}
$$

Учитывая соотношения (7) и формулу (4), легко убедиться в том, что левая часть равенства (2) для функции $f(x, y) = f_0(x, y)$ в точке (x_0, y_0) равна правой части равенства (3) в этой же точке. Итак, равенство (3) в случае $1 < p \leqslant \infty$ доказано.

Пусть теперь $p = 1$, $q = \infty$, а α и β — любые числа, удовлетворяющие неравенствам $\alpha < \| K_1^{(\nu,0)}(x_0, \cdot)\|_\infty$, $\beta < \| K_2^{(\mu,0)}(y_0, \cdot)\|_\infty$. Существуют точки u_0 и v_0 из сегмента $[0, 1]$, для которых $\alpha < |K_1^{(\nu,0)}(x_0, u_0)|$, $\beta < |K_2^{(\mu,0)}(y_0, v_0)|$. Не нарушая общности, будем считать, что $K_1^{(\nu,0)}(x_0, u_0) \geqslant 0$, $K_2^{(\mu,0)}(y_0, v_0) \geqslant 0$ и функции $K_1^{(\nu,0)}(x_0, u)$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $K_2^{(\mu,0)}(y_0, v)$; $0 \leqslant v \leqslant 1$, непрерывны справа. Пусть $\varepsilon > 0$ и число $\delta > 0$ выбрано так, что $|K_1^{(\nu,0)}(x_0, u) - K_1^{(\nu,0)}(x_0, u_0)| < \varepsilon$, $|K_2^{(\mu,0)}(y_0, v) - K_2^{(\mu,0)}(y_0, v_0)| < \varepsilon$ при $u_0 \leqslant u \leqslant u_0 + \delta$ и $v_0 \leqslant v \leqslant v_0 + \delta$. Определим функции $\tilde{g}_0$ и $\tilde{h}_0$ следующим образом:

$$
\tilde{g}_0(u) = \begin{cases} \delta^{-1} & \text{при } u_0 \leqslant u \leqslant u_0 + \delta, \\ 0 & \text{при } u \in [0, 1] \setminus (u_0, u_0 + \delta); \end{cases}
$$

$$
\tilde{h}_0(v) = \begin{cases} \delta^{-1} & \text{при } v_0 \leqslant v \leqslant v_0 + \delta, \\ 0 & \text{при } v \in [0, 1] \setminus (v_0, v_0 + \delta). \end{cases}
$$

Тогда $\int\limits_0^1 |\tilde{g}_0(u)|\, du = 1$, $\int\limits_0^1 |\tilde{h}_0(v)|\, dv = 1$.

Исходя из функций $\tilde{g}_0$ и $\tilde{h}_0$ построим функции $\tilde{g}_{\sigma_1}$ и $\tilde{h}_{\sigma_2}$ таким же способом, как построили функции g_{σ_1} и h_{σ_2}. Рассмотрим функцию

$$
\tilde{f}_\varepsilon(u, v) = [\tilde{g}_{\sigma_1}(u) - u^\nu/\nu!]\, [v^\mu/\mu! - \tilde{h}_{\sigma_2}(v)].
$$

Для функции $\tilde{f}_\varepsilon$ тоже выполняются соотношения типа (6) и (7). Поэтому $\tilde{f}_\varepsilon(u, v) \in D^{\nu,\mu} W_1^{\sigma_1,\sigma_2}$ и

$$
\left| \int\limits_0^1 K_1^{(\nu,0)}(x_0, u)\, f^{(\sigma_1,\mu)}(u, y_0) - K_1^{(\nu,0)}(x_0, u_0) \right| = \left| \int\limits_{u_0}^{u_0+\delta} K_1^{(\nu,0)}(x_0, u)\, \tilde{g}_0(u)\, du - \right.
$$

$$
\left. - \int\limits_{u_0}^{u_0+\delta} K_1^{(\nu,0)}(x_0, u_0)\, \tilde{g}_0(u)\, du \right| \leqslant 1/\delta \int\limits_{u_0}^{u_0+\delta} \left| K_1^{(\nu,0)}(x_0, u) - K_1^{(\nu,0)}(x_0, u_0) \right| du < \varepsilon.
$$

Следовательно, левая часть равенства (2) для функции $f(x, y) = \tilde{f}_\varepsilon(x, y)$ в точке (x_0, y_0) больше величины $\alpha + \beta + \alpha\beta - 2\varepsilon - \varepsilon^2$, а так как $\alpha < \| K_1^{(\nu,0)}(x_0, \cdot)\|_\infty$, $\beta < \| K_2^{(\mu,0)}(y_0, \cdot)\|_\infty$ и $\varepsilon > 0$ — произвольные числа, то равенство (3) имеет место и в случае $p = 1$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если выполняются условия теоремы* 1, *то*

$$\sup_{f\in D^{\nu,\mu}W_p^{\sigma_1,\sigma_2}} \| G^{\nu,\mu}(f)\|_\infty = \sup_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1}} \operatorname{vrai} \| K_1^{(\nu,0)}(x,\cdot)\|_q \| K_2^{(\mu,0)}(y,\cdot)\|_q +$$

$$+\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\operatorname{vrai} \| K_1^{(\nu,0)}(x,\cdot)\|_q + \sup_{0\leqslant y\leqslant 1}\operatorname{vrai} \| K_2^{(\mu,0)}(y,\cdot)\|_q. \tag{8}$$

Пусть

$$C^{\sigma_1,\sigma_2} = \{f : f^{(\nu,\mu)} \in C(I),\quad 0\leqslant\nu\leqslant\sigma_1,\quad 0\leqslant\mu\leqslant\sigma_2\}.$$

Поскольку класс непрерывных функций на компакте [0, 1] в пространстве $L_p[0, 1]$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, всюду плотен, то можем сформулировать следующее следствие.

Следствие 2. *Теорема* 1 *и следствие* 1 *остаются в силе, если в левых частях равенств* (3) *и* (8) *класс* $D^{\nu,\mu}W_p^{\sigma_1,\sigma_2}$ *заменить классом* $C^{\sigma_1,\sigma_2}\cap D^{\nu,\mu}W_p^{\sigma_1\sigma_2}$.

Теорема 1 и следствия из нее дают возможность сразу указать точную оценку погрешности на классе функций через нормы ядер и в том случае, когда одномерные оценки подсчитаны точно, сразу получить точную эффективную оценку и в двумерном случае.

Рассмотрим несколько частных ситуаций.

1. Приближение двумерными локальными сплайнами минимального дефекта. Пусть $f: I\to R^1$. При фиксированных точках x_0, y_0 из [0, 1] через f_{x_0} и f_{y_0} обозначим следующие функции вещественной переменной: $f_{x_0}(y) = f(x_0, y)$, $0\leqslant y\leqslant 1$, $f_{y_0}(x) = f(x, y_0)$, $0\leqslant x\leqslant 1$. Для натуральных N и M пусть $x_n = n/N$ и $y_m = m/M$, $n, m = 0, \pm 1, \ldots$. Через S_N^r и S_M^l обозначим пространства полиномиальных сплайнов степени r дефекта 1 с узлами $\{x_n\}_{n=1}^{N-1}$ и степени l дефекта 1 с узлами $\{y_m\}_{m=1}^{M-1}$ соответственно. В зависимости от четности или нечетности чисел r и l определим следующие точки:

$$\overline{x}_n = \begin{cases} x_n, & r \text{ нечетно},\\ (x_{n-1}+x_n)/2, & r \text{ четно};\end{cases}\qquad \overline{y}_m = \begin{cases} y_m, & l \text{ нечетно},\\ (y_{m-1}+y_m)/2, & l \text{ четно}.\end{cases}$$

В пространствах S_N^r и S_M^l выберем системы B-сплайнов $B_n^r(x)$ и $B_m^l(y)$, удовлетворяющие условиям $\max\limits_x B_n^r(x) = B_n^r(\overline{x}_n)$, $\sum\limits_n B_n^r(x)\equiv 1$, $\max\limits_y B_m^l(y) = B_m^l(\overline{y}_m)$, $\sum\limits_m B_m^l(y)\equiv 1$. Функции $B_{n,m}^{r,l}(x, y) = B_n^r(x)\, B_m^l(y)$ образуют локальный базис в пространстве двумерных сплайнов $S_{N,M}^{r,l}$: $S_{N,M}^{r,l} = \{s(x, y) : s_{y_0}(x)\in S_N^r,\ s_{x_0}(y)\in S_M^l\}$.

Через $R = [a, b]\times[c, d]$ обозначим наименьший прямоугольник, содержащий носители всех тех B-сплайнов, которые не обращаются в нуль на I. Пусть r' и l' — целые части чисел $r/2$ и $l/2$ соответственно. Функцию $f\in L_p^{\sigma_1+1,\sigma_2+1}(I)$ продолжим на R, полагая

$$f^{(\sigma_1+1,0)}(x, y) = 0,\quad f^{(0,\sigma_2+1)}(x, y) = 0,\quad f^{(\sigma_1+1,\sigma_2+1)}(x, y) = 0,\quad (x, y)\in R\,|\,I,$$

и поставим ей в соответствие следующий сплайн из $S_{N,M}^{r,l}$:

$$s_{r,l}(f, x, y) = \sum_n\sum_m\sum_{i=-r'}^{r'}\sum_{j=-l'}^{l'} \gamma_{i,j} f(\overline{x}_{n+i}, \overline{y}_{m+j})\, B_{n,m}^{r,l}(x, y). \tag{9}$$

Известно [1, 2], что существует единственный набор коэффициентов $\{\alpha_i\}_{i=-r'}^{r'}$ и $\{\beta_j\}_{j=-l'}^{l'}$ таких, что формулы

$$s_r(f_{y_0}, x) = \sum_n\sum_{i=-r'}^{r'} \alpha_i f_{y_0}(\overline{x}_{n+i})\, B_n^r(x),$$

$$s_l(f_{x_0}, y) = \sum_m\sum_{j=-l'}^{l'} \beta_j f_{x_0}(\overline{y}_{m+j})\, B_m^l(y)$$

будут точными для многочленов степени r и l соответственно. Если в (9) положить $\gamma_{i,j}=\alpha_i\beta_j$, $i=-r',\dots,r'$; $j=-l',\dots,l'$, то она будет точной для всех многочленов $p_{r,l}(x,y)$ степени r по переменной x и степени l по переменной y. Из интегрального представления функции $f\in L_1^{\sigma_1+1,\sigma_2+1}(R)$, $\sigma_1\leqslant r$, $\sigma_2\leqslant l$, где в качестве ядер выступают усеченные функции $(x-u)_+^{\sigma_1}$, $(y-v)_+^{\sigma_2}$ [3], с. 247, и из точности формулы (9) для многочленов $p_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)$ следует, что при $0\leqslant\nu\leqslant\sigma_1-2$, $0\leqslant\mu\leqslant\sigma_2-2$

$$f^{(\nu,\mu)}(x,y)-s_{r,l}^{(\nu,\mu)}(f,x,y)=-\int_0^1\int_0^1 K_{r,\sigma_1}^{(\nu,0)}(x,u)\,K_{l,\sigma_2}^{(\mu,0)}(y,v)\,f^{(\sigma_1+1,\sigma_2+1)}(u,v)\times$$

$$\times\,du\,dv+\int_0^1 K_{r,\sigma_1}^{(\nu,0)}(x,u)\,f^{(\sigma_1+1,\mu)}(u,y)\,du+\int_0^1 K_{l,\sigma_2}^{(\mu,0)}(y,v)\,f^{(\nu,\sigma_2+1)}(x,v)\,dv,$$

где

$$K_{r,\sigma_1}(x,u)=1/\sigma_1!\left[(x-u)_+^{\sigma_1}-\sum_n\sum_{i=-r'}^{r'}\alpha_i(\bar{x}_{n+i}-u)_+^{\sigma_1}B_n^r(x),\right.$$

$$K_{l,\sigma_2}(y,v)=1/\sigma_2!\left[(y-v)_+^{\sigma_2}-\sum_m\sum_{j=-l'}^{l'}\beta_j(\bar{y}_{m+j}-v)_+^{\sigma_2}B_m^l(y).\right.$$

Теорема 2. *Если локальный сплайн $s_{r,l}(f,x,y)$ определяется по формуле (9), то при любых $r,\ l=2,3,\dots,\ \sigma_1\leqslant r,\ \sigma_2\leqslant l,\ 0\leqslant\nu\leqslant\sigma_1-2,\ 0\leqslant\mu\leqslant\sigma_2-2$ и для любого $1\leqslant p\leqslant\infty$ справедливы равенства*

$$\sup_{f\in D^{\nu,\mu}W_p^{\sigma_1+1,\sigma_2+1}}|f^{(\nu,\mu)}(x,y)-s_{r,l}^{(\nu,\mu)}(f,x,y)=\|K_{r,\sigma_1}^{(\nu,0)}(x,\cdot)\|_q\|K_{l,\sigma_2}^{(\mu,0)}(y,\cdot)\|_q+$$

$$+\|K_{r,\sigma_1}^{(\nu,0)}(x,\cdot)\|_q+\|K_{l,\sigma_2}^{(\mu,0)}(y,\cdot)\|_q,\quad q=p/(p-1),\qquad \sup_{f\in D^{\nu,\mu}W_p^{\sigma_1+1,\sigma_2+1}}\|f^{(\nu,\mu)}-$$

$$-s_{r,l}^{(\nu,\mu)}(f)\|_\infty=\max_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}}\|K_{r,\sigma_1}^{(\nu,0)}(x,\cdot)\|_q\|K_{l,\sigma_2}^{(\mu,0)}(y,\cdot)\|_q+\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\|K_{r,\sigma_1}^{(\nu,0)}(x,\cdot)\|_q+$$

$$+\max_{0\leqslant y\leqslant 1}\|K_{l,\sigma_2}^{(\mu,0)}(y,\cdot)\|_q,\quad q=p/(p-1).$$

Пример. В [4] получены следующие значения для

$$\alpha_{r,\sigma_1,p,\nu}=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\|K_{r,\sigma_1}^{(\nu,0)}(x,\cdot)\|_q:\alpha_{2,2,\infty,0}=3/64N^3,\quad \alpha_{2,2,1,0}=9/128N^2,$$

$$\alpha_{3,3,\infty,0}=35/1152N^4,\quad \alpha_{3,3,1,0}=185/6912N^4,\quad \alpha_{3,2,1,0}=185/3456N^3.$$

Величины $\max_{0\leqslant y\leqslant 1}\|K_{l,\sigma_2}^{(\mu,0)}(y,\cdot)\|_q$ отличаются от этих значений тем, что вместо N нужно писать M. В силу теоремы 2 можно указать точные двумерные оценки, соответствующие этим одномерным случаям.

2. Интерполяция функции двумерными эрмитовыми сплайнами. Пусть $f:I\to R^1$ и $E\subset I$. Через $f|_E$ обозначим функцию, определенную на E следующим образом: $f|_E(x)=f(x)$, $x\in E$. Пусть $\pi_{r,l}$ — множество всех многочленов $p_{r,l}(x,y)$ степени r по переменной x и степени l по переменной y, $\Delta_1:0=x_0<x_1<\dots<x_N=1$, $h_i=x_i-x_{i-1}$, $h=\max_{1\leqslant i\leqslant N}h_i$, $\Delta_2:0=y_0<y_1\dots<y_M=1$, $d_j=y_j-y_{j-1}$, $d=\max_{1\leqslant j\leqslant M}d_j$, $\Delta=\Delta_1\times\Delta_2$ и $\Delta_{i,j}=\{(x,y)\in I,\ x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i,\ y_{j-1}\leqslant y\leqslant y_j\}$. Множество $H_{r,l}(\Delta)$- двумерных эрмитовых сплайнов определяется следующим образом: $H_{r,l}(\Delta)=\{f:f\in C^{r,l}(I),\ f|_{\Delta_{i,j}}\in\pi_{2r+1,\ 2l+1}\}$.

Функция $\sigma_{r,l}(f,x,y)\in H_{r,l}(\Delta)$ называется двумерным интерполяционным сплайном Эрмита для функции $f\in C^{r,l}(I)$, если функции $D^{\nu,\mu}[f-\sigma_{r,l}(f)]$, $0\leqslant\nu\leqslant r$, $0\leqslant\mu\leqslant l$, в вершинах прямоугольников $\Delta_{i,j}$, $1\leqslant i\leqslant N$, $1\leqslant j\leqslant M$, принимают нулевые значения.

Т е о р е м а 3. *Если* $\sigma_{r,l}(f, x, y) \in H_{r,l}(\Delta)$ — *интерполяционный сплайн Эрмита для функции* $f \in L_p^{\sigma_1, \sigma_2}$, $r < \sigma_1 \leqslant 2r+2$, $l < \sigma_2 \leqslant 2l+2$, *то при любых* $r, l = 1, 2, \ldots, 0 \leqslant \nu \leqslant \sigma_1 - 2$, $0 \leqslant \mu \leqslant \sigma_2 - 2$ *и для любого* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *справедливы равенства*

$$\sup_{f \in D^{\nu,\mu} W_p^{\sigma_2,\sigma_2}} | f^{(\nu,\mu)}(x, y) - \sigma_{r,l}^{(\nu,\mu)}(f, x, y) | = h_i^{\sigma_1-\nu+1/p} d_j^{\sigma_2-\mu+1/p} \| Q_{r,\sigma_1}^{(\nu,0)}(x, \cdot) \|_q \| Q_{l,\sigma_2}^{(\mu,0)}(y, \cdot) \|_q + h_i^{\sigma_1-\nu+1/p} \| Q_{r,\sigma_1}^{(\nu,0)}(x, \cdot) \|_q + d_j^{\sigma_2-\mu+1/p} \| Q_{l,\sigma_2}^{(\mu,0)}(y, \cdot) \|_q, \quad (x, y) \in \Delta_{i,j},$$

$$\sup_{f \in D^{\nu,\mu} W_p^{\sigma_1,\sigma_2}} \| f^{(\nu,\mu)} - \sigma_{r,l}^{(\nu,\mu)}(f) \|_\infty = h^{\sigma_1-\nu+1/p} d^{\sigma_2-\mu+1/p} \max_{\substack{0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1}} \| Q_{r,\sigma_1}^{(\nu,0)}(x, \cdot) \|_q \times \| Q_{l,\sigma_2}^{(\mu,0)}(y, \cdot) \|_q + h^{\sigma_1-\nu+1/p} \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \| Q_{r,\sigma_1}^{(\nu,0)}(x, \cdot) \|_q + d^{\sigma_2-\mu+1/p} \max_{0 \leqslant y \leqslant 1} \| Q_{l,\sigma_2}^{(\mu,0)}(y, \cdot) \|_q, \quad q = p/(p-1),$$

где $Q_{r,\sigma_1}(x, u)$ и $Q_{l,\sigma_2}(y, v)$ — погрешности приближения одномерными эрмитовыми сплайнами на отрезке $[0,1]$ для разбиений $\Delta_1 = \{0, 1\}$, $\Delta_2 = \{0, 1\}$ соответственно функций $(x-u)_+^{\sigma_1}/\sigma_1!$ и $(y-v)_+^{\sigma_2}/\sigma_2!$ при фиксированных u и v.

Используя одномерные равенства из работ [5 и 6], можем написать соответствующие точные оценки с числовыми константами и в двумерном случае.

Точные оценки погрешностей при приближении функции интерполяционными сплайнами и многочленами Лагранжа в двумерном случае можно получить аналогичным образом, используя теорему 1.

1. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций.— М.: Наука, 1980.— 352 с.
2. *Lych T., Schumaker L. L.* Local spline approximation methods.— J. Appr. Th., 1975, 15, N 4, p. 294—325.
3. *Birkhoff G., Schultz M. H., Varga R. S.* Piecewise Hermite interpolation in on and two variables with applications to partial differential equations.— Numer. Math., 1968, 11, N 3, p. 232—256.
4. *Корнейчук Н. П.* О приближении локальными сплайнами минимального дефекта. — Укр. мат. журн., 1982, 34, № 5, с. 617—621.
5. *Ciarlet P. G., Schultz M. N., Varga R. S.* Numerical methods of high-order accuracy for nonlinear boundary value problems. I. One dimentional problem. — Numer. Math, 1967, 9, p. 394—430.
6. *Великин В. Л.* Точные значения приближения эрмитовыми сплайнами на классах дифференцируемых функций.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1973, 37, с. 165—185.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
22.06.82