УДК 517.5

С. Б. Вакарчук

О приближении кривых, заданных в параметрическом виде, при помощи сплайн-кривых

1. В настоящей работе рассматривается вопрос о точной оценке погрешности приближения кривых, лежащих в евклидовом пространстве размерности m, параметрическими эрмитовыми сплайнами нечетного порядка в хаусдорфовой метрике.

Вопрос о приближении параметрически заданных кривых сплайн-кривыми рассматривался в ряде работ, например в [1]—[4], [8], [9]. Точные оценки отклонения кривых от параметрических эрмитовых сплайнов в хаусдорфовой метрике найдены в [3], [4], [9]. В остальных известных нам работах получены порядковые оценки погрешности приближения.

Как обычно, через $C^{(r)}(\Delta)$, $\Delta=[a, b]$, обозначим класс функций $f(t)$, имеющих на отрезке Δ непрерывные производные вплоть до порядка r.

Пусть $\mathfrak{M}_m^{2p+1}(\Delta)$, $p=0, 1, \ldots,$ — множество спрямляемых кривых γ, лежащих в евклидовом пространстве размерности m, заданных параметрическими уравнениями $x_k=\varphi_k(t)$, $t\in\Delta$, $k=1, \ldots, m$, и таких, что $\varphi_k(t)\in C^{(2p+1)}(\Delta)$, $k=1, \ldots, m$.

На отрезке Δ зафиксируем произвольное разбиение $\delta_n: a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$ и положим $\Delta t_i=t_{i+1}-t_i$, $i=0, 1, \ldots, n-1$. Кривой $\gamma\in\mathfrak{M}_m^{2p+1}(\Delta)$ поставим в соответствие сплайн-кривую $\sigma(\gamma)$, которая на каждом участке $\Delta_i=[t_i, t_{i+1}]$, $i=0, 1, \ldots, n-1$, задается уравнениями

$$\sigma(\varphi_k; t)=\sum_{q=0}^{1}\sum_{j=0}^{p}\varphi_k^{(j)}(t_{i+q})(-1)^{jq}H_{j,p}[\Delta t_i; q\Delta t_i+(-1)^q(t-t_i)],$$
$$k=1, \ldots, m,$$

где [5]

$$H_{j,p}[\Delta t; t]=(\Delta t-t)^{p+1}(j!\,p!)^{-1}\sum_{\eta=0}^{p-j}(p+\eta)!\,t^{j+\eta}/[\eta!\,(\Delta t)^{p+\eta+1}],\quad t\in[0, \Delta t].$$

Через $\omega(f; \varepsilon)$, где $\varepsilon\geqslant 0$, обозначим модуль непрерывности функции $f(t)\in C(\Delta)$, т. е.

$$\omega(f; \varepsilon)=\sup_{|t_1-t_2|\leqslant\varepsilon}|f(t_1)-f(t_2)|.$$

Напомним (см., например, [1]), что хаусдорфовым расстоянием между ограниченными и замкнутыми точечными множествами P и Q называют число $R_H(P; Q)=\max\{\max_{A\in P}\min_{B\in Q}\rho(A; B); \max_{A\in Q}\min_{B\in P}\rho(A; B)\}$. Здесь $\rho(A; B)$ — некоторое расстояние между точками A и B. В качестве $\rho(A; B)$ будем брать евклидово расстояние $\rho_e(A; B)$, где

$$\rho_e(A; B)=\rho_e(A(x_1, \ldots, x_m); B(x_1', \ldots, x_m'))=\left[\sum_{k=1}^{m}(x_k-x_k')^2\right]^{1/2}.$$

Отношение % полагаем равным нулю.

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$\sup_{\gamma\in\mathfrak{M}_m^{2p+1}(\Delta)}R_H(\gamma; \sigma(\gamma))/\left\{\sum_{k=1}^{m}\left[\int_0^{|\delta_n|}(|\delta_n|-t)^{2p}\omega(\varphi_k^{(2p+1)}; t)\,dt\right]^2\right\}^{1/2}=4^{p+1}(2p)!]^{-1},$$

где $|\delta_n|=\max_i\Delta t_i$.

Доказательство. Пусть кривая $\gamma\in\mathfrak{M}_m^{2p+1}(\Delta)$. Обозначим через $\rho_e(t)$ евклидово расстояние между точками $A\in\gamma$ и $B\in\sigma(\gamma)$, соответствующими одному и тому же значению параметра $t\in\Delta$. Из определения хаусдорфова расстояния следует, что

$$R_H(\gamma; \sigma(\gamma))\leqslant\max_{t\in\Delta}\rho_e(t). \tag{1}$$

Разложив каждую из координатных функций $\varphi_k(t)$, $k=1, \ldots, m$, кривой γ по интерполяционной формуле Ньютона, получим

$$\rho_e(t)=\beta_i^{p+1}(t)\left[\sum_{k=1}^{m}\varphi_k^2(\underbrace{t_i, \ldots, t_i}_{p+1}, \underbrace{t_{i+1}, \ldots t_{i+1}}_{p+1}, t)\right]^{1/2},\quad t\in\Delta_i,\quad i=0, 1, \ldots, n-1,$$

где $\beta_i(t)=-t^2+(t_i+t_{i+1})t-t_it_{i+1}$, $\varphi_k(\underbrace{t_i, \ldots, t_i}_{p+1}, \underbrace{t_{i+1}, \ldots, t_{i+1}}_{p+1}, t)$ — разделенная разность порядка $2p+2$ функции $\varphi_k(t)$.

Воспользуемся определением модуля непрерывности, предварительно понизив порядок разделенных разностей на единицу и записав их в интегральной форме [6]

$$\rho_e(t) \leqslant [(2p)!\,(\Delta t_i)^{2p+2}]^{-1} \beta_i^{p+1}(t) \left\{ \sum_{k=1}^{m} \left[\int_0^{\Delta t_i} (\Delta t_i - u)^{2p} \omega(\varphi_k^{(2p+1)}; u)\, du \right]^2 \right\}^{1/2},$$

$$t \in \Delta_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Отсюда и из (1) следует, что

$$R_H(\gamma; \sigma(\gamma)) \leqslant [4^{p+1}(2p)!]^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \left[\int_0^{|\delta_n|} (|\delta_n| - u)^{2p} \omega(\varphi_k^{(2p+1)}; u)\, du \right]^2 \right\}^{1/2}.$$

Пусть $t_{i^*+1} = t_{i^*} + |\delta_n|$. Рассмотрим, например, кривую $\gamma \in \mathfrak{M}_m^{2p+1}(\Delta)$, заданную уравнениями

$$x_1 = \tilde{\varphi}_1(t) = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{2p+1} [\beta_{i^*}^{p+1}(t_{i^*})]^{(j)} (t - t_{i^*})^j, & d \leqslant t \leqslant t_{i^*}, \\ \beta_{i^*}^{p+1}(t), & t_{i^*} \leqslant t \leqslant t_{i^*+1}, \\ \sum\limits_{j=0}^{2p+1} [\beta_{i^*}^{p+1}(t_{i^*+1})]^{(j)} (t - t_{i^*+1})^j, & t_{i^*+1} \leqslant t \leqslant b, \end{cases}$$

$$x_k = \tilde{\varphi}_k(t) = t, \quad k = 2, \ldots, m.$$

Взяв точки $A((|\delta_n|/2)^{2p+2}, t_{i^*+1/2}, \ldots, t_{i^*+1/2}) \in \tilde{\gamma}$ и $B(0, t_{i^*+1/2}, \ldots, t_{i^*+1/2}) \in \in \sigma(\tilde{\gamma})$, где $t_{i^*+1/2} = t_{i^*} + |\delta_n|/2$, и используя определение хаусдорфова расстояния, запишем

$$[4^{p+1}(2p)!]^{-1} \geqslant \sup_{\gamma \in \mathfrak{M}_m^{2p+1}(\Delta)} R_H(\gamma; \sigma(\gamma)) / \left\{ \sum_{k=1}^{m} \left[\int_0^{|\delta_n|} (|\delta_n| - u)^{2p} \omega(\varphi_k^{(2p+1)}; u) du \right]^2 \right\}^{1/2} \geqslant$$

$$\geqslant R_H(\tilde{\gamma}; \sigma(\tilde{\gamma})) / \left\{ \sum_{k=1}^{m} \left[\int_0^{|\delta_n|} (|\delta_n| - u)^{2p} \omega(\tilde{\varphi}_k^{(2p+1)}; u)\, du \right]^2 \right\}^{1/2} \geqslant$$

$$\geqslant \min_{Q \in \sigma(\tilde{\gamma})} \rho_e(A; Q) / \left[(2p+2)! \int_0^{|\delta_n|} (|\delta_n| - u)^{2p} u\,du \right] \geqslant \rho_e(A; B) / [(2p)!\,(|\delta_n|)^{2p+2}] =$$

$$= [4^{p+1}(2p)!]^{-1}.$$

Теорема доказана.

2. Рассмотрим вопрос о приближении плоских спрямляемых кривых, отнесенных к длине дуги s как параметру, вписанными в них ломаными.

Обозначим через $\tilde{\mathfrak{M}}$ множество плоских спрямляемых кривых $\gamma: \{x_k = \varphi_k(s)\ (k = 1, 2) \mid 0 \leqslant s \leqslant L(\gamma)$ — длина всей кривой $\gamma\}$, имеющих непрерывную кривизну $k(\gamma; s)$, $k(\gamma; s) \geqslant 0$.

Разобьем $\gamma \in \tilde{\mathfrak{M}}$ точками $P_j(x_{1,j}; x_{2,j})$, где $x_{k,j} = \varphi_k(s_j)$, $k = 1, 2$; $j = 0, 1, \ldots, q$; $s_0 = 0$; $s_q = L(\gamma)$, так, чтобы на каждом участке $\widetilde{P_j P_{j+1}} \subset \gamma$, $j = 0, 1, \ldots, q-1$, выполнялось условие

$$k(\gamma; j) = \max_{s_j \leqslant s \leqslant s_{j+1}} k(\gamma; s) \leqslant \pi / \Delta s_j, \tag{2}$$

где $\Delta s_j = s_{j+1} - s_j$, $\pi = 3{,}14\ldots$. Соединив последовательно точки $P_0, P_1, \ldots$ $\ldots, P_q$ отрезками прямых, получим ломаную $l(\gamma)$, вписанную в γ. Параметрические уравнения звена ломаной, соединяющего точки P_j и P_{j+1}, $j = 0, 1, \ldots, q-1$, имеют вид $l(\varphi_k; s) = x_{k,j} + (x_{k,j+1} - x_{k,j})(s - s_j)/\Delta s_j$, $k = 1, 2$; $s_j \leqslant s \leqslant s_{j+1}$.

Известно [7], с. 105, что кривую γ можно записать параметрическими уравнениями

$$x_1 = \varphi_1(s) = \int_0^s \cos\alpha(s)\,ds + x_{1,0}, \tag{3}$$

$$x_2 = \varphi_2(s) = \int_0^s \sin\alpha(s)\,ds + x_{2,0}, \quad 0 \leqslant s \leqslant L(\gamma). \tag{4}$$

Здесь $(x_{1,0}; x_{2,0})$ — координаты начальной точки кривой γ, $\alpha(s) = \int_0^s k(\gamma; s)\,ds + \alpha_0(\gamma)$, $\alpha_0(\gamma)$ — угол между касательной и кривой γ в точке $P(x_{1,0}; x_{2,0})$ и положительным направлением оси OX_1.

Теорема 2. *Для любой кривой $\gamma \in \widetilde{\mathfrak{M}}$ при выполнении условия* (2) *справедливо неравенство*

$$R_H(\gamma; l(\gamma)) \leqslant 2 \max_j k^{-1}(\gamma; j) \sin^2[k(\gamma; j)\,\Delta s_j/4]. \tag{5}$$

Эта оценка неулучшаема в том смысле, что существует кривая $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{\mathfrak{M}}$, обращающая (5) *в равенство.*

Доказательство. Используя формулы (3)—(4) и рассуждая так же, как в [8], можно получить оценку сверху для $R_H(\gamma;, l(\gamma))$. Покажем ее неулучшаемость. Для этого рассмотрим кривую $\widetilde{\gamma}: \{x_1 = r\cos(s/r),\ x_2 = r\sin(s/r)\}$ — дугу окружности радиуса r, где $0 \leqslant s \leqslant L(\widetilde{\gamma}) = \pi r$, и разобьем $\widetilde{\gamma}$ на q частей. Для каждой из них условие (2) будет выполнено.

Пусть длина j^*-го участка, $0 \leqslant j^* \leqslant q - 1$, отсекаемого на $\widetilde{\gamma}$ точками $P_{j^*}(r\cos(s_{j^*}/r), r\sin(s_{j^*}/r))$ и $P_{j^*+1}(r\cos(s_{j^*+1}/r),\ r\sin(s_{j^*+1}/r))$, будет наибольшей. Возьмем точки $P(r\cos[(s_{j^*} + s_{j^*+1})/2r],\ r\sin[(s_{j^*} + s_{j^*+1})/2r]) \in \widetilde{\gamma}$ и $Q(r\cos[(s_{j^*} + s_{j^*+1})/2r]\cos(\Delta s_{j^*}/2r),\ r\sin[(s_{j^*} + s_{j^*+1})/2r]\cos(\Delta s_{j^*}/2r)) \in l(\widetilde{\gamma})$.

Из определения хаусдорфова расстояния следует, что

$$R_H(\widetilde{\gamma}; l(\widetilde{\gamma})) \geqslant \max_{F\in\widetilde{\gamma}} \min_{G\in l(\widetilde{\gamma})} \rho_e(F; G) \geqslant \min_{G\in l(\widetilde{\gamma})} \rho_e(P; G) = \rho_e(P; Q) =$$

$$= 2r\sin^2(\Delta s_{j^*}/4r).$$

Но, с другой стороны, как следует из (5), $R_H(\widetilde{\gamma}; l(\widetilde{\gamma})) \leqslant 2r\sin^2(\Delta s_{j^*}/4r)$.

Теорема доказана.

1 *Сендов Бл.* Хаусдорфовые приближения.— София: Изд-во Болгарской Академии Наук, 1979.— 372 с.
2. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций.— М.: Наука, 1980. — 352 с.
3. *Назаренко Н. А.* О приближении плоских кривых параметрическими эрмитовыми сплайнами.— Укр. мат. журн., 1979, 31, № 2, с. 201—205.
4. *Мартынюк В. Т.* О приближении ломаными кривых, заданных параметрическими уравнениями, в хаусдорфовой метрике.— Укр. мат. журн., 1976, 28, № 1, с. 87—92.
5. *Великин В. Л.* Точные значения приближения эрмитовыми сплайнами на классах дифференцируемых функций.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1973, 37, № 1, с. 165—185.
6. *Микеладзе Ш. Е.* Численные методы математического анализа.— М.: Гостехиздат, 1953.— 527 с.
7. *Фиников С. П.* Курс дифференциальной геометрии.— М.: Гостехиздат, 1952.— 343 с.
8. *Вакарчук С. Б.* О приближении плоских параметрически заданных кривых ломаными.— В кн.: Моногенные функции и отображения. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1982, с. 107—113.
9. *Назаренко Н. А.* О локальном восстановлении кривых с помощью параметрических сплайнов.— В кн.: Геометрическая теория функций и топология. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1981, с. 55— 5?.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию 01.12.1981 г.;
после переработки — 21.06.1982 г.