УДК 517.518:519.652

М. М. Пагіря, Т. С. Свида (Ужгород. нац. ун-т)

ЗАДАЧА ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ФУНКЦІЙ ДВОВИМІРНИМИ ЛАНЦЮГОВИМИ ДРОБАМИ

The problem of the interpolation of functions of two real variables by two-dimensional continued fractions is investigated.

Досліджується задача інтерполяції функцій двох дійсних змінних двовимірними ланцюговими дробами.

Вступ. Задачу інтерполяції функцій двох дійсних змінних двовимірними ланцюговими дробами вивчали Х. Й. Кучмінська [1] та А. Коут [2]. Подальші дослідження були проведені в роботах [3 – 6], де, зокрема, запропоновано дещо інший алгоритм обчислення коефіцієнтів інтерполяційного двовимірного ланцюгового дробу та поширено методику на задачу інтерполяції функцій трьох дійсних змінних тривимірними ланцюговими дробами. Інші типи інтерполяційних двовимірних ланцюгових дробів розглянуто в роботах [7 – 9]. Дана робота є продовженням досліджень, розпочатих у [9].

Двовимірні інтерполяційні ланцюгові дроби. Розглянемо функціональний двовимірний ланцюговий дріб (ДЛД) вигляду

$$D(x,y) = \Phi_0(x,y) + \mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{\infty} \frac{a_{ii}(x,y)}{\Phi_i(x,y)}, \tag{1}$$

де

$$\Phi_i(x,y) = b_{ii}(x,y) + \mathop{\mathrm{K}}_{j=i+1}^{\infty} \frac{a_{ji}(x,y)}{b_{ji}(x,y)} + \mathop{\mathrm{K}}_{j=i+1}^{\infty} \frac{a_{ij}(x,y)}{b_{ij}(x,y)}, \quad i = 0,1,\ldots,$$

$a_{ij}(x,y) \not\equiv 0$, $b_{ij}(x,y)$ — функції двох змінних.

Означення 1. *Скінченний функціональний двовимірний ланцюговий дріб*

$$D_{(n_x,n_y)}(x,y) = \Phi_0^{(n_x,n_y)}(x,y) + \mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{n} \frac{a_{ii}(x,y)}{\Phi_i^{(n_x,n_y)}(x,y)}, \quad n = \min\{n_x, n_y\}, \tag{2}$$

де

$$\Phi_i^{(n_x,n_y)}(x,y) = b_{ii}(x,y) + \mathop{\mathrm{K}}_{j=i+1}^{n_x} \frac{a_{ji}(x,y)}{b_{ji}(x,y)} + \mathop{\mathrm{K}}_{j=i+1}^{n_y} \frac{a_{ij}(x,y)}{b_{ij}(x,y)}, \quad i = 0,1,\ldots,n,$$

називається (n_x, n_y)*-підхідним дробом ДЛД* (1).

Далі вважаємо, що $\mathop{\mathrm{K}}_{s=r}^{t} \frac{a_s}{b_s} = 0$, якщо $r > t$. Позначимо $n_{xy} = (n_x, n_y)$.

Використавши аналог оберненого рекурентного алгоритму [4, 5], запишемо ДЛД (2) у вигляді $D_{n_{xy}}(x,y) = \dfrac{P_{n_{xy}}(x,y)}{Q_{n_{xy}}(x,y)}$, де $P_{n_{xy}}(x,y)$ — чисельник і $Q_{n_{xy}}(x,y)$ — знаменник підхідного дробу (2).

Формула різниці підхідних дробів. Використовуючи методику з [10], можна встановити формулу різниці між підхідними дробами. Позначимо залишок, хвіст ДЛД (2), через

$$Q_k^{n_{xy}} = \Phi_k^{n_{xy}}(x,y) + \mathop{\mathrm{K}}_{i=k+1}^{n} \frac{a_{ii}(x,y)}{\Phi_i^{n_{xy}}(x,y)}, \quad k = 0,\ldots,n-1, \qquad Q_n^{n_{xy}} = \Phi_n^{n_{xy}}(x,y). \tag{3}$$

Нехай $n_{xy}+1 = (n_x+1, n_y+1)$. Тоді

$$D_{n_{xy}+1} - D_{n_{xy}} = \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{(-1)^{n_x+1} \prod_{j=m+1}^{n_x+1} a_{jm}}{Q_{n_x,m}\, Q_{n_x+1,m}} + \frac{(-1)^{n_y+1} \prod_{j=m+1}^{n_y+1} a_{mj}}{Q_{m,n_y}\, Q_{m,n_y+1}} \right) \times$$
$$\times \prod_{s=1}^{m} \frac{a_{ss}}{Q_s^{n_{xy}}\, Q_s^{n_{xy}+1}} + \frac{(-1)^n \prod_{s=1}^{n+1} a_{ss}}{Q_{n+1}^{n_{xy}+1} \prod_{s=1}^{n} Q_s^{n_{xy}}\, Q_s^{n_{xy}+1}}, \tag{4}$$

де $Q_{n_x,m}$ — знаменник ланцюгового дробу $\mathop{\mathrm{K}}_{i=m+1}^{n_x} \frac{a_{im}}{b_{im}}$, Q_{m,n_y} — знаменник ланцюгового дробу $\mathop{\mathrm{K}}_{i=m+1}^{n_y} \frac{a_{mi}}{b_{mi}}$ (аналогічно $Q_{n_x+1,m}$ і Q_{m,n_y+1}).

Формула залишкового члена двовимірного інтерполяційного ланцюгового дробу. Нехай функція двох змінних $f(x,y)$ неперервна разом із своїми частинними похідними до (k_x+1)-го порядку за змінною x і до (k_y+1)-го порядку за змінною y на множині $G = [\alpha_x, \beta_x] \times [\alpha_y, \beta_y]$.

Виберемо розбиття $X = \{x_i : x_i \in [\alpha_x, \beta_x], x_i \neq x_l$ при $i \neq l, i, l = 0,1,\ldots,k_x\}$ та $Y = \{y_j : y_j \in [\alpha_y, \beta_y], y_j \neq y_l$ при $j \neq l, j, l = 0,1,\ldots,k_y\}$. Декартів добуток цих множин $G_{k_{xy}} = X \times Y = \{(x_i, y_j) : x_i \in X, y_j \in Y\}$ утворює сітку вузлів у множині G. Нехай маємо функціональний ДЛД (2), де $n_x = n_x(k_x)$, $n_y = n_y(k_y)$.

Означення 2. *Скінченний функціональний двовимірний ланцюговий дріб* (2) *називається двовимірним інтерполяційним ланцюговим дробом* (*ДІЛД*), *якщо в точках сітки $G_{k_{xy}}$ виконуються співвідношення*

$$D_{n_{xy}}(x_i, y_j) = c_{ij}, \tag{5}$$

де $c_{ij} = f(x_i, y_j)$, $i = 0,1,\ldots,k_x$, $j = 0,1,\ldots,k_y$.

Якщо ДЛД (2) є інтерполяційним, то різниця $R_{n_{xy}}(x,y) = f(x,y) - \dfrac{P_{n_{xy}}(x,y)}{Q_{n_{xy}}(x,y)}$ називається залишковим членом ДІЛД. Будемо вважати, що частинні чисельники $a_{ij}(x,y)$ та частинні знаменники $b_{ij}(x,y)$ — многочлени. Використовуючи теорему 1 з роботи В. Гауссмана [11], можна довести наступне твердження.

Теорема 1 [9]. *Нехай функція $f(x,y) \in \mathbf{C}^{(k_x+1,k_y+1)}(G)$, ДЛД* (2) *— інтерполяційний, чисельник $P_{n_{xy}}(x,y)$ та знаменник $Q_{n_{xy}}(x,y)$ дробу* (2) *— многочлени,* $\deg_x P_{n_{xy}}(x,y) \leqslant k_x$, $\deg_y P_{n_{xy}}(x,y) \leqslant k_y$. *Тоді знайдуться $\xi, \theta \in (\alpha_x, \beta_x)$, $\eta, \nu \in (\alpha_y, \beta_y)$ такі, що*

$$R_{n_{xy}}(x,y) = f(x,y) - \frac{P_{n_{xy}}(x,y)}{Q_{n_{xy}}(x,y)} =$$
$$= \frac{1}{Q_{n_{xy}}(x,y)} \left[\frac{\omega_{k_x}(x)}{(k_x+1)!} \left. \frac{\partial^{k_x+1} h(x,y)}{\partial x^{k_x+1}} \right|_{x=\theta} + \frac{\omega_{k_y}(y)}{(k_y+1)!} \left. \frac{\partial^{k_y+1} h(x,y)}{\partial y^{k_y+1}} \right|_{y=\nu} + \right.$$
$$\left. + \frac{\omega_{k_x}(x)\, \omega_{k_y}(y)}{(k_x+1)!\,(k_y+1)!} \left. \frac{\partial^{k_x+k_y+2} h(x,y)}{\partial x^{k_x+1} \partial y^{k_y+1}} \right|_{\substack{x=\xi \\ y=\eta}} \right], \tag{6}$$

де

$$\omega_{k_x}(x) = \prod_{i=0}^{k_x}(x - x_i), \quad \omega_{k_y}(y) = \prod_{j=0}^{k_y}(y - y_j), \quad h(x,y) = Q_{n_{xy}}(x,y)\; f(x,y).$$

ДІЛД типу Кучмінської – Коут. Розглянемо деякі типи ДІЛД. Розпочнемо із ДІЛД, запропонованого Х. Й. Кучмінською [1] та А. Коут [2]. Нехай в ДІЛД (2) частинні чисельники $a_{ij}(x,y)$ визначено таким чином:

$$a_{ij}(x,y) = \begin{cases} x - x_{i-1} & \text{при} \quad i > j, \\ y - y_{j-1} & \text{при} \quad i < j, \\ (x - x_{i-1})(y - y_{i-1}) & \text{при} \quad i = j, \end{cases}$$

знаменники b_{ij} — коефіцієнти, $n_x = k_x$, $n_y = k_y$. Тоді маємо ДІЛД Кучмінської – Коут

$$D_{n_{xy}}(x,y) = \frac{P_{n_{xy}}(x,y)}{Q_{n_{xy}}(x,y)} = \Phi_0^{n_{xy}}(x,y) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{(x - x_{k-1})(y - y_{k-1})}{\Phi_k^{n_{xy}}(x,y)}, \quad n = \min\{n_x, n_y\}, \tag{7}$$

де

$$\Phi_k^{n_{xy}}(x,y) = b_{kk} + \mathop{\mathrm{K}}_{i=k+1}^{n_x} \frac{x - x_{i-1}}{b_{ik}} + \mathop{\mathrm{K}}_{i=k+1}^{n_y} \frac{y - y_{i-1}}{b_{ki}}.$$

Теорема 2 [5]. *ДІЛД (7) є дробово-раціональною функцією двох незалежних змінних. Степені многочленів $P_{n_{xy}}(x,y)$ та $Q_{n_{xy}}(x,y)$ за змінними x і y задовольняють нерівності $\deg_k P_{n_{xy}}(x,y) \leqslant r(n_k)$, $\deg_k Q_{n_{xy}}(x,y) \leqslant r(n_k) + \varepsilon(n_k)$, де $r(n_k) = \dfrac{(n_k+1)^2 + \varepsilon(n_k+1)}{4}$, $\varepsilon(n_k) = \dfrac{(-1)^{n_k} - 1}{2}$, $k \in \{x, y\}$.*

Легко бачити, що кількість коефіцієнтів ДІЛД (7) дорівнює кількості інтерполяційних вузлів у $G_{n_{xy}}$. Коефіцієнти ДІЛД (7) можна визначити за допомогою алгоритму обернених поділених різниць Кучмінської – Коут [1, 2] або безпосередньо з умови (5). Розглянемо матриці

$$\mathbf{X} = (x_{ij})_{i,j=0,1,\ldots,n_x}, \quad x_{ij} = \begin{cases} x_i - x_j & \text{при} \quad i > j, \\ 1 & \text{при} \quad i \leqslant j, \end{cases} \tag{8}$$

та

$$\mathbf{Y} = (y_{ij})_{i,j=0,1,\ldots,n_y}, \quad y_{ij} = \begin{cases} y_i - y_j & \text{при} \quad i > j, \\ 1 & \text{при} \quad i \leqslant j. \end{cases} \tag{9}$$

Частинна обернена поділена різниця k-го порядку для функцій двох змінних визначається за формулою

$$\delta_{ij}^k = \frac{x_{ik} y_{jk}}{\delta_{ij}^{k-1} + \theta_j^k \delta_{ik}^{k-1} + \theta_i^k \delta_{kj}^{k-1} + \theta_i^k \theta_j^k \delta_{kk}^{k-1}}, \qquad \delta_{ij}^{-1} = c_{ij},$$

$$\theta_s^t = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad s > t, \\ 0 & \text{при} \quad s \leqslant t, \end{cases}$$

$$i = 0, 1, \ldots, n_x, \quad j = 0, 1, \ldots, n_y, \quad k = 0, \ldots, N - 1,$$
$$N = \max\{n_x, n_y\}, \quad i, j > k.$$

Твердження 1 [5, 6]. *Коефіцієнти ДІЛД* (7) *задовольняють співвідношення*

$$b_{ij} = \delta_{ij}^{s-1}, \tag{10}$$

де $i = 0, 1, \ldots, n_x$, $j = 0, 1, \ldots, n_y$, $s = \max\{i, j\}$.

Оцінка залишкового члена ДІЛД Кучмінської – Коут. Далі будемо використовувати наступне твердження для ланцюгових дробів.

Теорема 3 [12]. *Якщо всі частинні чисельники* a_k *та частинні знаменники* b_k *ланцюгового дробу* $\dfrac{P_m^{(n)}}{Q_m^{(n)}} = \mathop{\mathrm{K}}\limits_{k=m}^{n} \dfrac{a_k}{b_k}$ *задовольняють умови* $|a_k| \leqslant d$, $|b_k| \geqslant d + 1$, *то*

$$|Q_m^{(n)}| \geqslant \begin{cases} \dfrac{d^{n+1-m} - 1}{d - 1} & \text{при} \quad d \neq 1, \\ n + 1 - m & \text{при} \quad d = 1. \end{cases}$$

Теорема 4. *Нехай виконуються умови*: 1) *для функції* $f(x, y)$, *неперервної в області* G, *визначено ДІЛД* (7), *коефіцієнти якого обчислюються за значеннями функції в точках сітки* $G_{n_{xy}}$ *за формулами* (10); 2) *коефіцієнти ДІЛД* (7) *задовольняють умови* $|b_{ij}| \geqslant d_x + 1$, $|b_{ji}| \geqslant d_y + 1$, $i > j$, $|b_{ii}| \geqslant d_x d_y + 3$, $i = 1, \ldots, n$, *де* $d_x = \beta_x - \alpha_x$, $d_y = \beta_y - \alpha_y$; 3) *знайдеться точка* $(x_*, y_*) \in G$, $x_* \notin X$, $y_* \notin Y$, *така що* $|b_{n_x+1,j}(x_*)| \geqslant d_x + 1$, $|b_{i,n_y+1}(y_*)| \geqslant d_y + 1$, $i = 0, 1, \ldots, n_x$, $j = 0, \ldots, n_y$, $|b_{n+1,n+1}(x_*, y_*)| \geqslant d_x d_y + 3$, *де коефіцієнти* $b_{n_x+1,j}(x_*)$, $b_{i,n_y+1}(y_*)$, $b_{n+1,n+1}(x_*, y_*)$ *визначаються за формулами* (10) *у випадку, коли* $x_{n_x+1} = x_*$, $y_{n_y+1} = y_*$. *Тоді виконується нерівність*

$$\left| f(x_*, y_*) - D_{n_{xy}}(x_*, y_*) \right| \leq$$

$$\leq \begin{cases} \sum_{m=0}^{n} \dfrac{d_x^{n_x+1}(d_x - 1)^2}{d_y^m (d_x^{n_x+1} - d_x^m)(d_x^{n_x+2} - d_x^m)} + \\ \quad + \sum_{m=0}^{n} \dfrac{d_y^{n_y+1}(d_y - 1)^2}{d_x^m (d_y^{n_y+1} - d_y^m)(d_y^{n_y+2} - d_y^m)} + \dfrac{1}{d_x^n d_y^n}, & d_x \neq 1,\ d_y \neq 1, \\ \sum_{m=0}^{n} \dfrac{1}{d_y^m (n_x + 1 - m)(n_x + 2 - m)} + \\ \quad + \sum_{m=0}^{n} \dfrac{d_y^{n_y+1}(d_y - 1)^2}{(d_y^{n_y+1} - d_y^m)(d_y^{n_y+2} - d_y^m)} + \dfrac{1}{d_y^n}, & d_x = 1,\ d_y \neq 1, \\ \sum_{m=0}^{n} \dfrac{d_x^{n_x+1}(d_x - 1)^2}{(d_x^{n_x+1} - d_x^m)(d_x^{n_x+2} - d_x^m)} + \\ \quad + \sum_{m=0}^{n} \dfrac{1}{d_x^m (n_y + 1 - m)(n_y + 2 - m)} + \dfrac{1}{d_x^n}, & d_x \neq 1,\ d_y = 1, \\ \sum_{m=0}^{n} \dfrac{1}{(n_x + 1 - m)(n_x + 2 - m)} + \\ \quad + \sum_{m=0}^{n} \dfrac{1}{(n_y + 1 - m)(n_y + 2 - m)} + 1, & d_x = 1,\ d_y = 1. \end{cases}$$

Доведення. Виберемо точку (x_*, y_*). Згідно з умовами теореми $x_* \notin X$, $y_* \notin Y$. За значеннями функції $f(x,y)$ у точках сітки $G_{n_{xy}+1} = \{x_0, \ldots, x_{n_x}, x_{n_x+1}\} \times \times \{y_0, \ldots, y_{n_y}, y_{n_y+1}\}$, де $x_{n_x+1} = x_*$, $y_{n_y+1} = y_*$, побудуємо ще один ДІЛД

$$D_{n_{xy}+1}(x,y) = \Phi_0^{n_{xy}+1}(x,y) + \underset{k=1}{\overset{n+1}{\mathrm{K}}} \frac{(x-x_{k-1})(y-y_{k-1})}{\Phi_k^{n_{xy}+1}(x,y)}, \tag{11}$$

де

$$\Phi_k^{n_{xy}+1}(x,y) = b_{kk} + \underset{i=k+1}{\overset{n_x+1}{\mathrm{K}}} \frac{x-x_{i-1}}{b_{ik}} + \underset{i=k+1}{\overset{n_y+1}{\mathrm{K}}} \frac{y-y_{i-1}}{b_{ki}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n+1.$$

Легко бачити, що коефіцієнти b_{ij}, $i = 0, 1, \ldots, n_x$, $j = 0, 1, \ldots, n_y$, у ДІЛД (11) дорівнюють відповідним коефіцієнтам у ДІЛД (7) за побудовою, а коефіцієнти $b_{n_x+1,i} = b_{n_x+1,i}(x_*)$, $b_{i,n_y+1} = b_{i,n_y+1}(y_*)$, $b_{n+1,n+1} = b_{n+1,n+1}(x_*, y_*)$ і визначаються за формулами (10).

ДІЛД (11) є інтерполяційним, тобто $D_{n_{xy}+1}(x_*, y_*) = f(x_*, y_*)$ за побудовою, тоді

$$f(x_*, y_*) - D_{n_{xy}}(x_*, y_*) = D_{n_{xy}+1}(x_*, y_*) - D_{n_{xy}}(x_*, y_*). \tag{12}$$

Різниця між підхідними дробами $D_{n_{xy}+1}(x_*, y_*) - D_{n_{xy}}(x_*, y_*)$ визначається за формулою (4), коли $a_{jm} = x - x_{j-1}$, $j = m+1, \ldots, n_x + 1$, $a_{mj} = y - y_{j-1}$, $j = m+1, \ldots, n_y + 1$, $m = 0, 1, \ldots, n$, $a_{ss} = (x - x_{s-1})(y - y_{s-1})$, $s = 1, 2, \ldots, n$.

Скориставшись методом повної математичної індукції, можна довести, що

$$|Q_k^{n_{xy}}| \geqslant d_x d_y, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \qquad |Q_k^{n_{xy}+1}| \geqslant d_x d_y, \quad k = 1, 2, \ldots, n+1. \tag{13}$$

Знаменники $Q_{n_x,m}, Q_{n_x+1,m}, Q_{m,n_y}, Q_{m,n_y+1}$ ланцюгових дробів оцінюються за модулем згідно з теоремою 3. Звідси й отримуємо твердження теореми.

Двовимірний інтерполяційний ланцюговий С$'$–дріб. Розглянемо ДІЛД у вигляді С$'$-дробу (С$'$-ДІЛД)

$$D_{n_{xy}}(x,y) = b_{00} + \Phi_0^{n_{xy}}(x,y) + \underset{i=1}{\overset{n}{\mathrm{K}}} \frac{b_{ii}(x-x_{i-1})(y-y_{i-1})}{1 + \Phi_i^{n_{xy}}(x,y)}, \quad n = \min\{n_x, n_y\}, \tag{14}$$

де

$$\Phi_i^{n_{xy}}(x,y) = \underset{j=i+1}{\overset{n_x}{\mathrm{K}}} \frac{b_{ji}(x-x_{j-1})}{1} + \underset{j=i+1}{\overset{n_y}{\mathrm{K}}} \frac{b_{ij}(y-y_{j-1})}{1}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Визначимо коефіцієнти С$'$-ДІЛД (14) таким чином, щоб у вузлах множини $G_{n_{xy}}$ виконувалась умова (5). Введемо позначення

$$\beta_{ij}^{(k)} = \frac{\omega_{ij}^{(k-1)}}{x_{ik} y_{j\,k}} \left[\frac{1}{\beta_{ij}^{(k-1)}} + \frac{\theta_j^k}{\beta_{ik}^{(k-1)}} + \frac{\theta_i^k}{\beta_{kj}^{(k-1)}} + \frac{\theta_j^k \, \theta_i^k}{\beta_{kk}^{(k-1)}} \right], \tag{15}$$

де

$$\omega_{ij}^{(k-1)} = \begin{cases} \beta_{ik}^{(k-1)} & \text{при} \quad j > i, \quad i < k, \\ \beta_{kj}^{(k-1)} & \text{при} \quad i > j, \quad j < k, \\ \beta_{kk}^{(k-1)} & \text{при} \quad i \geqslant k, \quad j \geqslant k, \end{cases}$$

$$\beta_{ij}^{(0)} = \frac{c_{ij} + \theta_j^0 c_{i0} + \theta_i^0 c_{0j} + \theta_j^0 \theta_i^0 c_{00}}{x_{i0}\, y_{j0}},$$

$$i = 0, 1, \ldots, n_x, \quad j = 0, 1, \ldots, n_y, \quad k = 1, 2, \ldots, N-1, \quad N = \max\{n_x, n_y\}.$$

Твердження 2. *Коефіцієнти ДІЛД* (14) *можна знайти за допомогою співвідношення*

$$b_{ij} = \beta_{ij}^{(k-1)}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n_x, \quad j = 0, 1, \ldots, n_y, \quad k = \max\{i, j\}. \tag{16}$$

Доведення. Доведемо формулу (16) за допомогою методу повної математичної індукції, аналогічно тому, як це зроблено в [4]. Легко бачити, що формула має місце для коефіцієнтів $\Phi_0^{n_{xy}}(x, y)$ [9] при довільних n_x та n_y. Для $k = 0, \ldots, n_x$, $m = 0, \ldots, n_y$ виконується рівність

$$\Phi_0^{n_{xy}}(x_k, y_m) = \mathop{\mathrm{K}}_{j=1}^{n_x} \frac{b_{j0} x_{kj-1}}{1} + \mathop{\mathrm{K}}_{j=1}^{n_y} \frac{b_{0j} y_{mj-1}}{1} = c_{k0} + c_{0m} - 2\, b_{00}. \tag{17}$$

Припустимо, що коефіцієнти $\Phi_k^{n_{xy}}(x, y)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, визначаються за формулою (16) при $n = t - 1$. Нехай $n = t$. Маємо

$$D_{t_{xy}}(x, y) = b_{00} + \Phi_0^{t_{xy}}(x, y) + \cfrac{b_{11}\,(x - x_0)\,(y - y_0)}{1 + \Phi_1^{t_{xy}}(x, y) + \mathop{\mathrm{K}}\limits_{i=2}^{t} \cfrac{b_{ii}\,(x - x_{i-1})\,(y - y_{i-1})}{1 + \Phi_i^{t_{xy}}(x, y)}}. \tag{18}$$

Позначимо

$$\mu(x, y) = 1 + \Phi_1^{t_{xy}}(x, y) + \mathop{\mathrm{K}}_{i=2}^{t} \frac{b_{ii}\,(x - x_{i-1})\,(y - y_{i-1})}{1 + \Phi_i^{t_{xy}}(x, y)}\,. \tag{19}$$

Тоді (18) запишеться у вигляді $D_{t_{xy}}(x, y) = b_{00} + \Phi_0^{t_{xy}}(x, y) + \dfrac{b_{11}\,(x - x_0)\,(y - y_0)}{\mu(x, y)}$. Оскільки $D_{t_{xy}}(x_i, y_j) = c_{ij}$ при $i = 0, 1, \ldots, t_x$, $j = 0, 1, \ldots, t_y$, то з урахуванням (17) маємо $\mu_{ij} = \mu(x_i, y_j) = \dfrac{b_{11} x_{i0} y_{j0}}{c_{ij} - c_{i0} - c_{0j} - c_{00}}$.

Двовимірний ланцюговий дріб (19) має $t - 1$ поверх, а його коефіцієнти, згідно з припущенням, визначаються за формулою (16). Отже,

$$b_{ij} = \widetilde{\beta}_{ij}^{(k-1)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, t_x, \quad j = 1, 2, \ldots, t_y, \quad k = \max\{i, j\}, \tag{20}$$

де

$$\widetilde{\beta}_{ij}^{(k)} = \frac{\widetilde{\omega}_{ij}^{(k-1)}}{x_{ik} y_{jk}} \left[\frac{\theta_j^k\, \theta_i^k}{\widetilde{\beta}_{kk}^{(k-1)}} + \frac{\theta_j^k}{\widetilde{\beta}_{ik}^{(k-1)}} + \frac{\theta_i^k}{\widetilde{\beta}_{kj}^{(k-1)}} + \frac{1}{\widetilde{\beta}_{ij}^{(k-1)}} \right],$$

$$\widetilde{\omega}_{ij}^{(k-1)} = \begin{cases} \widetilde{\beta}_{ik}^{(k-1)} & \text{при} \quad j > i, \quad i < k, \\ \widetilde{\beta}_{j\,k}^{(k-1)} & \text{при} \quad i > j, \quad j < k, \\ \widetilde{\beta}_{kk}^{(k-1)} & \text{при} \quad i \geqslant k, \quad j \geqslant k, \end{cases}$$

$$\widetilde{\beta}_{ij}^{(1)} = \frac{\mu_{ij} - \mu_{i1} - \mu_{1j} + \mu_{11}}{x_{i1}\, y_{j1}}.$$

Очевидно, що $\widetilde{\beta}_{ij}^{(1)} = \beta_{ij}^{(1)}$. Легко переконатися, що $\widetilde{\beta}_{ij}^{(k)} = \beta_{ij}^{(k)}$, $i = 2, \ldots, t_x$, $j = 2, \ldots, t_y$. Отже, формула (16) має місце і в цьому випадку.

Твердження 3. *ДІЛД* (7) *та ДІЛД* (14) *є еквівалентними.*

Доведення. Нехай b_{ij}, $i = 0, \ldots, n_x$, $j = 0, \ldots, n_y, i \neq j$, $b_{kk}, k = 0, \ldots, n$, — коефіцієнти ДІЛД (7), b_{ij}^*, $i = 0, \ldots, n_x$, $j = 0, \ldots, n_y$, $i \neq j, b_{kk}^*$, $k = 0, \ldots, n$, — коефіцієнти ДІЛД (14). Легко бачити, що

$$b_{00}^* = b_{00}, \quad b_{10}^* = \frac{1}{b_{10}}, \quad b_{01}^* = \frac{1}{b_{01}}, \quad b_{i0}^* = \frac{1}{b_{i0}b_{i-10}}, \quad i = 2, \ldots, n_x,$$

$$b_{0i}^* = \frac{1}{b_{0i}b_{0i-1}}, \quad i = 2, \ldots, n_y,$$

$$b_{11}^* = \frac{1}{b_{11}}, \quad b_{ii}^* = \frac{1}{b_{ii}b_{i-1i-1}}, \quad i = 2, 3, \ldots, n,$$

$$b_{ki}^* = \frac{1}{b_{k-1i}b_{ki}}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad k = i+1, \ldots, n_x,$$

$$b_{ik}^* = \frac{1}{b_{ik-1}b_{ik}}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad k = i+1, \ldots, n_y.$$

Наведені в попередніх пунктах алгоритми дозволяють визначати коефіцієнти вказаних ДІЛД через значення функції у вузлах сітки незалежно.

Оцінка залишкового члена C′-ДІЛД. Якщо скористатися методикою Д. І. Боднара [10] (теореми 3.14, 3.15), то можна довести наступну теорему.

Теорема 5. *Якщо коефіцієнти ланцюгового дробу* $b_0 + \mathop{\mathrm{K}}\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{b_i}{1}$ *задовольняють умови* $|b_0| \leqslant 1$, $|b_i| \leqslant \alpha = t(1-t)$, $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2}$, $i = 1, 2, \ldots$, *то*: 1) *ланцюговий дріб є збіжним*; 2) *мають місце такі оцінки швидкості збіжності*:

$$|f_n - f_m| \leqslant \begin{cases} \dfrac{n-m}{2(n+1)(m+1)}, & \text{якщо} \quad t = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{(1-2t)t^{m+1}(1-t)^{m+1}((1-t)^{n-m} - t^{n-m})}{((1-t)^{n+1} - t^{n+1})((1-t)^{m+1} - t^{m+1})}, & \text{якщо} \quad 0 \leqslant t < \dfrac{1}{2}; \end{cases} \tag{21}$$

3) *при кожному* $n = 0, 1, \ldots$ *підхідний дріб* f_n *задовольняє нерівність* $|f_n - b_0| \leqslant t$.

Позначимо через $Q_k^{(s)} = 1 + \mathop{\mathrm{K}}\limits_{i=k+1}^{s} \dfrac{b_i}{1}$ залишок ланцюгового дробу.

Наслідок 1. *При виконанні умов теореми* 5 *справджується оцінка*

$$\left|Q_k^{(s)}\right| \geqslant \begin{cases} \dfrac{s-k+2}{2(s-k+1)}, & t = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{(1-t)^{s-k+2} - t^{s-k+2}}{(1-t)^{s-k+1} - t^{s-k+1}}, & 0 \leqslant t < \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{22}$$

Доведення. Мажорантою для даного ланцюгового дробу буде дріб $1 + \mathop{\mathrm{K}}\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{-t(1-t)}{1}$. Позначимо через P_m, Q_m, g_m відповідно чисельник, знаменник та m-й підхідний дріб мажоруючого ланцюгового дробу. Можна показати, що $P_m = Q_{m+1} > 0$ та

$$Q_m = (1-t)^m + t(1-t)^{m-1} + \ldots + t^m, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{23}$$

За допомогою методу математичної індукції легко переконатися, що

$$\left|Q_k^{(s)}\right| \geqslant g_{s-k}. \tag{24}$$

З (23) та (24) при $t = \dfrac{1}{2}$ маємо $\left|Q_k^{(s)}\right| \geqslant g_{s-k} = \dfrac{Q_{s-k+1}}{Q_{s-k}} = \dfrac{s-k+2}{2(s-k+1)}$. Виконаємо в (23) заміну $t = x^{-1}$, тоді $Q_p = \dfrac{(x-1)^p}{x^p} + \dfrac{(x-1)^{p-1}}{x^p} + \ldots + \dfrac{1}{x^p} = \dfrac{(x-1)^{p+1}-1}{x^p(x-2)}$. Повернувшись до змінної t, маємо

$$Q_p = ((1-t)^{p+1} - t^{p+1})(1-2t)^{-1}. \tag{25}$$

Враховуючи (24) і (25), отримуємо $\left|Q_k^{(s)}\right| \geqslant g_{s-k} = \dfrac{Q_{s-k+1}}{Q_{s-k}} = \dfrac{(1-t)^{s-k+2} - t^{s-k+2}}{(1-t)^{s-k+1} - t^{s-k+1}}$. Отже, оцінка (22) має місце.

Теорема 6. *Нехай виконуються такі умови*: 1) *для функції* $f(x,y)$, *яка неперервна і визначена в області* G, *побудовано* С$'$-*ДІЛД* (14), *коефіцієнти якого визначено за значеннями функції у вузлах сітки* $G_{n_{xy}}$; 2) *коефіцієнти* С$'$-*ДІЛД* (14) *задовольняють умови*

$$|a_{ij}| \leqslant \begin{cases} t_x(1-t_x) & \forall x \in [\alpha_x, \beta_x], \quad i > j, \quad i = 0,\ldots,n_x, \quad j = 0,\ldots,n_y, \\ t_y(1-t_y) & \forall y \in [\alpha_y, \beta_y], \quad i < j, \quad i = 0,\ldots,n_x, \quad j = 0,\ldots,n_y, \\ t_x + t_y & \forall (x,y) \in G, \quad i = j, \quad i = 0,1,\ldots,n, \end{cases}$$

де $0 \leqslant t_x,\, t_y \leqslant \dfrac{1}{2}$, $a_{ij} = b_{ij}(y - y_{j-1})$, $a_{ji} = b_{ji}(x - x_{j-1})$, $a_{ii} = b_{ii}(x - x_{i-1})(y - y_{i-1})$; 3) *знайдеться точка* $(x_*, y_*) \in G$, $x_* \notin X$, $y_* \notin Y$, *для якої виконуються нерівності* $|a_{n_x+1j}(x_*)| \leqslant t_x(1-t_x)$, $j = 0,\ldots,n_y$, $\left|a_{in_y+1}(y_*)\right| \leqslant t_y(1-t_y)$, $i = 0,1,\ldots,n_x$, $|a_{n+1n+1}(x_*,y_*)| \leqslant t_x + t_y$, *де величини* $b_{n_x+1j}(x_*)$, $b_{in_y+1}(y_*)$, $b_{n+1n+1}(x_*,y_*)$ *визначаються за формулами* (20) *у випадку, коли* $x_{n_x+1} = x_*$, $y_{n_y+1} = y_*$. *Тоді має місце оцінка*

$$\left|f(x_*,y_*) - D_{n_{xy}}(x_*,y_*)\right| \leqslant$$
$$\leq \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{2^{-2(n_x-m)}(n_x-m+1)}{n_x-m+3} + \frac{2^{-2(n_y-m)}(n_y-m+1)}{n_y-m+3} \right) + 1 \tag{26}$$

при $t_x = \dfrac{1}{2}$, $t_y = \dfrac{1}{2}$;

$$\left|f(x_*,y_*) - D_{n_{xy}}(x_*,y_*)\right| \leqslant$$
$$\leq \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{t_x^{n_x-m+1}(1-t_x)^{n_x-m+1}((1-t_x)^{n_x-m+1} - t_x^{n_x-m+1})}{(1-t_x)^{n_x-m+3} - t_x^{n_x-m+3}} + \right.$$
$$\left. + \frac{2^{-2(n_y-m)}(n_y-m+1)}{n_y-m+3} \right) \frac{1}{(t_x+1/2)^m} + \frac{1}{(t_x+1/2)^n} \tag{27}$$

при $t_x \neq \dfrac{1}{2}$, $t_y = \dfrac{1}{2}$;

$$\left|f(x_*,y_*)-D_{n_{xy}}(x_*,y_*)\right|\leqslant$$
$$\leq\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{t_y^{n_y-m+1}(1-t_y)^{n_y-m+1}((1-t_y)^{n_y-m+1}-t_y^{n_y-m+1})}{(1-t_y)^{n_y-m+3}-t_y^{n_y-m+3}}+\right.$$
$$\left.+\frac{2^{-2(n_x-m)}(n_x-m+1)}{n_x-m+3}\right)\frac{1}{(t_y+1/2)^m}+\frac{1}{(t_y+1/2)^n} \tag{28}$$

при $t_x=\dfrac{1}{2}$, $t_y\neq\dfrac{1}{2}$;

$$\left|f(x_*,y_*)-D_{n_{xy}}(x_*,y_*)\right|\leqslant$$
$$\leq\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{t_x^{n_x-m+1}(1-t_x)^{n_x-m+1}((1-t_x)^{n_x-m+1}-t_x^{n_x-m+1})}{(1-t_x)^{n_x-m+3}-t_x^{n_x-m+3}}+\right.$$
$$\left.+\frac{t_y^{n_y-m+1}(1-t_y)^{n_y-m+1}((1-t_y)^{n_y-m+1}-t_y^{n_y-m+1})}{(1-t_y)^{n_y-m+3}-t_y^{n_y-m+3}}\right)\times$$
$$\times\frac{1}{(t_x+t_y)^m}+\frac{1}{(t_x+t_y)^n} \tag{29}$$

при $t_x\neq\dfrac{1}{2}$, $t_y\neq\dfrac{1}{2}$.

Доведення. Оскільки $x_*\notin X$, $y_*\notin Y$, то за значеннями функції $f(x,y)$ у точках сітки $G_{n_{xy}+1}=\{x_0,\ldots,x_{n_x},x_{n_x+1}\}\times\{y_0,\ldots,y_{n_y},y_{n_y+1}\}$, де $x_{n_x+1}=x_*$, $y_{n_y+1}=y_*$, побудуємо C$'$-ДІЛД

$$D_{n_{xy}+1}(x,y)=b_{00}+\Phi_0^{(n_x+1,n_y+1)}(x,y)+\mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{n+1}\frac{b_{ii}(x-x_{i-1})(y-y_{i-1})}{1+\Phi_i^{(n_x+1,n_y+1)}(x,y)}, \tag{30}$$

де

$$\Phi_i^{(n_x+1,n_y+1)}(x,y)=\mathop{\mathrm{K}}_{j=i+1}^{n_x+1}\frac{b_{ji}(x-x_{j-1})}{1}+\mathop{\mathrm{K}}_{j=i+1}^{n_y+1}\frac{b_{ij}(y-y_{j-1})}{1}.$$

C$'$-ДІЛД (30) є інтерполяційним, тобто $D_{n_{xy}+1}(x_*,y_*)=f(x_*,y_*)$ за побудовою, а тоді $f(x_*,y_*)-D_{n_{xy}}(x_*,y_*)=D_{n_{xy}+1}(x_*,y_*)-D_{n_{xy}}(x_*,y_*)$. Різниця між $D_{n_{xy}+1}(x_*,y_*)$ та $D_{n_{xy}}(x_*,y_*)$ визначається формулою (4).

Скориставшись теоремою 5 та методом повної математичної індукції, доводимо, що

$$\begin{gathered}\left|Q_k^{n_{xy}}\right|\geqslant t_x+t_y,\quad k=1,2,\ldots,n,\\ \left|Q_k^{n_{xy}+1}\right|\geqslant t_x+t_y,\quad k=1,2,\ldots,n+1.\end{gathered} \tag{31}$$

Знаменники $Q_{n_x,m}$, $Q_{n_x+1,m}$, Q_{m,n_y}, Q_{m,n_y+1} ланцюгових дробів оцінюються за модулем згідно з наслідком 1. З оцінок (22), (31) та (4) отримуємо нерівності (26) – (29).

1. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука, 1983. – 312 с.
2. *Cuyt A., Verdonk B.* Different technique for the construction of multivariate rational interpolation and Pade approximants. – Antwerpen: Univ. Instelling, 1988. – 158 p.
3. *Пагіря М. М.* Інтерполяція функцій ланцюговим дробом та гіллястим ланцюговим дробом спеціального виду // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. мат. – 1994. – Вип. 1. – С. 72 – 79.
4. *Пагіря М. М.* Інтерполяція функцій ланцюговим дробом та його узагальненнями у випадку функцій багатьох змінних // Там же. – 1998. – Вип. 3. – С. 155 – 164.
5. *Пагіря М. М.* Про побудову двовимірного та тривимірного інтерполяційних ланцюгових дробів // Там же. – 1999. – Вип. 4. – С. 85 – 89.
6. *Pahirya M.* About the construction of twodimension and threedimension interpolating continued fraction // Commun. Analyt. Theory Contin. Fract. – 2000. – **8**. – P. 205 – 207.
7. *Kuchmins'ka Kh., Vozna S.* On Newton – Thiele-like interpolating formula // Ibid. – P. 74 – 79.
8. *Кучмінська Х. Й., Сусь О. М., Возна С. М.* Апроксимативні властивості двовимірних неперервних дробів // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 1. – С. 30 – 44.
9. *Pahirya M., Svyda T.* Problem of interpolation function of two-dimensional and three-dimensional interpolating continued fractions // Commun. Analyt. Theory Contin. Fract. – 2003. – **11**. – P. 64 – 80.
10. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
11. *Haussmann W.* On a multivariate Rolle type theorem and the interpolation remainder formula // Int. Ser. Numer. Math. – 1979. – **51**. – P. 137 – 145.
12. *Pahirya M.* Some new aspects of Thiele interpolation continued fraction // Commun. Analyt. Theory Contin. Fract. – 2001. – **9**. – P. 21 – 29.

Одержано 25.11.2004,
після доопрацювання — 18.04.2005