К О Р О Т К І П О В І Д О М Л Е Н Н Я

УДК 517.53

М. В. Заболоцький (Львів. нац. ун-т)

ПРЯМІ ЖУЛІА ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ ПОВІЛЬНОГО ЗРОСТАННЯ

We obtain sufficient conditions under which the Julia lines of entire functions of slow growth have no finite exceptional values.

Знайдено достатні умови, за яких прямі Жуліа цілих функцій повільного зростання не мають скінченних виняткових значень.

Нехай f — мероморфна трансцендентна в $\mathbb{C}$ (далі мероморфна) функція. Будемо використовувати стандартні позначення неванліннівської теорії розподілу значень (див., наприклад, [1, с. 23 – 37]): $T(r, f)$ — неванліннівська характеристична функція, $n(r, a, f)$ — лічильна функція точок a функції f, $N(r, a, f)$ — неванліннівська лічильна функція, $f^*(z) = |f'(z)|/(1 + |f(z)|^2)$ — сферична похідна. Промінь $l_\theta = \{z : \arg z = \theta\}$, $0 \le \theta < 2\pi$, будемо називати прямою Жуліа функції f, якщо f набуває нескінченно часто будь-якого значення з розширеної комплексної площини, за винятком, можливо, двох, в кожному куті $\{z : \theta - \varepsilon < \arg z < \theta + \varepsilon\}$, де $\varepsilon > 0$ — довільне число. Якщо функція f набуває значення $a \in \overline{\mathbb{C}}$ лише скінченну кількість разів у куті $\{z : \theta - \varepsilon < \arg z < \theta + \varepsilon\}$ для деякого $\varepsilon > 0$, то говоримо, що f має виняткове значення на прямій Жуліа $l_\theta = \{z : \arg z = \theta\}$.

Добре відомо, що якщо f — ціла трансцендентна (далі ціла) функція, то вона має принаймні одну пряму Жуліа. Якщо f — мероморфна функція і

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{T(r, f)}{\ln^2 r} = +\infty$$

(див. [2, 3]) або якщо f — мероморфна функція і

$$\varlimsup_{z\to\infty} |z| \cdot f^*(z) = +\infty$$

(див. [4, 5]), то f має хоча б одну пряму Жуліа.

Подальші результати в цьому напрямку належать А. М. Островському, Валірону, Картрайт, Андерсону і Клуні, Топпілі, А. А. Гольдбергу, М. М. Шереметі та іншим (див. [6], розділ 5).

Наслідуючи У. Хеймана [7], ε-множиною будемо називати будь-яку зліченну множину кругів $K(a_n, r_n) = \{z : |z - a_n| < r_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, які не містять початку координат і сума кутів, під якими їх видно з початку координат, є скінченною, тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{|a_n|} < +\infty.$$

У роботі [7] доведено наступні властивості ε-множини:

1) для майже всіх фіксованих φ і $r > r_0(\varphi)$ $z = re^{i\varphi}$ лежить зовні ε-множини;

2) множина E таких r, для яких кола $|z| = r$ перетинають круги ε-множини, має скінченну логарифмічну міру.

Множину E називаємо C_0-множиною, якщо її можна покрити зліченною множиною кругів $K(a_n, r_n) = \{z : |z - a_n| < r_n\}$ таких, що

$$\sum_{|a_n| \le r_n} r_n = o(r), \qquad r \to +\infty.$$

Додатну неперервну неспадну на $[0; +\infty)$ функцію φ називатимемо повільно зростаючою функцією, якщо

$$\varphi(2x) \sim \varphi(x), \qquad x \to +\infty.$$

Мають місце наступні теореми.

Теорема A [8]. *Нехай максимум модуля $M(r, f)$ цілої функції f задовольняє умову*

$$\ln M(r, f) = O(\ln^2 r), \qquad r \to \infty. \tag{1}$$

Тоді f не має виняткових значень на кожній своїй прямій Жуліа.

З іншого боку, в [8] показано, що умова (1) є непокращуваною в наступному розумінні.

Теорема B [8]. *Для довільної додатної на $[0; +\infty)$ функції $h(r)$, $h(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$, існує ціла функція f, яка має пряму Жуліа l з винятковим значенням і*

$$\ln M(r, f) = O\big(h(r) \ln^2 r\big), \qquad r \to \infty.$$

***Зауваження* 1.** Неважко показати, що якщо $\ln M(r, f)$ задовольняє (1), то $\ln M(r, f)$ є повільно зростаючою функцією. Обернене твердження є хибним.

***Зауваження* 2.** Нулі цілої функції f з теореми B лежать на одному промені. З огляду на теорему 1 бачимо, що логарифм максимуму модуля $\ln M(r, f)$ функції f не є повільно зростаючою функцією.

Тому виникає природне запитання: чи можна в теоремі A умову (1) замінити умовою

$$\ln M(2r, f) \sim \ln M(r, f), \qquad r \to \infty\,? \tag{2}$$

На жаль, нам не вдалося дати повну відповідь на це запитання. Ми довели справедливість твердження теореми A лише для деяких важливих підкласів цілих функцій, що задовольняють умову (2) (див. теореми 1 – 4).

Теорема 1. *Нехай f — ціла функція з нулями на скінченній системі променів $\{l_{\theta_j}\}_{j=1}^n$, $0 \le \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n < 2\pi$, і виконується умова* (2). *Тоді прямими Жуліа функції f будуть тільки промені l_{θ_j}, $j = \overline{1, n}$, причому на цих прямих Жуліа функція f не має виняткових значень.*

При доведенні цієї теореми будемо використовувати наступні твердження, які сформулюємо у вигляді лем.

Лема 1 [9]. *Нехай f — ціла функція нульового порядку. Тоді функції $T(r, f)$, $\ln M(r, f)$, $N(r, 0, f)$ є повільно зростаючими функціями одночасно, причому справджується співвідношення*

$$T(r, f) \sim \ln M(r, f) \sim N(r, 0, f), \qquad r \to +\infty.$$

Лема 2 [10]. *Нехай f — ціла функція нульового порядку з додатними нулями, $\rho(r)$ — уточнений порядок функції $N(r, 0, f)$. Тоді*:

1) *для* $0 < \theta < 2\pi$ *виконується*

$$\ln\left|f(re^{i\theta})\right| = N(r, 0, f) + o(r^{\rho(r)}), \qquad r \to \infty;$$

2) *існує* C_0*-множина* E *така, що*

$$\ln\left|f(z)\right| = N(r, 0, f) + o(r^{\rho(r)}), \qquad z = re^{i\theta} \to \infty, \qquad z \notin E;$$

3) *у випадку, коли функція* $N(r, 0, f)$ *є повільно зростаючою, за* $\rho(r)$ *можна взяти* $\ln N(r, 0, f)/\ln r$, *а отже,* $r^{\rho(r)} = N(r, 0, f)$.

***Доведення теореми* 1.** 1. Припустимо спочатку, що функція f має нулі на одному промені. Без втрати загальності вважаємо, що це промінь $l_0 = \{z : \arg z = 0\}$. Добре відомо, що якщо функція f задовольняє (2), то f має нульовий порядок. Тоді за лемами 1 та 2

$$\ln\left|f(z)\right| = N(r, 0, f) + o\big(N(r, 0, f)\big), \qquad z \to \infty, \qquad z \notin E, \tag{3}$$

де множина $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} K(c_n, \rho_n)$ є C_0-множиною, і кожний замкнений круг $\overline{K}(c_n, \rho_n)$ перетинається з променем l_0. Оскільки множина $E^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} K(|c_n|, 2\rho_n)$ є C_0-множиною і $E \subset E^*$, то без втрати загальності можемо вважати, що центри кругів $K(c_n, \rho_n)$ лежать на промені l_0 і $c_1 < c_2 < \ldots < c_n < \ldots$. З означення C_0-множини отримуємо, що довільний промінь l_θ, $0 < \theta < 2\pi$, починаючи з деякого $r_0 > 0$, не перетинає множину E. Справді, припустивши супротивне, одержимо, що існує підпослідовність (n_k) натуральних чисел така, що $K(c_{n_k}, \rho_{n_k}) \cap l_\theta \neq \varnothing$. Отже, $\rho_{n_k} \geq c_{n_k} \sin\delta$, де $\delta = \min\{\theta; 2\pi - \theta\}$. Тоді

$$\sum_{c_n \leq c_{n_k}} \rho_n \;\geq\; \rho_{n_k} \;\geq\; c_{n_k} \sin\delta \neq o(c_{n_k}), \qquad k \to \infty,$$

що суперечить означенню C_0-множини.

Оскільки $\left|f(z)\right| \to +\infty$ при $z \to \infty$, $z \notin E$, то жоден промінь l_θ, $\theta \neq 0$, не є променем Жуліа функції f. Покажемо, що промінь l_0 є променем Жуліа f, на якому функція f не має виняткових значень. Нехай (a_n) — послідовність нулів f. З тверджень 1 та 2 леми 2 випливає, що для довільного $n \in \mathbb{N}$ $a_n \in E$. Будемо розглядати лише ті круги $K(c_n, \rho_n)$, які містять хоча б одну точку послідовності (a_n). Візьмемо довільне число $b \in \mathbb{C}$ і нехай $M = |b|$. З (3) отримуємо, що $\left|f(z)\right| > M$ для всіх $n \geq n_0$ на межі $\partial K(c_n, \rho_n)$. Звідси за теоремою Руше маємо, що f має принаймні одну точку b у крузі $K(c_n, \rho_n)$, тому що функції f та $f + (-b)$ мають однакову кількість нулів у $K(c_n, \rho_n)$. Враховуючи, що для довільного $\varepsilon > 0$, починаючи з деякого n_1, всі круги $K(c_n, \rho_n)$ містяться в куті $\{z : -\varepsilon < \arg z < \varepsilon\}$, отримуємо, що промінь l_0 є прямою Жуліа функції f без виняткових значень. Отже, теорему 1 у цьому випадку доведено.

2. Якщо нулі функції f знаходяться на скінченній системі променів $\{l_{\theta_j}\}_{j=1}^m$, то за теоремою Вейєрштрасса про побудову цілої функції з заданими нулями зобразимо f у вигляді $f = f_1 f_2 \ldots f_m$, де нулі f_j знаходяться на промені l_{θ_j}, $j = \overline{1, m}$. Тоді за лемою 2 для кожного $j = \overline{1, m}$ маємо

$$\ln\left|f_j(z)\right| = N(r, 0, f_j) + o(r^{\rho_j(r)}), \qquad z \to \infty, \qquad z \notin E_j,$$

де $\rho_j(r)$ — уточнений порядок $N(r, 0, f_j)$. Оскільки $\bigcup_{j=1}^{m} E_j = E$ є C_0-множиною, $\rho_j(r) \le \rho(r)$, $j = \overline{1, m}$, і $N(r, 0, f) = N(r, 0, f_1) + \ldots + N(r, 0, f_m)$, то отримуємо

$$\ln|f(z)| = \ln|f_1(z)| + \ldots + \ln|f_m(z)| = N(r, 0, f) + o(r^{\rho(r)})$$

при $z \to \infty$, $z \notin E$, де $\rho(r)$ — уточнений порядок $N(r, 0, f)$. За лемою 1 $N(r, 0, f) \sim T(r, f)$, $r \to \infty$, а отже, $N(r, 0, f)$ — повільно зростаюча функція. Враховуючи лему 2, отримуємо співвідношення (3). Далі доведення аналогічне випадку 1. Бачимо, що кожний промінь θ_j є прямою Жуліа без виняткових значень функції f і інших прямих Жуліа функція f не має.

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Якщо ціла функція f задовольняє умову*

$$\ln M(r \ln r, f) - \ln M(r, f) = o(\ln M(r, f)), \qquad r \to \infty, \tag{4}$$

то f не має виняткових значень на кожній своїй прямій Жуліа.

Теорема 3. *Нехай ціла функція f задовольняє умову* (2), $\delta(r) = \sup\{t(\ln M(t, f))' (\ln M(t, f))^{-1} : t \ge r\}$. *Якщо*

$$\delta(r) = o(1/\ln \ln r), \qquad r \to \infty, \tag{5}$$

то f не має виняткових значень на кожній своїй прямій Жуліа.

Теорема 4. *Нехай φ — додатна зростаюча на $[0; +\infty)$ функція така, що*

$$\ln \ln r = o(\ln \varphi(r)), \qquad r \to \infty. \tag{6}$$

Якщо ціла функція f задовольняє (2) *і*

$$\ln M(r\varphi(r), f) = O(\ln M(r, f)), \qquad r \to \infty, \tag{7}$$

то f не має виняткових значень на кожній своїй прямій Жуліа.

При доведенні цих теорем нам будуть потрібні наступні леми.

Лема 3 [8, с. 81]. *Нехай $\rho > 0$, μ — додатна борелева міра, задана на площині, носій якої знаходиться на компактній множині, і $\mu(\mathbb{C}) = M$, $0 < M < +\infty$. Тоді для кожного $z \in \mathbb{C}$, за винятком множини кругів, сума радіусів яких не перевищує 32ρ, виконується*

$$\int_{\mathbb{C}} \ln|z - \xi| \, d\mu(\xi) \ge M \ln \rho.$$

Лема 4. *Нехай ціла функція f задовольняє умову* (2) *і*

$$n(r, 0, f) = o(N(r, 0, f)/\ln \ln r), \qquad r \to \infty. \tag{8}$$

Тоді існує ε-множина F така, що

$$\ln|f(z)| \sim \ln M(r, f), \qquad z = re^{i\theta} \to \infty, \qquad z \notin F. \tag{9}$$

Доведення. Нехай a_n — нулі f. Маємо $(f(0) = 1)$

$$\ln|f(z)| = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left|1 - \frac{z}{a_n}\right| = \int_{\mathbb{C}} \ln\left|1 - \frac{z}{\xi}\right| d\mu e_\xi,$$

$$\ln M(r, f) \le \int_{\mathbb{C}} \ln\left(1 + \frac{|z|}{|\xi|}\right) d\mu e_\xi,$$

де $d\mu e_\xi$ — міра Рісса, асоційована з нулями f. Для фіксованого $z \in \mathbb{C}$ виберемо $k \in \mathbb{N}$ так, що $2^k \le |z| < 2^{k+1}$. Тоді

$$0 \geq \ln|f(z)| - \ln M(r,f) \geq \int_{\mathbb{C}} \ln \frac{|\xi - z|}{|\xi| + |z|} d\mu e_\xi =$$

$$= \left(\int_{|\xi|<2^{k-1}} + \int_{2^{k-1}\leq|\xi|\leq 2^{k+2}} + \int_{|\xi|>2^{k+2}} \right) \ln \frac{|\xi - z|}{|\xi| + |z|} d\mu e_\xi = I_1 + I_2 + I_3 .$$

Враховуючи, що $\ln \dfrac{1+x}{1-x} < 3x$ для $0 < x < \dfrac{1}{2}$, умову (8) та лему 1, отримуємо ($|z| = r$)

$$0 < -I_1 \leq \int_{|\xi|<r/2} \ln \frac{1+|\xi/z|}{1-|\xi|/r} d\mu e_\xi < \frac{3}{r} \int_{|\xi|<r/2} |\xi| d\mu e_\xi = \frac{3}{r} \int_0^{r/2} t dn(t, 0, f) \leq$$

$$\leq \frac{3}{2} n(r/2, 0, f) = o(N(r, 0, f)) = o(\ln M(r,f)), \quad r \to \infty. \tag{10}$$

Аналогічно, враховуючи, що $\dfrac{n(t, 0, f)}{\sqrt{t}} \searrow 0$ при $t \to \infty$, маємо

$$0 < -I_3 \leq \int_{|\xi|>2r} \ln \frac{1+|z/\xi|}{1-r/|\xi|} d\mu e_\xi < 3r \int_{2r}^{+\infty} \frac{1}{t} dn(t, 0, f) =$$

$$= 3r \left(-\frac{n(2r, 0, f)}{2r} + \int_{2r}^{+\infty} \frac{n(t, 0, f)}{t^2} dt \right) \leq 3r \frac{n(2r, 0, f)}{\sqrt{2r}} \int_{2r}^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}} =$$

$$= \frac{3\sqrt{r}}{\sqrt{2}} n(2r, 0, f) \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2r}} = 3 \cdot n(2r, 0, f) =$$

$$= o(N(r, 0, f)) = o(\ln M(r,f)), \quad r \to \infty. \tag{11}$$

Для оцінки інтеграла I_2 застосуємо лему 3. Повна міра площини не перевищує $n(2^{k+2}, 0, f)$. Визначимо функцію $\alpha(k)$ таким чином:

$$n(2^{k+2}, 0, f) = \frac{\alpha^2(k) N(2^k, 0, f)}{\ln k}. \tag{12}$$

З (8) отримуємо, що $\alpha(k) \to 0$ при $k \to +\infty$. За лемою 3 маємо

$$0 \geq I_2 \geq \int_{0<|\xi|<2^{k+2}} \ln|z - \xi| d\mu e_\xi - \int_{0<|\xi|<2^{k+2}} \ln(|z| + |\xi|) d\mu e_\xi \geq$$

$$\geq n(2^{k+2}, 0, f)(\ln \rho - \ln(2^{k+3})) = n(2^{k+2}, 0, f) \ln \frac{\rho}{2^{k+3}} \tag{13}$$

зовні множини кругів із кільця $\{z : 2^{k-1} \leq |z| \leq 2^{k+2}\}$, сума радіусів яких не перевищує 32ρ. Виберемо ρ так, що

$$\ln \frac{\rho}{2^{k+3}} = -\frac{\ln k}{\alpha(k)}.$$

Тоді

$$\rho = 2^{k+3} \exp\left\{ -\frac{\ln k}{\alpha(k)} \right\} = 2^{k+3} k^{-1/\alpha(k)}$$

і з (12) та (13) отримуємо

$$0 \geq I_2 \geq \frac{\alpha^2(k)N(2^k, f)}{\ln k}\left(\frac{-\ln k}{\alpha(k)}\right) = o\big(N(2^k, 0, f)\big) = o\big(\ln M(r, f)\big), \qquad r \to \infty, \tag{14}$$

зовні множини кругів із кільця $\{z : 2^{k-1} \leq |z| \leq 2^{k+2}\}$, сума радіусів яких не перевищує

$$O(2^k k^{-1/\alpha(k)}), \qquad k \to \infty.$$

Отже, сума кутів, під якими ці круги видно з початку координат, не перевищує

$$O(k^{-1/\alpha(k)}), \qquad k \to \infty.$$

Звідси отримуємо, що виняткова множина F є ε-множиною, оскільки ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^2)$ є збіжним. Отже, з (10), (11) та (14) отримуємо твердження леми 4.

Лема 5. *Нехай ціла функція f задовольняє умову* (9). *Тоді кожна пряма Жуліа функції f не має виняткових значень.*

Доведення леми аналогічне доведенню теореми 1 з [8].

***Доведення теорем* 2 – 4.** За умов цих теорем ціла функція f має нульовий порядок, і тому за лемою 1 маємо $\ln M(r, f) \sim N(r, 0, f)$, $r \to \infty$. Звідси

$$n(r, 0, f)\ln\psi(r) \leq \int_r^{r\psi(r)} \frac{n(t, 0, f)\,dt}{t} \leq N(r\psi(r), 0, f) - N(r, 0, f) =$$

$$= (1 + o(1))\big(\ln M(r\psi(r), f) - \ln M(r, f)\big), \qquad r \to \infty. \tag{15}$$

З огляду на леми 4 та 5 досить показати, що виконується (8). Покладемо $\psi(r) = \ln r$ і з (4) та (15) отримаємо (8), що доводить теорему 4.

Оскільки [11] (лема 3) $\ln M(re^{1/\delta(r)}, f) \leq e\ln M(r, f)$, то, беручи $\psi(r) = e^{1/\delta(r)}$, з (15), завдяки (5), маємо (8), і теорему 5 доведено.

Насамкінець, при $\psi(r) = \varphi(r)$ з (15), враховуючи (6) та (7), знову отримуємо (8).

1. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 496 с.
2. *Ostrowski A.* Uber Folgen analytisher Funktionen und einige Verscharfungen des Picardschen Satzes // Math. Z. – 1926. – **24**. – S. 215 – 258.
3. *Constantinescu C.* Einige Anwendungen des hyperbolischen Masses // Math. Nachr. – 1956. – **15**. – S. 155 – 172.
4. *Lehto O.* The spherical derivative of a meromorphic function in the neighbourhood of an isolated singularity // Comment. math. helv. – 1959. – **33**. – P. 196 – 205.
5. *Lehto O., Virtanen K.* On the behaviour of meromorphic in the neighbourhood of an isolated singularity // Ann. Acad. Sci. Fenn. – 1957. – **240**. – P. 15 – 26.
6. *Гольдберг А. А., Левин Б. Я., Островский И. В.* Целые и мероморфные функции // Итоги науки и техники. Соврем. проблемы математики. Фундам. направления / ВИНИТИ. – 1991. – **85**. – С. 5 – 186.
7. *Hayman W.* Slowly growing integral and subharmonic functions // Comment. math. helv. – 1960. – **34**. – P. 75 – 84.
8. *Toppila S.* Some remarks on exceptional values at Julia line // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. – 1970. – **456**. – P. 3 – 20.
9. *Заболоцкий Н. В., Шеремета М. Н.* О медленном возрастании основных характеристик целых функций // Мат. заметки. – 1999. – **65**, № 2. – С. 206 – 214.
10. *Гольдберг А. А., Заболоцкий Н. В.* Индекс концентрации субгармонической функции нулевого порядка // Там же. – 1983. – **24**, № 3. – С. 34 – 46.
11. *Братищев А. В., Коробейник Ю. Ф.* О некоторых характеристиках роста субгармонических функций // Мат. сб. – 1978. – **106**, № 1. – С. 44 – 65.

Одержано 01.06.2005