УДК 513.83

Л. П. Плахта, канд. фіз.-мат. наук
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики АН України, Львів)

Про множини сингулярних точок дій скінченних груп на $(S^n)^k$

Вивчені реалізації цілочислових D_3-модулів рангу 2 на $(S^n)^k$ для діедральних груп D_3. Досліджені когомології множин сингулярних точок дій напівпрямих добутків $\mathbb{Z}/p \rtimes \mathbb{Z}/q$ та кватерніонних груп Q на $(S^n)^k$.

Изучены реализации целочисленных D_3-модулей ранга 2 на $(S^n)^k$ для диэдральных групп D_3. Исследованы когомологии множеств сингулярных точек действий полупрямых произведений $\mathbb{Z}/p \rtimes \mathbb{Z}/q$ и кватернионных групп Q на $(S^n)^k$.

Вступ. Нехай X — фінітний простір, а G — скінченна група, яка діє на X. Тоді G індукує на градуйованому модулі $H^*(X, \mathbb{Z})$ когомологій структуру G-модуля. Якщо $X \sim (S^n)^k$, тобто X має кільце цілочислових когомологій, ізоморфне кільцю $H^*((S^n)^k, \mathbb{Z})$, то $H^*(X, \mathbb{Z})$ утворює зовнішню алгебру з k n-вимірними твірними $\Lambda^*_{\mathbb{Z}}(e_1, \ldots, e_k)$. Тоді дія групи G на X індукує на $H^*(X, \mathbb{Z})$ структуру градуйованого G-модуля, яка визначається G-модулем $H^n(X, \mathbb{Z})$ і U-добутком.

З іншого боку, нехай M — скінченнопороджений, без скруту, рангу k над $\mathbb{Z}$ G-модуль. Виникає наступне питання. Чи існує дія групи G на $(S^n)^k$, яка б індукувала на $H^n((S^n)^k, \mathbb{Z})$ структуру G-модуля, ізоморфного M? Іншими словами, чи існує реалізація даного G-модуля на $(S^n)^k$? Для циклічних груп $G = \mathbb{Z}/p$ Адем [1] наводить необхідні умови реалізації цілочислових G-модулів у термінах матриці $T \in SL(k, \mathbb{Z})$, що відповідає твірній групи $\mathbb{Z}/p$, та її елементарних дільників. У першій частині даної статті ці умови будуть використані для встановлення неможливості реалізації класу цілочислових G-модулів, де $G = D_3$ — діедральна група порядку 6.

Когомологічна структура множини нерухомих точок дій циклічних груп простого порядку на просторах $X \sim (S^n)^k$ описана в [2]. Адем досліджував дії циклічної групи простого порядку на $X \sim (S^n)^k$. Нехай F — множина нерухомих точок дії групи $\mathbb{Z}/p$ на $(S^n)^k$. Виявляється, що структура цілочислового $\mathbb{Z}/p$-модуля $H^n((S^n)^k, \mathbb{Z})$ накладає суттєві обмеження на структуру $\mathbb{Z}$-модуля $H^n(F, \mathbf{F}_p)$. Зокрема, якщо цілочисловий модуль $H^n(X, \mathbb{Z})$ над $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_p]$, де $X \sim (S^n)^k$, є проективним модулем типу $\oplus_{i=1}^{l} A(a_i)$, то $F \sim_p (S^n)^l$, тобто $H^*(F, \mathbf{F}_p) \cong H^*((S^n)^l, \mathbf{F}_p)$ [1]. Деякі співвідношення для когомологій множини нерухомих точок і множини сингулярних точок дії скінченної групи G на $X \sim (S^n)^k$ можна одержати, використовуючи локалізацію градуйованого модуля еквіваріантних когомологій по мультиплікативній множині $S \subseteq H^*(BG)$. В другій частині даної статті одержані співвідношення для когомологій множин сингулярних точок дій напівпрямих добутків $\mathbb{Z}/p \rtimes \mathbb{Z}/q$, де p, q — непарні прості числа, $q/p - 1$, а також кватерніонних груп Q, на $X \sim (S^n)^k$.

Ми використовуємо термінологію і позначення робіт [1—3].

1. Наведемо необхідні відомості з теорії цілочислових G-модулів.

Означення 1. *Під цілочисловим G-модулем будемо розуміти вільний, скінченнопороджений над $\mathbb{Z}$ модуль над груповим кільцем $\mathbb{Z}G$, де G — скінченна група. Іншими словами, це скінченнопороджене цілочислове зображення групи G.*

Нехай $G = D_p$ — діедральна група порядку $2p$, тобто $D_p = \langle x, y \mid x^p = y^2 = e,\ yxy = x^{-1} \rangle$ і M — цілочисловий G-модуль.

Означення 2. *Будемо говорити, що цілочисловий G-модуль M рангу k над $\mathbb{Z}$ реалізується на $(S^n)^k$, якщо для деякої дії групи G на $(S^n)^k$ індукований нею цілочисловий G-модуль $H^n((S^n)^k, \mathbb{Z})$ ізоморфний G-модулю M.*

Очевидно, що коли D_p-модуль N реалізується на $(S^n)^k$, то реалізується на $(S^n)^k$ і $\mathbb{Z}/p$-модуль $N_1 = \operatorname{res}^{D_p}_{\mathbb{Z}/p} N$, де $\mathbb{Z}/p$ — нормальна циклічна підгрупа групи D_p, породжена елементом x.

Нехай $\mathbf{Q}$ — поле раціональних чисел, θ — первісний корінь p-го степеня з 1 над $\mathbf{Q}$, p — просте число, $Irr(\theta, \mathbf{Q}) = 1 + x + \ldots + x^{p-1}$, R — кільце цілих алгебраїчних чисел в $K = \mathbf{Q}(\theta)$.

Означення 3. *Ідеалом у полі $\mathbf{Q}(\theta)$ називається довільний скінченнопороджений ненульовий R-підмодуль A_i в K.*

Відомо, що $\operatorname{rk}_{\mathbb{Z}} A_i = p - 1$ для довільного ідеалу A в K [4]. Задамо дію групи $\mathbb{Z}/p$ на A таким чином: $g \cdot a = \theta a$, $a \in A$, де g — твірна групи $\mathbb{Z}/p$. Тоді A_i — $\mathbb{Z}/p$-модуль. Число класів ізоморфних ідеалів A_i скінченне [4].

Нехай A_i — ідеал в K. Розглянемо групу $A \oplus \mathbb{Z}y$ і зафіксуємо $a_0 \in A$, $a_0 \notin (\theta - 1)A$. Задамо дію групи $\mathbb{Z}/p$ на $A \oplus \mathbb{Z}y$:

$$g \cdot a = \theta a,\ a \in A,\ g \cdot y = y + a_0.$$

Тоді група $A + \mathbb{Z}y$ перетворюється в $\mathbb{Z}/p$-модуль, який позначається $A(a_0)$. Зауважимо, що $A(a_0)$ — проективний $\mathbb{Z}/p$-модуль.

Відомо, що для простих чисел p існують тільки три типи нерозкладних $\mathbb{Z}/p$-модулів із скінченною базою над $\mathbb{Z}$: 1) модуль $\mathbb{Z}$ з тривіальною дією групи $\mathbb{Z}/p$; 2) ідеал A_i в полі $\mathbf{Q}(\theta)$; 3) проективний модуль типу $A_i(a)$, де $a \notin (\theta - 1)A$. Більше того, довільний $\mathbb{Z}/p$-модуль із скінченною $\mathbb{Z}$-базою розкладається в пряму суму нерозкладних $\mathbb{Z}/p$-модулів типів 1, 3 і в певному розумінні однозначно [4]. Маємо $A(a_0) \otimes \mathbf{F}_p \cong \mathbf{F}_p[\mathbb{Z}/p]$.

Нехай $R^* = H^*((S^n)^k, \mathbb{Z})$, де n — парне число, і $T\colon R^* \to R^*$ — автоморфізм скінченного періоду p. Адем показав [1], що автоморфізм $T^{(n)}$ можна зобразити знакопереставною матрицею. Більше того, якщо p — просте непарне число, то автоморфізм $T^{(n)}$ у деякій базі можна зобразити матрицею перестановки.

Отже, маємо необхідну умову реалізації автоморфізму $T^{(n)}$ простого періоду p, де $p \neq 2$ і $n = 2k$:

якщо автоморфізм $T^{(n)}$ реалізується на $(S^n)^k$, то в деякій базі він зображується матрицею перестановки елементів бази, всі цикли якої мають довжину 1 або p. (1)

Зауважимо, що група D_3 збігається з симетричною групою $S_3 = \langle e, a, b, ab, b^2, ab^2 \rangle$ з кодом $\langle a, b / a^2 = b^3 = e, ab^2 = ba \rangle$. Цілочислове зображення групи S_3 рангу k однозначно задається парою матриць $A, B \in SL(k, \mathbb{Z})$, що задовольняють умови $A^2 = B^3 = E$, $AB^2 = BA$, причому $a \to A$, $b \to B$. Всі незвідні цілочислові зображення групи S_3 описані в [5].

Твердження 1. *Серед усіх незвідних цілочислових зображень групи D_3 (D_3-модулів) рангу 2 реалізуються на $(S^n)^k$, де n — парне число, тільки D_3-модулі типу*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Усього є три типи незвідних цілочислових зображень групи D_3 рангу 2 [5]:

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad 2)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$3)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо зображення групи D_3 типу 1. Нехай $M_1 = \mathrm{res}^{D_3}_{\langle b \rangle} M$. Отже, зображення M_1 циклічної підгрупи $\langle в \rangle$ групи D_3 задається матрицею $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Характеристичний поліном матриці B дорівнює $(\lambda - 1)^2$, тобто матриця B не задовольняє умову (1). З іншого боку, зображення $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ групи D_3 еквівалентне наступному: $A_1 = T^{-1}AT$, $B_1 = T^{-1}BT$, де $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Легко бачити, що дане зображення групи D_3 реалізується на $(S^n)^2$ гомеоморфізмами

$$\widetilde{A}: S^n \times S^n \to S^n \times S^n, \quad \widetilde{A}(x, y) = (y, x), \ \widetilde{B} = id : S^n \times S^n \to S^n \times S^n.$$

Розглянемо зображення групи D_3 типу 2. Нехай $M_1 = \mathrm{res}^{D_3}_{\langle b \rangle} M$. Характеристичний поліном f матриці B дорівнює $\lambda^2 + \lambda + 1$. Отже, $\mathbb{Z}/3$-модуль M_1 не реалізується на $(S^n)^k$, де n — парне число, і тому D_3-модуль M типу 2 не реалізується на $(S^n)^k$ для парних чисел n. Нарешті, цілочислове зображення M групи D_3 типу 3 не реалізується на $(S^n)^k$, де n — парне число. Дійсно, нехай $M_1 = \mathrm{res}^{D_3}_{\langle b \rangle} M$. Характеристичний поліном f матриці B дорівнює $\lambda^2 + \lambda + 1$ і тому $\mathbb{Z}/3$-модуль M_1 не реалізується на $(S^n)^k$, $n = 2l$. Отже, не реалізується на $(S^n)^k$, $n = 2l$, і D_3-модуль M.

2. Нехай G — скінченна група, а $p: EG \to BG$ — універсальне головне розшарування. Якщо X — G-простір, а A — його інваріантний підпростір, то через (X_G, A_G) позначатимемо пару просторів $(EG \times_G X, EG \times_G A)$, а через p_G — розшарування з типовим шаром X, $p_X: X_G = EG \times_G X \to BG$. Далі, нехай $H^*_G(X, A)$ — еквіваріантні когомології пари просторів (X, A), тобто $H^*_G(X, A) = H^*(X_G, A_G)$. Градуйовану алгебру $H^*_G(X, A)$ можна розглядати як градуйований модуль над градуйованим кільцем $H^*(BG)$, вводячи множення наступним чином. Для $x \in H^*(BG)$ і $y \in H^*_G(X, A)$ покладемо $x \cdot y = p^*_X(x) y$, де $\cdot$ — спарювання $H^*_G(X) \otimes H^*_G(X, A) \to H^*_G(X, A)$, що визначається U-добутком [3].

Означення 4. *Точку x G-простору X будемо називати сингулярною, якщо її стабілізатор не є тривіальною підгрупою. Через X^G позначимо множину нерухомих точок дії групи G на X.*

Нехай p і q — взаємно прості непарні числа, $q \mid p - 1$, $(\mathbb{Z}/p)^*$ — мультиплікативна група одиниць кільця $\mathbb{Z}/p$. Ін'єктивний гомоморфізм

$\varphi : \mathbb{Z}/q \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p) = (\mathbb{Z}/p)^*$ задає напівпрямий добуток групи $\mathbb{Z}/p$ на групу $\mathbb{Z}/q$.

Теорема 1. *Нехай p, q — непарні прості числа, $q/p-1$, $G = \mathbb{Z}/p \leftthreetimes \mathbb{Z}/q$ — напівпрямий добуток групи $\mathbb{Z}/p$ на групу $\mathbb{Z}/q$, а X — скінченновимірний G-комплекс, $X \sim_p (S^n)^k$, $n \not\equiv -1 \bmod 2q$ і $k > 0$. Якщо G діє тривіально на когомологіях $H^*(X, \mathbf{F}_p)$, $H^*(X^{\mathbb{Z}/p}, \mathbf{F}_p)$, то має місце ізоморфізм $\mathbb{Z}/2q$-градуйованих модулів $H^*(X^{\mathbb{Z}/p}, \mathbf{F}_p) \cong H^*(X, \mathbf{F}_p)$.*

Доведення. Відомо [3], що $H^*(BG, \mathbf{F}_p) = \mathbf{F}_p[u]$, де $u \in H^{2q}(BG, \mathbf{F}_p)$. Отже, G має періодичні когомології з коефіцієнтами в полі $\mathbf{F}_p$. Далі, поле $\mathbf{F}_p$ можна розглядати як градуйовану алгебру, всі елементи якої сконцентровані в вимірі 0. Аналогічно $H^*(BG, \mathbf{F}_p)$ утворює $\mathbb{Z}/2q$-градуйовану алгебру M, всі елементи якої сконцентровані в члені M_i, $i \equiv 0 \bmod 2q$. Існує очевидний гомоморфізм $t : H^*(BG, \mathbf{F}_p) \to \mathbf{F}_p$ $\mathbb{Z}/2q$-градуйованих алгебр, який відображає твірну u кільця поліномів $\mathbf{F}_p[u]$ в $1 \in \mathbf{F}_p$. Відображення t задає на $\mathbf{F}_p$ структуру $H^*(BG, \mathbf{F}_p)$-модуля.

Розглянемо спектральну послідовність Лере — Серра для розшарування $X_G \xrightarrow{p} BG$ з коефіцієнтами в $\mathbf{F}_p$ [2]. Маємо $H^p(BG, H^q(X, \mathbf{F}_p)) \Rightarrow H^{p+q}(X_G, \mathbf{F}_p)$. Крім того, $E_2^{2tq,0} \cong \mathbf{F}_p$, $q \geqslant 0$, і $E_2^{r,0} = 0$ при $r \not\equiv 0 \bmod 2q$, $E_2^{0,nl} \cong \oplus_{\binom{l}{k}} \mathbf{F}_p$, $l \leqslant k$, і $E_2^{0,j} = 0$ при $j \not\equiv 0 \bmod n$ і при $j > nk$. Оскільки G діє тривіально на $H^*(X, \mathbf{F}_p)$, то з теореми про універсальні коефіцієнти [2] випливає $E_2^{2tq,nl} \cong E_2^{2tq,0} \otimes E_2^{0,nl} \cong \oplus_{\binom{l}{k}} \mathbf{F}_p$, $l \leqslant k$, $t \geqslant 0$, а для всіх інших пар (i, j) $E_2^{i,j} = 0$. У даній спектральній послідовності ненульовими можуть бути лише диференціали d_{sn+1}, $k \geqslant s \geqslant 1$. Але з умов $n \not\equiv -1 \bmod 2q$, $E_2^{0,sn} = \Lambda^s(l_1, \ldots, l_n)$ випливає співвідношення $d_{sn+1}(E_{sn+1}^{0,sn}) = 0$ при $s \geqslant 0$. Отже, $d_{sn+1}(E_{sn+1}^{*,*}) = 0$ і дана спектральна послідовність вироджується. Оскільки, крім того, $H^*(X, \mathbf{F}_p)$ — скінченнопороджений, вільний $\mathbf{F}_p$-модуль, то X цілком негомологічний нулю в X_G і множина елементів $(x_\nu \mid \nu \in J)$, $x_\nu \in H_G^*(X, \mathbf{F}_p)$ таких, що $(j^* x_\nu \mid \nu \in J)$ утворює $\mathbf{F}_p$-базу в $H^*(X, \mathbf{F}_p)$, сама є базою $H^*(BG, \mathbf{F}_p)$-модуля $H_G^*(X, \mathbf{F}_p)$ [3].

Нехай S — мультиплікативна підмножина мономів $\{1, u, u^2, \ldots,\}$ кільця поліномів $\mathbf{F}_p[u]$. Гомоморфізм t, очевидно, продовжується до гомоморфізму $\eta : S^{-1}H^*(BG, \mathbf{F}_p) \cong \mathbf{F}_p[u, u^{-1}] \to \mathbf{F}_p$, оскільки $t(u) = 1$. Це дозволяє розглядати $\mathbf{F}_p$ як $\mathbb{Z}/2q$-градуйований модуль над $S^{-1}H^*(BG, \mathbf{F}_p)$. Нехай $\mathcal{F}(S) = \{H/S \cap \mathrm{Ker}(H_G^*(G/G, \mathbf{F}_p) \to H_G^*(G/H, \mathbf{F}_p)) \neq 0\}$, де $H_G^*(G/G, \mathbf{F}_p) \cong H^*(BG, \mathbf{F}_p)$ і $H_G^*(G/H, \mathbf{F}_p) \cong H^*(BH, \mathbf{F}_p)$. Відомо [3], що $\mathcal{F}(S)$ складається з таких підгруп H групи G, для яких існує $s \in S$, що задовольняє умову $s \cdot H_G^*(G/H, \mathbf{F}_p) = 0$, але множення на s є ізоморфізмом $H^j(B\mathbb{Z}/p, \mathbf{F}_p) \to H^{j+|s|}(B\mathbb{Z}/p, \mathbf{F}_p)$ при $j > 0$ і $\widetilde{H}^*(B\mathbb{Z}/q, \mathbf{F}_p) = 0$. Тому $\mathcal{F}(S) = \{0, \mathbb{Z}/q\}$. Внаслідок теореми про локалізацію [3] маємо ізоморфізм $S^{-1}i^* : S^{-1}H_G^*(X, \mathbf{F}_p) \to S^{-1}H_G^*(X^{\mathbb{Z}/p}, \mathbf{F}_p)$, який індукується включенням $i : X^{\mathbb{Z}/p} \to X$. Отже, має місце наступний ланцюжок ізоморфізмів $\mathbb{Z}/2q$-градуйованих модулів:

$$H_G^*(X, \mathbf{F}_p) \otimes_{H^*(BG,\mathbf{F}_p)} {}_t\mathbf{F}_p \cong S^{-1}H_G^*(X, \mathbf{F}_p) \otimes_{S^{-1}H^*(BG,\mathbf{F}_p)} {}_\eta\mathbf{F}_p \cong$$

$$\cong S^{-1}H_G^*(X^{\mathbb{Z}/p}, \mathbf{F}_p) \otimes_{S^{-1}H^*(BG,\mathbf{F}_p)} {}_\eta\mathbf{F}_p \cong H_G^*(X^{\mathbb{Z}/p}, \mathbf{F}_p) \otimes_{\mathbf{F}_p} S^{-1}H^* \times$$

$$\times (BG, \mathbf{F}_p) \otimes_{S^{-1}H^*(BG,\mathbf{F}_p)} {}_\eta\mathbf{F}_p \cong H^*(X^{\mathbb{Z}/p}, \mathbf{F}_p) \otimes_{\mathbf{F}_p} {}_\eta\mathbf{F}_p \cong H^*(X^{\mathbb{Z}/p}, \mathbf{F}_p).$$

Зауважимо, що модуль $H_G(X, \mathbf{F}_p) \otimes_{H^*(BG,\mathbf{F}_p)} {}_\eta\mathbf{F}_p$ ізоморфний модулю Λ^*, породженому елементами $(e_i \otimes 1') \otimes_t 1$, $i = \overline{1, k}$, де $e_1, \ldots, e_h$ — твірні вільного $\mathbf{F}_p$-модуля $H^n((S^n)^k, \mathbf{F}_p)$, $1'$ — одиниця кільця $H^*(BG, \mathbf{F}_p)$ і 1 —

одиниця поля $\mathbf{F}_p$. Якщо на алгебрі Λ^* ввести $\mathbb{Z}/2q$-градуювання, покладаючи $e_i \in \Lambda^{n \bmod 2q}$, $i = \overline{1, k}$, то одержимо ізоморфізм $\mathbb{Z}/2q$-градуйованих модулів.

Нагадаємо, що кватерніонна група $Q(m)$ порядку $4m$ задається наступними твірними і співвідношеннями $\langle x, y / x^m = y^2, \ y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$.

Теорема 2. *Нехай $Q = Q(2^m)$ — кватерніонна група порядку $4 \cdot 2^m$, X — скінченновимірний Q-комплекс, $X \sim_2 (S^n)^k$, $X^Q \neq \varnothing$ і $x \in X^Q$. Якщо дія групи Q на когомологіях $H^*(X, \mathbf{F}_2)$, $H^*(X^{\mathbb{Z}/2}, \mathbf{F}_2)$ тривіальна, то має місце ізоморфізм $\mathbb{Z}/4$-градуйованих модулів $H^*(X^{\mathbb{Z}/2}, x, \mathbf{F}_2) \cong H^*(X, x, \mathbf{F}_2)$.*

Доведення. Нагадаємо, що $H^*(BQ, \mathbf{F}_2) = \mathbf{F}_2[u]$, де $u \in H^4(BQ, \mathbf{F}_2)$, а всі елементи групи $H^r(BQ, \mathbf{F}_2)$, $r \not\equiv 0 \bmod 4$, нільпотентні [3]. Поле $\mathbf{F}_2$ можна розглядати як $\mathbb{Z}/4$-градуйовану алгебру, всі елементи якої сконцентровані у вимірі 0. Аналогічно кільце $H^*(BQ, \mathbf{F}_2)$ можна розглядати як $\mathbb{Z}/4$-градуйовану алгебру над полем $\mathbf{F}_2$. Означимо гомоморфізм $\mathbb{Z}/4$-градуйованих алгебр $\tau : H^*(BQ, \mathbf{F}_2) \to \mathbf{F}_2$, покладаючи $\tau(u) = 1$ і $\tau(x) = 0$ для всіх $x \in H^r(BQ, \mathbf{F}_2)$, де $r \not\equiv 0 \bmod 4$. Відображення τ задає на полі $\mathbf{F}_2$ структуру $H^*(BQ, \mathbf{F}_2)$-модуля. Нехай $S = \{1, u, u^2, \ldots\}$. Очевидно, що S — мультиплікативна підмножина кільця $H^*(BQ, \mathbf{F}_2)$. Оскільки $\tau(u) = 1$, то існує продовження гомоморфізму τ до гомоморфізму $\mathbb{Z}/4$-градуйованих алгебр $\eta : S^{-1}H^*(BQ, \mathbf{F}_2) \to \mathbf{F}_2$, причому $\eta(u^{-1}) = 1$. Гомоморфізм η задає на $\mathbf{F}_2$ структуру $S^{-1}H^*(BQ, \mathbf{F}_2)$-модуля.

Розглянемо спектральну послідовність Лере — Серра для розшарування $(X_G, x_G) \xrightarrow{p} BG$ з коефіцієнтами в $\mathbf{F}_2$, де $x_G \simeq x \times BG$. Оскільки дія Q на когомологіях $H^*(X, x, \mathbf{F}_2)$ тривіальна, то з теореми про універсальні коефіцієнти одержуємо такі співвідношення: $E_2^{t,0} = 0$ для всіх $t \geqslant 0$, $E_2^{0,nl} \cong \oplus_{\binom{l}{k}} \mathbf{F}_2$, $E_2^{0,r} = 0$ при $r \not\equiv 0 \bmod n$ і при $r > kn$, і $E^{t,nl} \cong H^t(BQ, \mathbf{F}_2) \otimes E_2^{0,nl}$, $1 \leqslant l \leqslant k$. Оскільки $E_2^{s,p} = 0$ при $p < n$, то $d_{n+1}(E_{n+1}^{s,n}) = d_{n+1}(E_2^{s,n}) = 0$, і з мультиплікативності спектральної послідовності випливає $d_{n+1}(E_{n+1}^{*,*}) = d_{n+1}(E_2^{*,*}) = 0$. Отже, дана спектральна послідовність вироджується, тобто $E_2^{*,*} = E_\infty^{*,*}$. З останнього факту і з тривіальності дії групи Q на когомологіях $H^*(BQ, \mathbf{F}_2)$ випливає, що пара (X, x) цілком негомологічна нулю в (X_G, x_G) і модуль $H_G^*(X, x, \mathbf{F}_2)$ є вільним $H^*(BQ, \mathbf{F}_2)$-модулем. Подальші міркування аналогічні відповідним викладкам при доведенні теореми 1. Покладемо $\mathcal{T}(S) = \{H / S \cap \operatorname{Ker}(H_Q^*(Q/Q, \mathbf{F}_2) \to H_Q^*(Q/H, \mathbf{F}_2)) \neq 0\}$. Множина $\mathcal{T}(S)$ складається з таких підгруп H групи Q, для яких існує $s \in S$, що задовольняє умову $s \cdot H_Q^*(Q/H, \mathbf{F}_2) = 0$. Але множення на u є ізоморфізмом $H^r(BH, \mathbf{F}_2) \to H^{r+4}(BH, \mathbf{F}_2)$ для довільної нетривіальної підгрупи H групи Q. Тому $\mathcal{T}(S) = \{0\}$. Застосовуючи теорему про локалізацію [3], одержуємо ізоморфізм

$$H_Q^*(X, x; \mathbf{F}_2) \otimes_{H^*(BQ, \mathbf{F}_2)_\tau} \mathbf{F}_2 \cong S^{-1} H_Q^*(X, x; \mathbf{F}_2) \otimes$$

$$\otimes_{S^{-1}H^*(BQ, \mathbf{F}_2)_\eta} \mathbf{F}_2 \cong S^{-1} H_Q^*(X^{\mathbb{Z}/2}, x; \mathbf{F}_2) \otimes_{S^{-1}H^*(BQ, \mathbf{F}_2)_\eta} \mathbf{F}_2 \cong$$

$$\cong H^*(X^{\mathbb{Z}/2}, x; \mathbf{F}_2) \otimes_{\mathbf{F}_2} S^{-1} H^*(BQ, \mathbf{F}_2) \otimes_{S^{-1}H^*(BQ, \mathbf{F}_2)_\eta} \mathbf{F}_2 \cong$$

$$\cong H^*(X^{\mathbb{Z}/2}, x; \mathbf{F}_2) \otimes_{\mathbf{F}_{2\tau}} \mathbf{F}_2 \cong H^*(X^{\mathbb{Z}/2}, x; \mathbf{F}_2).$$

З іншого боку, $\mathbb{Z}/4$-градуйований модуль $H_G^*(X, x, \mathbf{F}_2) \otimes_{H^*(BQ, \mathbf{F}_2)_\tau} \mathbf{F}_2$ ізоморфний $\mathbb{Z}/4$-градуйованому модулю $M = H^*(X, x; \mathbf{F}_2)$, якщо покласти $M_i = \oplus_{r \geqslant 0} H^{4r+i}(X, x; \mathbf{F}_2)$ $i = \overline{0, 3}$. З останнього зауваження і з наявності ізоморфізму $\mathbb{Z}/4$-градуйованих модулів $H_Q^*(X, x; \mathbf{F}_2) \otimes_{H^*(BQ, \mathbf{F}_2)_\tau} \mathbf{F}_2 \cong H^*(X^{\mathbb{Z}/2}, x; \mathbf{F}_2)$ випливає твердження теореми.

Зауваження 1. Якщо X — скінченновимірний G-комплекс, $G = \mathbb{Z}/p \leftthreetimes \mathbb{Z}/q$, $X \sim_p (S^n)^k$ і $X^G \neq \varnothing$, то справедливий аналог теореми 2.

Зауваження 2. Нехай M — скінченний G-модуль. Позначимо через $\exp M$ таке найменше додатнє число $n \in \mathbb{Z}$, для якого $nx = 0$ при всіх $x \in M$. Далі, нехай C — вільний зв'язний ланцюговий G-комплекс скінченної довжини. Браудер [6] показав, що тоді $|G|$ ділить $\varpi = \prod\limits_{j \geqslant 1} \exp H^j(G, H_j(C))$.

Звідки випливає наступне твердження.

Твердження 2. *Якщо кватерніонна група Q, $Q = Q(2^m)$, діє вільно і клітково на скінченновимірному CW-комплексі X, де $H_*(X, \mathbb{Z}) \cong H_*((S^n)^k, \mathbb{Z})$, з тривіальною дією в гомологіях $H_*(X, \mathbb{Z})$, то n — непарне. Крім того, якщо $n \equiv 1 \bmod 4$, то $k \geqslant 3$.*

Доведення. Маємо $H_{nl}(X, \mathbb{Z}) \cong \oplus_{\binom{l}{k}} \mathbb{Z}$ і $H_t(X, \mathbb{Z}) = 0$ при $t \not\equiv 0 \bmod n$. Оскільки $\oplus_{\binom{l}{k}} \mathbb{Z}$ — пряма сума тривільних модулів $\mathbb{Z}$, то одержимо $H^{nl+1}(Q, \oplus_{\binom{l}{k}} \mathbb{Z}) = \oplus_{\binom{l}{k}} H^{nl+1}(Q, \mathbb{Z})$ і $\exp H^{nl+1}(Q, \oplus_{\binom{l}{k}} \mathbb{Z}) = \exp H^{nl+1}(Q, \mathbb{Z})$. Для $t \not\equiv 1 \bmod n$ маємо $\exp H^t(Q, H_{t-1}(X, \mathbb{Z})) = 1$. Припустимо, що n — парне. Тоді $H^{nl+1}(Q, \mathbb{Z}) = 0$ і $\exp H^{nl+1}(Q, \mathbb{Z}) = 1$. Отже, $\varpi = \prod\limits_{j \geqslant 1} \exp H^{j+1}(Q, H_j(X, \mathbb{Z})) = 1$ і $|Q|$ не ділить ϖ. Ми отримали суперечність. Якщо $n \equiv 1 \bmod 4$ і $k \leqslant 2$, то $\exp H^{n+1}(Q, H_n(X, \mathbb{Z})) = 2$, $\exp H^{2n+1}(Q, H_{2n}(X, \mathbb{Z})) = 1$ і ми знов отримали суперечність, оскільки $|Q| = 4 \cdot 2^m$ не ділить числа ϖ.

Зауваження 3. В теоремі 2 множина $X^{\mathbb{Z}/2}$ збігається з множиною сингулярних точок дії групи Q на X, а в теоремі 1 множина $X^{\mathbb{Z}/p}$ є підмножиною множини сингулярних точок $X^{\mathbb{Z}/p} \cup X^{\mathbb{Z}/q}$ дії групи $G = \mathbb{Z}/p \leftthreetimes \mathbb{Z}/q$ на X.

1. *Adem A.* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ actions on $(S^n)/^k/$ Trans. Amer. Math. Soc.— 1987.— **300**, N **2**.— P. 719—809.
2. *Бредон Г.* Введение в теорию компактных групп преобразований.— М. : Наука, 1980.— 440 с.
3. *Tammo tom Dieck.* Transformation groups.— Berlin; New York: de Gruyter, 1987.— 312 p.
4. *Кэртис Ч., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр.— М. : Наука, 1969.— 668 с.
5. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Целочисленные представления симметрической группы третьей степени // Укр. мат. журн.— 1962.— **14**, № 3.— С. 271—278.
6. *Browder W.* Cohomology and group actions // Invent. math.— 1983.— **71**, N 3.— P. 599—607.

Одержано 06,03,92