

В. І. Андрійчук, канд. фіз.-мат. наук (Львів. ун-т)

Про добуток Тейта — Шафаревича в еліптичних кривих над псевдолокальними полями з полями лишків характеристики 3

Нехай k — загальне локальне поле з псевдоскінченним полем лишків κ , $\text{char } \kappa = 3$, A — еліптична крива, визначена над полем k . Доведено, що добуток Тейта — Шафаревича $H^1(k, A) \times A_k \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ групи $H^1(k, A)$ — головних однорідних просторів кривої A над полем k — і групи A_k її k -раціональних точок не вироджений зліва.

Пусть k — общее локальное поле с псевдоконечным полем вычетов κ , $\text{char } \kappa = 3$, A — эллиптическая кривая, определенная над полем k . Доказано, что произведение Тейта — Шафаревича $H^1(k, A) \times A_k \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ группы $H^1(k, A)$ — главных однородных пространств кривої A над полем k — и группы A_k ее k -рациональных точек невырождено слева.

Нехай A — еліптична крива, визначена над локальним полем k . І. Р. Шафаревич [1] і Тейт [2] означили добуток

$$H^1(k, A) \times A_k \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \quad (1)$$

групи $H^1(k, A_k)$ — головних однорідних просторів еліптичної кривої A над полем k — і групи A_k k -раціональних точок кривої A і довели двосторонню невиродженість цього добутку з точністю до p -компонент груп, що входять в (1), де p — характеристика поля лишків поля k .

О. М. Введенський [3] довів двосторонню невиродженість добутку (1) без обмеження на p -компоненти. Доведення ґрунтувалося на прямому обчисленні добутку Тейта—Шафаревича для простих циклічних розширень поля k . Крім того, О. М. Введенський поставив питання про пошук класу загальних локальних полів (тобто повних відносно дискретного нормування полів з квазіскінченними [4] полями лишків), для яких добуток Тейта—Шафаревича в еліптичних кривих є невиродженим зліва. У роботі [5] показано, що таким класом є клас псевдолокальних полів, тобто загальних локальних полів з псевдоскінченними за Аксом [6] полями лишків. А саме, у роботі [5] доведена невиродженість зліва добутку Тейта—Шафаревича в еліптичних кривих, визначених над псевдолокальним полем k , характеристика поля лишків якого відмінна від 2 і 3. Мета даної роботи — доведення невиродженості зліва добутку Тейта—Шафаревича у випадку, коли характеристика поля лишків псевдолокального поля k дорівнює 3. Випадок характеристики 2 буде розглянутий у наступній роботі.

Отже, далі k означає псевдолокальне поле з полем лишків κ , $\text{char } \kappa = 3$. Справедлива така теорема.

Т е о р е м а. *Добуток Тейта—Шафаревича невироджений зліва для еліптичних кривих A над полем k .*

Основна відмінність розглянутого у теоремі випадку від ситуації, коли $\text{char } \kappa \neq 2, 3$, полягає у тому, що у цьому випадку не кожна крива типу (с) за Нероном над k стає ізоморфною кривій типу (а) або (б) за Нероном над слабо розгалуженим розширенням поля k . Якщо $\text{char } \kappa = 3$, то криві типів (c_1) , (c_2) , (c_3) і (c_4) за Нероном стають ізоморфними кривій типу (а) за Нероном над дико розгалуженими розширеннями основного поля k . Тому виникає необхідність доводити невиродженість зліва добутку Тейта—Шафаревича

$$H^1(\text{Gal}(l/k), A_l) \times H^0(\text{Gal}(l/k), A_l) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \quad (T_2)$$

для простих циклічних дико розгалужених розширень l/k .

Доведення теореми розбивається на два кроки. Перший крок (твердження 1) — доведення невідродженості зліва добутку Тейта—Шафаревича для кривих A типу (а) або (б) над k . Другий крок (твердження 2) — доведення невідродженості зліва для кривих типу (с) за Нероном.

Нехай \mathfrak{O}_k — кільце цілих поля k , λ — простий елемент кільця \mathfrak{O}_k , U_k — група одиниць кільця \mathfrak{O}_k . Якщо l/k — скінченне розширення Галуа поля k , то відповідні об'єкти поля l позначимо через \mathfrak{O}_l , Π , U_l . λ означає поле лишків поля l . Якщо $a \in \mathfrak{O}_k$, то a мод λ позначимо через \bar{a} . $g = \text{Gal}(l/k)$ — група Галуа розширення l/k . Для g -модуля X через $H^n(g, X)$, $n \in \mathbb{Z}$, позначимо когомології Тейта групи g з коефіцієнтами в X .

Нехай A — еліптична крива над полем k ;

$$y^2 = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6, \quad a_i \in \mathfrak{O}_k \quad (2)$$

— рівняння Вейерштрасса кривої A , A_k — група k -раціональних точок кривої A , A'_k — редукція групи A_k по мод λ , Γ_k — ядро редукції — підгрупа Лютца групи A_k , $\Gamma_k \supset \Gamma_k^2 \supset \dots$ — стандартна фільтрація групи Γ_k . Якщо $t \in \pi \mathfrak{O}_k$, то через $\varepsilon(t)$ позначимо $(1 + a_2t^2 + a_4t^4 + a_6t^6)^{1/2} = 1 + \frac{a_2}{2}t^2 + \dots$. Три крапки тут і далі означають члени вищого порядку.

Нагадаємо потрібні нам властивості добутку Тейта—Шафаревича в еліптичних кривих над загальним локальним полем, сформульовані Тейтом [2] у вигляді діаграм, для яких О. М. Введенським у роботі [3] прийняті позначення (r_1) , (r_2) і (r_3) .

Має місце комутативна діаграма з точними рядками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H^1(g, A_l) & \rightarrow & H^1(k, A) & \rightarrow & H^1(l, A) \\ & & \downarrow \theta_{l/k} & & \downarrow \theta_k & & \downarrow \theta_l \\ 0 & \rightarrow & H^0(g, A_l)^* & \rightarrow & A'_k & \rightarrow & A'_l \end{array} \quad (r_2)$$

нижній рядок якої є двоїстим за Понтрягіном до точної послідовності $A_l \xrightarrow{N_{l/k}} A_k \rightarrow H^0(g, A_l) \rightarrow 0$, де $N_{l/k}$ — норменний гомоморфізм, $\theta_{l/k}$, θ_k , θ_l — гомоморфізми, індуковані добутком Тейта—Шафаревича.

Розглянемо башту скінчених розширень Галуа з відповідними групами Галуа $k \xrightarrow{g} l \xrightarrow{h} l_1$, де g — циклічна. Має місце комутативна діаграма

ма з точними рядками

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \rightarrow & H^1(g, A_l) & \rightarrow & H^1(g_1, A_{l_1}) & \rightarrow & H^1(h, A_{l_1})^g & \rightarrow & H^0(g, A_l) & & \\ & & \downarrow \theta_{l/k} & & \downarrow \theta_{l_1/k} & & \downarrow \theta_l & & \downarrow (-1) \omega_{l/k} & & \\ 0 & \rightarrow & H^0(g, A_l)^* & \rightarrow & H^0(g_1, A_{l_1})^* & \rightarrow & (H^0(h, A_{l_1})^*)^g & \rightarrow & H^1(g, A_l)^* & & \end{array} \quad (r_3)$$

нижній рядок якої є двоїстим за Понтрягіном до точної послідовності дискретних абелевих груп

$$H^1(g, A_l) \rightarrow H_0(g_1, H^0(h, A_{l_1})) \rightarrow H^0(g_1, A_{l_1}) \rightarrow H^0(g, A_l) \rightarrow 0.$$

У діаграмі (r_3) $\theta_{l/k}$, $\theta_{l_1/k}$, θ_l — гомоморфізми, індуковані добутком Тейта—Шафаревича, $(-1) \omega_{l/k}$ — помножене на -1 обмеження гомоморфізму $\omega_k: A_k \rightarrow H^1(k, A)^*$, двоїстого за Понтрягіном до θ_k .

Наслідуючи О. М. Введенського [3], перевірку невідродженості добутку Тейта—Шафаревича

$$H^1(g, A_l) \times H^0(g, A_l) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

для простого циклічного розширення l/k будемо проводити таким способом: нехай коцикл f — представник деякого класу $H^1(g, A_l)$ і $a_k \in A_k$ — пред-

ставник деякого класу $H^0(g, A_1)$. Нехай $g = \{1, \sigma, \dots, \sigma^{n-1}\}$, φ — функція з поля $k(A)$ функцій на кривій A над k з дивізором $f(\sigma) + \sigma f(\sigma) + \dots + \sigma^{n-1}f(\sigma) - n\infty$ (∞ — нуль групи A), а $u \in A_n$ таке, що $a + u$ (додавання на A) і $u \neq f(\sigma)$, ∞ . Розглядувані класи не ортогональні за Тейтом—Шафаревичом тоді і тільки тоді, коли $\frac{\varphi(a+u)}{\varphi(u)}$ не лежить в N_{g/l^*} .

Твердження 1. Добуток Тейта—Шафаревича (1) не вироджений зліва для еліптичних кривих типів (а) і (б) за Нероном, визначених над псевдолокальним полем k з полем лишків характеристики 3.

Доведення твердження 1 опирається на леми 1 і 2.

Лема 1. Нехай A — еліптична крива над полем k .

а). Якщо A — крива типу (а) за Нероном і l/k — скінченне нерозгалужене розширення Галуа, то групи $H^i(g, A_1)$, $i \in \mathbb{Z}$, тривіальні.

б). Якщо A — крива типу (а) за Нероном і l/k — чисто слабо розгалужене розширення простого степеня q , то добуток (T_1) не вироджений зліва.

в). Якщо A — крива типу (а) за Нероном з інваріантом Гассе редукції рівним нулю і l/k — дико розгалужене розширення степеня 3, то добуток (T_1) не вироджений зліва.

г). Якщо A — крива типу (б) за Нероном, то добуток Тейта—Шафаревича $H^1(k, A) \times A_n \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ не вироджений зліва.

Доведення. Випадки а) і б) — це відповідно леми 1 і 2 роботи [5], які справедливі без обмежень на характеристику поля лишків.

Твердження випадку в) справедливе, навіть коли поле k є довільним загальним локальним полем. Це доводиться за допомогою очевидної незначної модифікації міркувань лем 4 і 5 роботи [3], які справедливі і у випадку, коли характеристика поля лишків поля k дорівнює 3.

Крива типу (б) за Нероном над k — це крива з рівнянням

$$y^2 = x^3 + \varepsilon x^2 + a_4 x + \delta \pi^n, \quad \varepsilon, \delta \in U_k, \quad a_4 = \delta_1 \pi^s, \quad s > \frac{n}{2}, \quad \delta_1 \in U_k.$$

Якщо $\sqrt{\varepsilon} \in k$, остання крива є кривою з мультиплікативною редукцією (типу (II) в термінології роботи [3]). Всі міркування, за допомогою яких у роботі [3] доведено не виродженість зліва добутку Тейта—Шафаревича для кривих з мультиплікативною редукцією визначених над довільним загальним локальним полем k у припущенні, що $\text{char } k > 3$ справедливі після очевидної модифікації у випадку, коли $\text{char } k = 3$. Якщо $\sqrt{\varepsilon} \notin k$, то крива типу (б) ізоморфна кривій з мультиплікативною редукцією над полем $l = k(\sqrt{\varepsilon})$. Незначна модифікація міркувань лем 4 з [4] завершує доведення п. г) леми 1.

Незважаючи на те, що доведення леми 2 теж є модифікацією на випадок $\text{char } k = 3$ ситуації леми 3 роботи [5], наведемо його повністю. Справа в тому, що у цьому випадку явне обчислення добутку Тейта—Шафаревича особливо просте і дає хорошу ілюстрацію прийому, за допомогою якого з не виродженості добутку Тейта—Шафаревича в еліптичних кривих над локальними полями одержується не виродженість цього добутку в еліптичних кривих над псевдолокальними полями.

Лема 2. Якщо A — крива типу (а) за Нероном з інваріантом Гассе редукції, відмінним від нуля, і l/k — дико розгалужене розширення Галуа степеня 3, то добуток Тейта—Шафаревича

$$H^1(g, A_1) \times H^0(g, A_1) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad (T_1)$$

не вироджений зліва.

Доведення. Оскільки інваріант Гассе редукції кривої A не дорівнює нулю, то у рівнянні (2) кривої A $\bar{a}_2 \neq 0$.

Припустимо, що нетривіальна точка $(e, 0)$ другого порядку кривої A належить до A_n . Якщо нетривіальний клас групи $H^1(g, A_1)$ представлений коциклом $f(\sigma) = \gamma \in \Gamma_1$ (тут і далі σ означає твірний елемент групи

$\mathfrak{g} = \text{Gal}(l/k)$, то γ визначає нетривіальний клас у $\Gamma_l^m/\Gamma_l^{m+1}$, інакше кажучи, γ визначається параметром $\mu\Gamma^m$, $\mu \in U_l$, m — номер останньої нетривіальної групи галуження розширення l/k . Виберемо γ так, щоб $\gamma \notin \Gamma_h$, додавши до γ (якщо $\gamma \in \Gamma_h$) елемент $z(\sigma - 1)\Gamma_l$, який не лежить у Γ_h .

Розглянемо функцію на кривій A з дивізором $\gamma + \sigma\gamma + \sigma^2\gamma - 3\infty$. Вона має вигляд $y - \alpha_1x - \alpha_0$, де α_0 і α_1 — розв'язки системи рівнянь

$$T^{-2}\alpha_1 + \alpha_0 = T^{-3}\varepsilon(T), \quad (\sigma T)^{-2}\alpha_1 + \alpha_0(\sigma T)^{-3}\varepsilon(\sigma T). \quad (3)$$

Система (3) є системою Крамера ($\gamma \notin \Gamma_h$) і тому має єдиний розв'язок ($N_{l/k}$ — норменний гомоморфізм розширення l/k) $\alpha_0 = -N_{l/k}(T)^{-1}(1 + \dots)$, $\alpha_1 \in \pi\mathfrak{O}_k$.

Неважко показати, що добуток за Тейтом — Шафаревичом класу з представником $f(\sigma) = \gamma$ і довільного класу з $H^0(\mathfrak{g}, A_l)$, представником якого є точка з Γ_h , дорівнює 0. Знайдемо цілу точку $(\xi, \eta) \in A_h \setminus \Gamma_h$ таку, щоб добуток за Тейтом — Шафаревичом класу $\tilde{f}(\sigma)$ і класу з $H^0(\mathfrak{g}, A_l)$, представником якого є різниця $(\xi, \eta) \dot{-} (e, 0)$ ($\dot{+}$ — додавання, а $\dot{-}$ — віднімання точок у розумінні закону додавання на кривій A), був відмінний від нуля, тобто щоб елемент

$$\frac{(y - \alpha_1x - \alpha_0)((\xi, \eta) \dot{-} (e, 0) \dot{+} (e, 0))}{(y - \alpha_1x - \alpha_0)((e, 0))} = 1 - \alpha_0^{-1}\eta + \dots = 1 + N_{l/k}(T)\eta + \dots \quad (4)$$

не належав до $N_{l/k}(U_l)$.

Для цього зауважимо, що $T = \mu\Gamma^m$ задовольняє співвідношення $\text{Tr}_{l/k}(\mu\Gamma^m) + a_2N_{l/k}(\mu\Gamma^m) \equiv 0 \pmod{\pi^{m+1}}$ (тут $\text{Tr}_{l/k}$ і $N_{l/k}$ — слід і норма розширення l/k), отже, $N_{l/k}(\mu\Gamma^m) \equiv -a_2^{-1}\text{Tr}_{l/k}(\mu\Gamma^m) \pmod{\pi^{m+1}}$. Таким чином, праву частину (4) можна записати у вигляді

$$1 - a_2^{-1}\text{Tr}(\mu\Gamma^m) + \dots \quad (5)$$

З іншого боку, для $d \in \mathfrak{O}_k$ маємо

$$N_{l/k}(1 + d\mu\Gamma^m) = 1 + d\text{Tr}_{l/k}(\mu\Gamma^m) + d^3N_{l/k}(\mu\Gamma^m) + \dots \\ \dots = 1 + (d - a_2^{-1}d^3)\text{Tr}(\mu\Gamma^m) + \dots \quad (6)$$

Порівнюючи (5) і (6), одержуємо: для того, щоб добуток за Тейтом — Шафаревичом класів з представниками $f(\sigma) = \gamma$ і $a_h \in A_h \setminus \Gamma_h$ був відмінний від нуля, повинна існувати точка $(\xi, \eta) \in A_h \setminus \Gamma_h$ така, що $\bar{\eta} \neq \bar{d}^3 = -\bar{a}_2\bar{d}_2$ для всіх $\bar{d} \in \mathfrak{x}$ ($\bar{a} = a \pmod{\pi}$). Таким чином, твердження про невідродженість зліва добутку Тейта — Шафаревича в даній ситуації формулюється в термінах елементарних висловлень про поле лишків і, оскільки за невідродженістю добутку Тейта — Шафаревича в еліптичних кривих над локальними полями це висловлення справедливе для скінченних полів, за результатами роботи [6] воно справедливе і для псевдоскінченних полів. Звідси і випливає невідродженість добутку (7) у даній ситуації.

У випадку, коли представник нетривіального класу групи $H^1(\mathfrak{g}, A_l)$ має своїм представником коцикл $f(\sigma) = a_l \in A_l \setminus \Gamma_l$, коефіцієнти α_0 і α_1 функції ϕ належать до \mathfrak{O}_k , тому що вони задовольняють рівність

$$y^2 - (\alpha_1x + \alpha_0)^2 = \prod_{i=0}^2 (x - \sigma^i(\text{абсц. } a_l)).$$

Виберемо точку $(\xi, \eta) \in A_h \setminus \Gamma_h$ так, щоб $(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \neq \bar{a}_l$ (або $-\bar{a}_l$) і щоб елемент $\bar{\xi}$ не був розв'язком рівняння

$$4(x^3 + \bar{a}_2x^2 + \bar{a}_4x + \bar{a}_8)\bar{\alpha}_1^2 = (2\bar{a}_2x + \bar{a}_4)^2.$$

Нехай $(\xi + \Delta\xi, \eta + \Delta\eta) = (\xi, \eta) + \gamma_k$ — сума точок (ξ, η) і $\gamma_k \in \Gamma_k$, де γ_k визначений значенням t параметра з $v_k(t) = m(v_k - \text{нормування поля } k)$. Добуток класів з $H^1(g, A_1)$ і $H^0(g, A_1)$ з представниками $\tilde{f}(\sigma)$ і $\gamma_k \in$ класом $H^0(g, l^*)$ з представником

$$\frac{\eta + \Delta\eta - \alpha_1(\xi + \Delta\xi) - \alpha_0}{\eta - \alpha_1\xi - \alpha_0} = 1 + (\eta - \alpha_1\xi - \alpha_0)^{-1}(2a_2\xi + a_4 + 2\alpha_1\eta)t + \dots \quad (7)$$

Клас з представником (7) відмінний від нуля для тих значень параметру t , для яких вираз (7) не є нормою. Такі значення t існують згідно з [4].

Якщо нетривіальна точка $(e, 0)$ другого порядку кривої A не належить до A_k , то потрібно розглянути скінченне нерозгалужене розширення \tilde{k} поля k таке, що $A_{\tilde{k}}$ містить нетривіальну точку другого порядку. Доведення у цьому випадку завершується застосуванням діаграми (r_3) так, як це вказано в [3]. Лема 2 доведена.

Доведення твердження 1 впливає з лем 1 і 2 та факту розв'язності груп Галуа загальних локальних полів за допомогою редукційної діаграми (r_3) .

Твердження 2. Добуток Тейта—Шафаревича невідроджений зліва для еліптичних кривих типу (c) за Нероном, визначених над псевдолокальним полем k з полем лишків характеристики 3.

Для доведення твердження 2 нам потрібні такі леми.

Лема 3. Якщо A — еліптична крива типу (c_2) , (c_4) , (c_5) або (c_7) над полем k , то добуток Тейта—Шафаревича невідроджений зліва для кривої A .

Доведення є нескладною модифікацією міркувань тверджень 2 і 3 (див. §§ 2, 3) роботи [5].

Лема 4. Якщо добуток Тейта—Шафаревича невідроджений зліва для еліптичних кривих типу (c_3) над k , то він невідроджений зліва і для еліптичних кривих типів (c_1) , (c_6) і (c_8) над k .

Доведення. Кожна крива типу (c_1) , (c_6) або (c_8) ізоморфна кривій типу (c_3) над слабо розгалуженим розширенням Галуа l поля k , причому $[l : k] = 2^s$, $s \leq 5$. Легко переконатися в тому, що $H^i(\text{Gal}(l/k), A_i) = 0$. Тому справедливість леми 4 впливає з діаграми (r_2) .

Лема 5. Якщо добуток Тейта—Шафаревича невідроджений зліва для еліптичних кривих типу (c_3) , рівняння Вейерштраса $y^2 = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$, $a_i \in \mathcal{D}_k$, яких задовольняють умови

$$a_6, \Delta \in k^2, \quad v_k(\Delta) > 12, \quad v_k(a_2) \geq 6, \quad 4 \mid v_k(\Delta) \quad (8)$$

(тут $\Delta = -(4a_4^3 + 27a_6^2 + 4a_2^3a_6 - 18a_2a_4a_6 - a_2^2a_4^2)$ — дискримінант кривої A , v_k — нормування поля k), то він невідроджений і для всіх кривих типу (c_3) за Нероном над k .

Доведення. Нехай A — довільна еліптична крива типу (c_3) над k ;

$$A: y^2 = x^3 + a_2x^2 + a_4x + \delta l^2, \quad v_k(a_2) \geq 1, \quad v_k(a_4) \geq 2, \quad \delta \in U_k.$$

Нехай $\Delta = \delta_1 l^n$, $\delta_1 \in U_k$, $n \in \mathbb{N}$, ξ — первісний корінь 16-го степеня з одиниці. Розглянемо башту полів

$$k \longrightarrow \tilde{k} = k(\xi, \sqrt{\delta_1}, \sqrt{\delta}) \longrightarrow l = \tilde{k}(\sqrt[16]{\pi}).$$

Над полем l крива A ізоморфна кривій C типу (c_3) з рівнянням

$$v^2 = u^3 + a'_2u^2 + a'_4u + a'_6, \quad a'_{2i}(\sqrt[16]{\pi})^{10i} = a_{2i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

причому коефіцієнти кривої C над полем l та її дискримінант задовольняють умови (8). Тому за нашим припущенням добуток Тейта—Шафаревича невідроджений зліва для кривої C над полем l . Далі

$$H^i(\text{Gal}(l/\tilde{k}), A_i) \cong H^i(\text{Gal}(l/\tilde{k}), C_i), \quad H^i(\text{Gal}(l/\tilde{k}), C_i) \cong H^i(\text{Gal}(l/\tilde{k}), C_i^0),$$

оскільки $\pi_0(C_l) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (тут C_l^0 — підгрупа точок групи C_l , що редукується в неособливі, $\pi_0(C_l) = C_l/C_l^0$). $H^i(\text{Gal}(\bar{l}/k), C_l^0) = 0$ тому, що всі фактори фільтрації $C_l^0 \supset \Gamma_1 \supset \Gamma_2^0 \supset \dots$ ізоморфні λ -адитивній групі поля лишків поля l . Отже, $H^i(\text{Gal}(\bar{l}/k), A_l) = 0$, і діаграма (r_2) , записана для розширення \bar{l}/k , показує, що добуток Тейта — Шафаревича не вироджений зліва для кривої A над полем k . Аналогічні міркування показують, що цей добуток не вироджений зліва для кривої A і над полем k .

Лема 6. Нехай еліптична крива A типу (c_2) над k задовольняє умови леми 5 і l — поле розкладу многочлена $x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$. Над полем l крива A ізоморфна кривій B з не виродженою редукцією: $A \xrightarrow{\sim} B$. Якщо B_l і $\Gamma(B_l)$ — відповідно група l -раціональних точок кривої B та ядро редукції групи B_l , то позначимо через B_l^α та $\Gamma(B_l^\alpha)$ \mathfrak{g} -модулі з наведеною за допомогою ізоморфізму α дією групи $\mathfrak{g} = \text{Gal}(\bar{l}/k)$. Тоді $H^i(\mathfrak{g}, A_l) \cong \cong H^i(\mathfrak{g}, \Gamma(B_l^\alpha))$.

Доведення. Многочлен $x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$ незвідний над k і поле розкладу l цього многочлена є простим циклічним розширенням Галуа поля k , $[l:k] = 3$. Якщо $\bar{\Pi}$ — корінь многочлена $x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$, то $v_l(\bar{\Pi}) = 2$. Зафіксуємо прості елементи μ і $\bar{\mu}$ полів k і l так, наприклад, щоб $\mu^2 = a_6$ і $\bar{\mu} = \mu^{-1}\bar{\Pi}^2$.

Нехай m — номер останньої нетривіальної групи галуження розширення \bar{l}/k , σ — твірна групи \mathfrak{g} . Тоді

$$\sigma\Pi = \Pi + \mu\Pi^{m+1}, \quad \sigma\bar{\Pi} = \bar{\Pi} + 2\mu\Pi^{m+2} + \dots, \quad \sigma^2\bar{\Pi} = \bar{\Pi} + 4\mu\Pi^{m+2} + \dots, \quad \mu \in U_l,$$

і легко підрахувати, що $v_k(\Delta) = 2(m+2)$.

Над полем l рівняння кривої A можна записати у вигляді

$$y^2 = (x - \bar{\Pi})(x - \bar{\Pi} - 2\mu\Pi^{m+2} + \dots)(x - \bar{\Pi} - 4\mu\Pi^{m+2} + \dots),$$

де $m+2$ парне, тому що $4|v_k(\Delta)$. Розглянемо ізоморфізм α над полем l кривої A і кривої B з рівнянням

$$v^2 = u(u - 2\mu + \dots)(u - 4\mu + \dots)$$

такій, що

$$\alpha(x, y) = \left(\frac{x - \bar{\Pi}}{\Pi^{m+2}}, \frac{y}{\frac{3(m+2)}{2}\Pi} \right) = (u, v).$$

Крива B є кривою з не виродженою редукцією над полем l . Запишемо для кривої B точну послідовність редукції

$$0 \rightarrow \Gamma(B_l^\alpha) \rightarrow B_l^\alpha \rightarrow B_x^\alpha \rightarrow 0. \quad (9)$$

У цій послідовності $\Gamma(B_l^\alpha)$, B_l^α , B_x^α — \mathfrak{g} -модулі з наведеною за допомогою ізоморфізму α дією групи \mathfrak{g} : для $\sigma \in \mathfrak{g}$

$$\sigma_\alpha(u, v) = \left(\left(\sigma(u) + \frac{\sigma\bar{\Pi} - \bar{\Pi}}{\sigma\Pi^{m+2}} \right) \left(\frac{\sigma\Pi}{\Pi} \right)^{m+2}, \sigma(v) \left(\frac{\sigma\Pi}{\Pi} \right)^{\frac{3(m+2)}{2}} \right).$$

Дослідимо групи $H^i(\mathfrak{g}, B_l^\alpha) \cong H^i(\mathfrak{g}, A_l)$. Для цього обчислимо групи $H^i(\mathfrak{g}, B_x^\alpha)$. Якщо $(u, v) \in B_x^\alpha$, то $\sigma_\alpha(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u} + 2\bar{\mu}, \bar{v})$ і неважко показати, що $H^i(\mathfrak{g}, B_x^\alpha) = 0$. Звідси і з точної послідовності когомологій, відповідної точній послідовності (9), випливає $H^i(\mathfrak{g}, A_l) \cong H^i(\mathfrak{g}, \Gamma(B_l^\alpha))$. Лема доведена.

Нехай $\Gamma(B_l) \supset \Gamma^2(B_l) \supset \dots$ — стандартна фільтрація Лютца групи $\Gamma(B_l)$. Позначивши $\alpha^{-1}(\Gamma^i(B_l))$ через $\Gamma^i(A_l)$, маємо $H^i(\mathfrak{g}, A_l) \cong \cong H^i(\mathfrak{g}, \Gamma(A_l))$.

Лема 7. Якщо у позначеннях лемі 6 група $H^1(\mathfrak{g}, A_l)$ має нетривіальний елемент, представлений коциклом $f(\sigma) = \gamma \in A_l$, для якого $\gamma \notin \Gamma^{\frac{m+2}{2}+1}(A_l)$, то існує точка $\gamma_k \in \Gamma_k$ така, що добуток за Тейтом—Шафаревичом класів з представниками γ і γ_k відмінний від нуля.

Доведення. Якщо $\gamma \in \Gamma^{\frac{m+2}{2}+1}(A_l)$, то $\gamma = (d, e)$ — ціла точка кривої A . Нехай $y = \alpha_1 x - \alpha_0$ — функція на A з дивизором $\gamma + \sigma\gamma + \sigma^2\gamma = -3\infty$. α_0 і α_1 задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} a_2 + \text{Tr } d = \alpha_1^2, \\ a_4 + \text{Tr } (d\sigma d) = 2\alpha_0\alpha_1, \\ a_6 + N(d) = \alpha_0^2 \end{cases}$$

(Tr і N — слід і норма розширення l/k), тому $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathfrak{O}_k$. Виберемо точку $(\xi, \eta) \in A_k^0 \setminus \Gamma_k$ так, щоб $v_k(3\xi^2 + 2a_2\xi + a_4 - 2\alpha_1\eta) = s < m$ і $(\xi, \eta) \neq (\bar{d}, \bar{e})$. Такий вибір точки (ξ, η) завжди можливий. Справді, якщо $s = \min\{v_k(3), v_k(a_2), v_k(a_4), v_k(\alpha_1)\}$, то $s < m$, тому що в іншому випадку $\min\{v_k(3), v_k(a_2), v_k(a_4)\} \geq m$ і $2(m+2) = v_k(\Delta) \geq 3m \Rightarrow m \leq 4$, що неможливо, оскільки $2(m+2) > 12$. Виберемо $(\xi, \eta) \in A_k'$ так, щоб (ξ, η) не задовольняла рівняння

$$((3 \bmod \pi^s) \xi^2 + (2a_2 \bmod \pi^s) \xi + a_4 \bmod \pi^s) - 4(\alpha_1 \bmod \pi^s)^2 \eta^2 = 0 \quad (10)$$

і щоб $\bar{\xi} \neq \bar{e}$. Підніmemo (ξ, η) до точки $(\xi, \eta) \in A_k^0 \setminus \Gamma_k$, яка задовольняє всі потрібні умови.

Розглянемо добуток за Тейтом—Шафаревичом класу $H^1(\mathfrak{g}, A_l)$ з представником $f(\sigma) = \gamma$ і класу $H^0(\mathfrak{g}, A_l)$, представником якого є точка $\gamma_k = (t^{-2}, \varepsilon(t)t^{-3})$. Позначивши через $(\xi + \Delta\xi, \eta + \Delta\eta)$ суму тільки що вибраної точки (ξ, η) і точки γ_k , одержимо, що цей добуток є класом групи $H^0(\mathfrak{g}, l^*)$ з представником

$$\begin{aligned} \frac{(y - \alpha_1 x - \alpha_0)((\xi + \Delta\xi, \eta + \Delta\eta))}{\eta - \alpha_1 \xi - \alpha_0} &= 1 + (\eta - \alpha_1 \xi - \alpha_0)^{-1} \times \\ &\times (3\xi^2 + 2a_2\xi + a_4 - 2\alpha_1\eta)t + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Підбравши тепер значення параметру t так, щоб $v_k(t) = m - s$ і щоб останній вираз (11) не був нормою, що завжди можливо [4], одержуємо, що добуток розглянутих класів відмінний від нуля.

Залишилося дослідити випадок, коли представники класів групи $H^1(\mathfrak{g}, A_l)$ мають вигляд $f(\sigma) = \gamma \in \Gamma^{\frac{m+2}{2}+1}(A_l)$. Це дослідження ми проводимо в останніх двох лемах. Далі позначаємо $\Gamma^{\frac{m+2}{2}+n}(A_l)$ через Γ_l^n .

Якщо коцикл $f(\sigma) = \gamma \in \Gamma_l^n$ представляє клас групи $H^1(\mathfrak{g}, A_l)$, то $\gamma = (T^{-2}, \varepsilon(T)T^{-3})$, $T = \rho\pi^n$, $\rho \in U_l$. Нехай $y = \alpha_1 x - \alpha_0$ — функція на A з дивизором $\gamma + \sigma\gamma + \sigma^2\gamma = -3\infty$. Легко бачити, що α_0 і α_1 задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} (a_6 - \alpha_0^2)N(T)^2 + 1 = 0, \\ (a_4 - 2\alpha_0\alpha_1)N(T)^2 = \text{Tr}(T^2) \\ (a_2 - \alpha_1^2)N(T)^2 = \text{Tr}(T^2\sigma T^2) \end{cases}$$

(N і Tr — норма і слід в l/k), і, таким чином, $\alpha_0 N(T) \in U_k$, $\alpha_1 \in \pi\mathfrak{O}_k$.

Лема 8. Якщо коцикл $f(\sigma) = \gamma \in \Gamma_l^n$ і $n < m - \min\{v_k(3), v_k(a_2), v_k(a_4), v_k(\alpha_1)\}$, то існує точка $\gamma_k \in \Gamma_k$ така, що добуток за Тейтом—Шафаревичом класу коциклу $f(\sigma)$ і класу точки γ_k відмінний від нуля.

Доведення. Візьmemo точку $(\xi, \eta) \in A_k^0 \setminus \Gamma_k$ так, щоб (ξ, η) не задовольняла (10). Добутком за Тейтом—Шафаревичом класів з представниками $f(\sigma)$ і $\gamma_k = (t^{-2}, \varepsilon(t)t^{-3}) \in \Gamma_k$ є клас групи $H^0(\mathfrak{g}, l^*)$ з представ-

$$\frac{(y - \alpha_1 x - \alpha_0)((\xi, \eta) + \gamma_h)}{\eta - \alpha_1 \xi - \alpha_0} = 1 + (\alpha_0 N(T) + \alpha_1 \xi N(T) - \eta N(T))^{-1} \times \\ \times (3\xi^2 + 2\alpha_2 \xi + a_4 - 2\alpha_1 \eta) t N(T) + \dots,$$

який не є нормою для відповідного значення параметра t з $v_k(t) = m - n - \min\{v_k(3), v_k(a_2), v_k(a_4), v_k(\alpha_1)\}$. Тому добуток розглянутих класів відмінний від нуля.

Лема 9. Якщо у позначеннях леми 6 клас групи $H^1(\mathfrak{g}, A_1)$ має своїм представником коцикл $f(\sigma) = \gamma = (T^{-2}, \varepsilon(T)T^{-3})$, причому $v_i(T) \geq m - \min\{v_h(3), v_h(a_2), v_h(a_4), v_h(\alpha_1)\}$, то цей клас тривіальний.

Доведення. Обчислимо спочатку $(\sigma_\alpha - 1)\Gamma(B_1^n)$. Якщо $\gamma' \in \Gamma^s(B_1)$, γ' визначене параметром $T' = d\Pi^s$, то параметром $\sigma_\alpha \gamma' = \gamma' \in \text{dSp}\Pi^{m+s} + \dots$. Звідси випливає, що елементи з $(\sigma - 1)\Gamma(A_1)$ цілком заповнюють фактори $\Gamma_i^n / \Gamma_i^{n+1}$ для $n \geq m/2$, $n \not\equiv m \pmod{3}$.

Вияснимо тепер, використовуючи методи роботи [7], які елементи $\gamma \in \Gamma_i$ можуть лежати в ядрі нормального гомоморфізму $N: \Gamma_i \rightarrow \Gamma_k$. Для цього за допомогою безпосереднього обчислення перекоонуємося, що третя ітерація формальної групи, відповідної кривій A , має вигляд

$$9(t + \dots) + 4a_2 t^3 + (a_4^2 - 4a_2 a_6) t^9 + \dots \quad (12)$$

(три крапки означають члени з вищими степенями t), причому коефіцієнти при степенях t в пропущених в (12) членах в дужках мають норму в k не меншу ніж одиниця, а коефіцієнти при степенях t в інших пропущених членах мають норму в k не меншу ніж $\min\{v_k(3), v_k(a_2), v_k(a_4^2 - 4a_2 a_6)\} + 1$.

Використовуючи (12) і міркування роботи [7], маємо

$$N(T) \equiv \text{Tr } T + 4a_2 \text{Norm}(T) + (a_4^2 - 4a_2 a_6) \text{Norm}(T)^2 \pmod{\text{Tr } \Pi^{2n}} \quad (13)$$

(N — норменний гомоморфізм \mathfrak{g} -модуля Γ_i ; Tr , Norm — слід і норма в l/k). Оскільки $n \geq m - \min\{v_h(a_2), v_h(a_4), v_h(3)\}$, то з (13) одержуємо

$$N(T) \equiv \text{Tr } T \pmod{\mathfrak{p}^{n+1}}. \quad (14)$$

Нагадаємо, що Π -ізоморфізмом $\Gamma_i^n / \Gamma_i^{n+1} \rightarrow \lambda$ називається ізоморфізм, який одержується співставленням класу точки з Γ_i^n , що відповідає значенню параметра $d \Pi^n$, $d \in \mathfrak{O}_i$, елемента $d \pmod{\Pi}$ з λ .

Нехай $u = v_i(T)$. Якщо $n \geq m/2$, то враховуючи інформацію про $(\sigma - 1)\Gamma(A_1)$, одержану на початку доведення леми, бачимо, що досить дослідити випадок, коли $n \equiv m \pmod{3}$. У цьому випадку бачимо, враховуючи (14), що при переході до Π -ізоморфізмів норменний гомоморфізм \mathfrak{g} -модуля Γ_i визначає ізоморфізм $N_n: \lambda \rightarrow \lambda$ такий, що $N_n(z) = \alpha z$, $\alpha \neq 0$. Очевидно, $\text{Ker } N_n = 0$, тому клас коциклу $f(\sigma)$ — тривіальний.

Якщо $n < m/2$, то з наших припущень випливає, що $\min\{v_h(3), v_h(a_2), v_h(a_4)\} > m/2$, \Rightarrow , $m \leq 4$, що суперечить умовам (8). Лема доведена.

Доведення твердження 2. Лемми 6—9 показують, що якщо A — еліптична крива типу (c_3) , яка задовольняє умови леми 5, то добуток Тейта—Шафаревича (l/k — розширення з леми 6)

$$H^1(\mathfrak{g}, A_l) \times H^0(\mathfrak{g}, A_l) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

невироджений зліва, а з діаграми (r_2) випливає справедливність і твердження 2 для таких кривих. Справедливість твердження 2 для довільної кривої типу (c) за Нероном витікає з лем 3—5.

1. Шафаревич И. Р. Группа главных однородных алгебраических многообразий // Докл. АН СССР. — 1959. — 124. — С. 42—43.
2. Tate J. WC-group over p-adic fields // Sem. Bourbaki. — 1967. — N 157.
3. Введенский О. Н. О локальных «полях классов» эллиптических кривых // Изв. АН СССР, Сер. мат., — 1973. — 37, № 1. — С. 20—88.

4. Serre J.-P. Corps locaux.— Paris: Hermann, 1962.
 5. Андрийчук В. Н. Об эллиптических кривых над псевдолокальными полями // *Мат. сб.*— 1979.— 110, № 9.— С. 88—101.
 6. Ax J. The elementary theory of finite fields // *Ann. Math.*— 1968.— 88, N 2.— P. 239—271.
 7. Введенский О. Н. Двойственность в эллиптических кривых над локальным полем. I, II // *Изв. АН СССР, Сер. мат.*— 1964.— 28.— С. 1091—1112; 1966.— 30.— С. 891—922.

Одержано 06.03.92

УДК 515.12

Л. С. Базилевич, канд. фіз.-мат. наук

(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики АН України, Львів)

Поповнені простори функцій на континуумах Пеано

Одержано опис топології пари $(\tilde{C}(I, J), C(I, J))$ для пеанівського континууму I , де $\tilde{C}(I, J)$ — замыкання в гіперпросторі $\text{exp}(I \times J)$ образу простору неперервних функцій $C(I, J)$ при природному вкладенні.

Получено описание топологии пары $(\tilde{C}(I, J), C(I, J))$ для пеановского континуума I , где $\tilde{C}(I, J)$ — замыкание в гиперпространстве $\text{exp}(I \times J)$ образа пространства непрерывных функций $C(I, J)$ при естественном вложении.

Гіперпростір $\text{exp } X = \{A \subset X | A \neq \emptyset \text{ — замкнена підмножина в } X\}$ метричного компакта (X, d) метризується метрикою Гаусдорфа $d_H : d_H(A, B) = \inf \{\varepsilon > 0 | A \subset O_\varepsilon(B), B \subset O_\varepsilon(A), A, B \in \text{exp } X\}$. Нехай I — метричний континуум Пеано, $J = [-1, 1]$ — сегмент. Розглянемо простір $C(I, J)$ неперервних функцій $f : I \rightarrow J$ з метрикою, індукованою відображенням $\Gamma : C(I, J) \rightarrow \text{exp}(I \times J)$, яке кожній функції $f \in C(I, J)$ ставить у відповідність її графік $\Gamma(f) = \{(x, y) \in I \times J | y = f(x)\} \in \text{exp}(I \times J)$ (тут ми вважаємо, що на I задана фіксована опукла метрика d_I і на $I \times J$ метрика задається формулою $d_{I \times J}((q', t'), (q'', t'')) = ((d_I(q', q''))^2 + (t' - t'')^2)^{1/2}$; надалі часто опускаються індекси у позначеннях для метрик). Позначимо через $\tilde{C}(I, J)$ поповнення простору $C(I, J)$ за вказаною метрикою. Метричні простори вигляду $C(I, J)$ та $\tilde{C}(I, J)$ розглядалися у працях [1—3]. Зокрема, В. В. Федорчук довів, що простір $\tilde{C}(I, J)$ гомеоморфний гільбертовому кубу $Q = \prod_{i=1}^{\infty} [-1, 1]_i$ (цей результат фактично міститься в [3], хоча явно не сформульований).

Нагадаємо, що псевдовнутрішністю гільбертового куба $Q = \prod_{i=1}^{\infty} [-1, 1]_i$ називається підмножина $s = \prod_{i=1}^{\infty} (-1, 1)_i \subset Q$. Топологічна характеристика пари (Q, s) наведена в [4]: пара (Q, A) гомеоморфна (Q, s) тоді і лише тоді, коли $Q \setminus A$ — Z -скелетоїд в Q . При цьому множина $B \subset Q$ називається Z -скелетоїдом, якщо $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$, де $K_1 \subset K_2 \subset \dots$ — така послідовність Z -множин в Q , що для кожної Z -множини $A \subset Q$, кожного $\varepsilon > 0$ і $n \in \mathbb{N}$ існує такий гомеоморфізм $h : Q \rightarrow Q$, що:

- 1) $h(A \cap K_n) = \text{id}$;
- 2) $h(A) \subset K_m$ для деякого $m \geq n$;
- 3) $d(h, \text{id}_Q) < \varepsilon$

(замкнена підмножина $C \subset Q$ називається Z -множиною, якщо тотожне відображення Q апроксимується відображеннями Q в $Q \setminus C$ [5]).

Основним результатом даної праці є наступне твердження, яке анонсоване в [6].