УДК 519.21

Г. В. Мамонова (Нац. акад. ДПС України, Ірпінь)

ЕКСПЛУАТАЦІЙНА СИСТЕМА ОБСЛУГОВУВАННЯ У СХЕМІ ДИФУЗІЙНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ З ЕВОЛЮЦІЙНИМ УСЕРЕДНЕННЯМ

The operational queueing system of $[SM|M|\infty]^N$ type is considered in the scheme of diffusion approximation. The queueing system is described by a semi-Markov random evolution..

Розглядається експлуатаційна система обслуговування типу $[SM|M|\infty]^N$ у схемі дифузійної апроксимації. Система обслуговування описується напівмарковською випадковою еволюцією.

1. Постановка задачі. Будемо розглядати експлуатаційну систему обслуговування (ЕСО) типу $[SM|M|\infty]^N$, що складається з N вузлів обробки інформації. Час обробки вимог, що надходять до системи, має показниковий розподіл з інтенсивностями $\mu = (\mu_k,\, k = \overline{1, N})$. Напівмарковський потік вимог надходить до кожного вузла за законом, що задається напівмарковським ядром

$$Q(t) = [Q_{kr}(t); k, r \in E]; \quad Q_{kr}(t) = p_{kr}\, G_k(t), \quad k, r \in E,$$
$$p_{kr} = \mathrm{P}(\kappa_{n+1} = r \mid \kappa_n = k), \quad k, r \in E; \quad G_k(t) = \mathrm{P}(\theta_{n+1} \le t \mid \kappa_n = k) =: \mathrm{P}(\theta_k \le t). \tag{1}$$

Інтенсивності моментів відновлення задовольняють умову

$$\text{У}_1)\quad g_k := \mathrm{E}\theta_k = \int_0^\infty \overline{G}_k(t)\,dt,\; g_2^{(k)} := \mathrm{E}\theta_k^2 = \int_0^\infty t\,\overline{G}_k(t)\,dt = \frac{1}{2}\mathrm{E}\theta_k^2 < \infty,\; \lambda_k := $$
$$:= \frac{1}{g_k},\; k = \overline{1, N}.$$

Процес надходження вимог до ЕСО визначається *процесом марковського відновлення* (*ПМВ*) $\kappa_n, \theta_n, n \ge 0$, у фазовому просторі $E = \{1, 2, \ldots, N\}$. Перехідні ймовірності ПМВ визначаються напівмарковською матрицею (1) [1]. Отже, вимоги надходять до ЕСО у моменти марковського відновлення

$$\tau_n = \sum_{m=1}^{n} \theta_m, \quad n \ge 1, \quad \tau_0 = 0. \tag{2}$$

Номер вузла, до якого надходить вимога в момент τ_n, визначається значенням *вкладеного ланцюга Маркова* (*ВЛМ*) κ_n.

Уведемо породжуючу матрицю супроводжуючого марковського процесу $\kappa^0(t),\ t \ge 0$:

$$Q := \Lambda \cdot [\mathrm{P} - I] = [q_{kr},\, k, r = \overline{1, N}], \quad \Lambda = \lambda^d := [\lambda_k \delta_{kr},\, k, r = \overline{1, N}],$$
$$\mathrm{P} := [p_{kr},\, k, r = \overline{1, N}].$$

Матриця маршрутизації $\mathrm{P}_0 := [p_{kr}^0;\, k, r = \overline{1, N}]$ визначає рух вимог у мережі.

Виконується умова відкритої мережі

$$\text{У}_2)\quad \max_k \left[p_{k0}^0 := 1 - \sum_{r=1}^{N} p_{kr}^0 \right] > 0$$

та нерозкладності матриці маршрутизації P_0. Тут p_{k0}^0 — ймовірність, з якою вимога залишає мережу.

Основний результат роботи [2] — теорема усереднення — дає можливість отримати спрощену модель стохастичної еволюції ЕСО. Але для повноти аналізу необхідно дослідити флуктуації процесу ЕСО навколо усередненої детермінованої системи $\rho(t)$, $t \geq 0$. Як відомо, флуктуації описуються дифузійним процесом. У роботі [3] флуктуації процесу ЕСО досліджено відносно точки рівноваги ρ усередненої системи, що визначається розв'язком рівняння $C(\rho) = 0$. У даній роботі дифузійна апроксимація будується для флуктуації відносно усередненої еволюційної системи $v(t)$, $t \geq 0$, що визначається розв'язком еволюційного рівняння $dv(t)/dt = C(v(t))$. При розв'язанні проблеми усереднення випадкова еволюція мала неперервну та стрибкову компоненти. Аналогічний підхід зберігається і при дифузійній апроксимації.

2. Процес обслуговування в ЕСО. Як і в роботі [3], процес обслуговування $\rho^\varepsilon(t) = (\rho_k^\varepsilon(t),\ k \in E)$ визначає кількість вимог у кожному вузлі $k \in E$ в момент часу $t > 0$.

Введемо необхідні позначення та умови:

1) функції швидкостей усередненої системи $C(v) = (c_k(v),\ k \in E)$, $v \in R^N$, визначаються співвідношеннями [2]

$$C(v) = \gamma(v) + \lambda, \quad \gamma(u) = u^* A, \quad A =: \mu^d[\mathrm{P}_0 - I],$$

де $\lambda := (\lambda_k,\ k \in E)$ — вектор-стовпець, $\mu^d = [\mu_k \delta_{kr},\ k, r = \overline{1, N}]$, $\gamma(u) = (\gamma_l(u),\ l = \overline{1, N})$, $\gamma_l(u) = \sum_{r=1}^{N} u_r \mu_r (p_{rl} - \delta_{rl})$, функція $v(t)$, $t \geq 0$, задовольняє рівняння

У$_3$) $\dfrac{dv(t)}{dt} = C(v(t))$;

2) критичне завантаження ЕСО задається у схемі серій із малим параметром серії $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \to 0$:

У$_4$) $\mu_k^\varepsilon = \dfrac{\mu_k}{\varepsilon}$, $k \in E$;

3) початкове навантаження системи в теоремі усереднення задовольняє умову

У$_5$) $\varepsilon\rho^\varepsilon(0) \Rightarrow \rho$, $\varepsilon \to 0$;

4) *нормований та центрований процес обслуговування* задається у схемі серій:

У$_6$) $\zeta^\varepsilon(t) = \varepsilon\rho^\varepsilon\left(\dfrac{t}{\varepsilon^2}\right) - \dfrac{v(t)}{\varepsilon}$, $t \geq 0$,

$$\frac{dv(t)}{dt} = C(v(t)), \quad C(v) = \gamma(v) + \lambda.$$

В умовах У$_1$ – У$_5$ має місце слабка збіжність (див. [2], висновок 2)

$$\varepsilon\rho^\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \Rightarrow v(t), \quad \varepsilon \to 0. \tag{3}$$

3. Дифузійна апроксимація процесу обслуговування вимог в ЕСО типу $[SM|M|\infty]^N$. Нормований та центрований процес обслуговування вимог в ЕСО типу $[SM|M|\infty]^N$ задається у вигляді

$$\zeta^\varepsilon(t) = \varepsilon\rho^\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right) - \frac{v(t)}{\varepsilon}, \quad t \geq 0. \tag{4}$$

Теорема (дифузійна апроксимація). *В умовах* У$_1$ – У$_6$ *має місце слабка збіжність процесів*

$$\zeta^{\varepsilon}(t) \Rightarrow \zeta^{0}(t), \quad \varepsilon \to 0. \tag{5}$$

Граничний процес $\zeta^0(t)$ *є дифузійним процесом Орнштейна – Уленбека типу, що визначається генератором*

$$L^0 \varphi(u) = -u^* A \varphi'(u) + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} B(v(t)) \varphi''(u). \tag{6}$$

Позитивно означена матриця дисперсій визначається співвідношенням

$$B(v) = h^d - [v^d A + A' v^d] + C^d(v),$$

$$h^d = [h_k \delta_{kr};\ k, r \in E], \quad h_k := \frac{[g_k^{(2)} - 2g_k^2]}{g_k^3} = \lambda_k^3 \bar{h}_k, \quad \bar{h}_k := g_k^{(2)} - 2g_k^2, \tag{7}$$

$$A =: \mu^d [P_0 - I], \qquad C^d(v) = v^d + \Lambda.$$

Зауваження. У випадку показникового розподілу величина $\bar{h}_k = 0$. Разом з тим для майже монотонного класу розподілів [4] $\bar{h}_k > 0$. Існують також розподіли, для яких $\bar{h}_k < 0$.

Теорема доводиться за тією ж схемою, що і в роботі [3]. Спочатку для розширеного процесу марковського відновлення (РПМВ) визначається компенсуючий оператор. Далі будується асимптотичний розклад компенсуючого оператора за степенями малого параметра ε. Після цього використовується розв'язок проблеми сингулярного збурення, який дає вираз для оператора граничної дифузії. Завершується доведення теореми використанням слабкої збіжності випадкових еволюцій [5].

4. Еволюція вимог у мережі. Для тест-функції $\varphi(u) \in C^2(R^N)$ визначимо вектор $\varphi'(u) := (\varphi_k'(u), k = \overline{1, N})$ з компонентами $\varphi_k' := \partial \varphi(u) / \partial u_k$ і матрицю $\varphi''(u) := [\varphi_{kr}''(u);\ k, r = \overline{1, N}]$ з елементами $\varphi_{kr}''(u) = \partial^2 \varphi(u) / \partial u_k \partial u_r$. Введемо векторні оператори $\lambda \varphi(u) := \lambda^* \varphi'(u) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \varphi_k'(u)$, $\gamma(v)\varphi(u) = \gamma^*(v)\varphi'(u)$, а також матричний оператор $\Lambda \varphi(u) := \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \varphi_{kk}''(u)$.

Твердження 1. *Еволюція вимог у мережі* $E = \{1, 2, \ldots, N\}$ *описується в евклідовому просторі* R^N *марковським процесом* $\eta^{\varepsilon}(t)$, $t \ge 0$, *що задається генератором на тест-функції* $\varphi(u) \in C(R^N)$:

$$\Gamma^{\varepsilon}(v) \varphi(u) = \sum_{k=1,\, r=0}^{N} \gamma_{kr}(v) [\varphi(u + \varepsilon e_{rk}) - \varphi(u)], \tag{8}$$

де вектори стрибків

$$e_{rk} := e_r - e_k, \qquad e_k := (\delta_{kl},\ l = \overline{1, N}), \qquad e_0 := 0, \tag{9}$$

інтенсивності стрибків

$$\gamma_{kr}(v) := v_k \mu_k p_{kr}^0, \qquad k = \overline{1, N}, \quad r = \overline{0, N}, \quad k \ne r. \tag{10}$$

Відповідно до постановки задачі в п. 1 інтенсивності $\gamma_{kr}(v)$, що визначаються формулою (10), задають інтенсивності переходу вимоги зі стану k в стан $r \ge 1$, що описується вектором стрибків e_{kr}, заданим формулою (9). У випадку $r = 0$ вимога залишає систему з інтенсивністю $\gamma_{k0}(v)$.

Ключовий етап доведення теореми про дифузійну апроксимацію забезпечує наступна лема.

Лема 1. *Має місце асимптотичне зображення генератора* (8)

$$\Gamma^{\varepsilon}(v)\,\varphi(u) = \varepsilon\,\Gamma(v)\,\varphi(u) + \varepsilon^2\left[\Gamma(u)\varphi(u) + \frac{1}{2}B_0(v)\varphi(u)\right] + \varepsilon^2\,\theta^{\varepsilon}_{\gamma}(v)\varphi(u), \quad (11)$$

де, за означенням, оператори діють таким чином:

$$\Gamma(v)\,\varphi(u) = \gamma^{*}(v)\varphi'(u), \quad (12)$$

$$B_0(v)\,\varphi(u) = C^d(v)\,\varphi(u) + A(v)\,\varphi(u) - \Lambda\,\varphi(u), \quad (13)$$

$$A(v) = -[v^d A + A' v^d]\varphi''(u), \qquad \Lambda\varphi(u) = \sum_{k=1}^{N}\lambda_k\varphi''_{kk}(u),$$

$$C^d(v)\varphi(u) = \operatorname{Tr}[\,C^d(v)\varphi''(u)]. \quad (14)$$

Залишковий член $\left\|\theta^{\varepsilon}_{\gamma}(v)\varphi(u)\right\| \to 0,\ \varepsilon \to 0.$

Використаємо лінійні властивості напівгрупи операторів

$$\Gamma_{\varepsilon}(v)\varphi(u) = \Gamma^{\varepsilon}(v + \varepsilon u)\varphi(u) = \Gamma^{\varepsilon}(v)\varphi(u) + \varepsilon\Gamma^{\varepsilon}(u)\varphi(u). \quad (15)$$

За формулами (8) – (10)

$$\Gamma^{\varepsilon}(v)\varphi(u) = \sum_{\substack{k=1\\r=0}}^{N}\gamma_{kr}(v)[\varphi(u+\varepsilon e_{rk}) - \varphi(u)] = \varepsilon\sum_{\substack{k=1\\r=0}}^{N}\gamma_{kr}(v)[\varphi'_r(u) - \varphi'_k(u)] +$$

$$+\ \frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{\substack{k=1\\r=0}}^{N}\gamma_{kr}(v)[(e_r - e_k)(e_r - e_k)^*]\varphi(u) + \varepsilon^2\theta^{\varepsilon}(v)\varphi(u). \quad (16)$$

Введемо позначення $e_r e_k\varphi(u) = \varphi''_{rk}(u)$, $e_r^2\varphi(u) = \varphi''_{rr}(u)$. Використовуючи очевидну тотожність $\sum_{r=1}^{N}\gamma_{kr}(v) + \gamma_{k0}(v) = v_k\mu_k$, для першої суми маємо

$$\sum_{\substack{k=1\\r=0}}^{N}\gamma_{kr}(v)[\varphi'_r(u) - \varphi'_k(u)] = \sum_{\substack{k=1\\r=0}}^{N}\gamma_{kr}(v)[\varphi'_r - \varphi'_k] = \sum_{k,r=1}^{N}(\gamma_{kr}(v)\varphi'_r - \gamma_{kr}(v)\varphi'_k) -$$

$$-\sum_{k=1}^{N}\gamma_{k0}(v)\varphi'_k = \sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{N}\gamma_{kr}(v)\varphi'_r - \sum_{k=1}^{N}\varphi'_k\sum_{r=1}^{N}\gamma_{kr}(v) - \sum_{k=1}^{N}\varphi'_k\gamma_{k0}(v) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{N}\gamma_{kr}(v)\varphi'_r - \sum_{k=1}^{N}\varphi'_k\left(\sum_{r=1}^{N}\gamma_{kr}(v) + \gamma_{k0}(v)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{r=1}^{N}\gamma_{kr}(v)\varphi'_r - v_k\mu_k\varphi'_k\right] = \gamma^*(v)\varphi'(u).$$

Для другого доданка в (16) отримуємо

$$\sum_{\substack{k=1\\r=0}}^{N}\gamma_{kr}(v)[(e_r - e_k)(e_r - e_k)^*]\varphi(u) = \sum_{\substack{k=1\\r=1}}^{N}(\gamma_{kr}(v)\varphi''_{rr} + \gamma_{kr}(v)\varphi''_{kk}) -$$

$$-\sum_{\substack{k=1\\r=1}}^{N}[\gamma_{kr}(v)\varphi''_{kr} + \gamma_{kr}(v)\varphi''_{rk}] = \sum_{\substack{k=1\\r=1}}^{N}\gamma_{kr}(v)\varphi''_{rr} + \sum_{\substack{k=1\\r=1}}^{N}\gamma_{kr}(v)\varphi''_{kk} +$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\gamma_{k0}(v)\varphi''_{kk} - \sum_{\substack{k=1\\r=1}}^{N}(\gamma_{kr}(v)+\gamma_{rk}(v))\varphi''_{rk} = \sum_{\substack{k=1\\r=1}}^{N}\gamma_{kr}(v)\varphi''_{rr} +$$

$$+\sum_{k=1}^{N}v_k\mu_k\varphi''_{kk} \mp 2\sum_{k=1}^{N}v_k\mu_k\varphi''_{kk} - \sum_{\substack{k=1\\r=1}}^{N}(\gamma_{kr}(v)+\gamma_{rk}(v))\varphi''_{rk} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{r=1}^{N}\gamma_{kr}(v)\varphi''_{rr} - v_k\mu_k\varphi''_{kk}\right] - \sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{r=1}^{N}(\gamma_{kr}(v)\varphi''_{kr} - v_k\mu_k\varphi''_{kr}) +\right.$$

$$\left.+\sum_{r=1}^{N}\gamma_{rk}(v)\varphi''_{rk} - v_k\mu_k\varphi''_{kk}\right] = \gamma^d(v)\varphi''(u) - [v^dA + A'v^d]\varphi''(u) =$$

$$= C^d(v)\varphi(u) - \Lambda\varphi(u) + A(v)\varphi(u) = B_0(v)\varphi(u).$$

При цьому ми скористалися рівністю $\gamma^d(v) = C^d(v) - \Lambda$, що визначає умову балансу.

Лему 1 доведено.

5. Компенсуючий оператор. Введемо необхідні для подальшого аналізу позначення: напівгрупу $\Gamma_t^\varepsilon(v),\ t \ge 0$:

$$\Gamma_t^\varepsilon(v) - I = \Gamma^\varepsilon(v)\int_0^t \Gamma_s^\varepsilon(v)\,ds; \tag{17}$$

напівгрупу $\overline{C}_t^\varepsilon(v),\ t \ge 0$:

$$\overline{C}_t^\varepsilon(v) - I = \overline{C}^\varepsilon(v)\int_0^t \overline{C}_s^\varepsilon(v)\,ds, \qquad \overline{C}^\varepsilon(v)\varphi(u) = -\varepsilon^{-1}C^*(v)\varphi'(u); \tag{18}$$

напівгрупу $C_t,\ t \ge 0$:

$$C(t) - I = C\int_0^t C_s\,ds, \qquad C\varphi(v) = C^*(v)\varphi'(v).$$

Розглянемо РПМВ $\zeta_n^\varepsilon,\ \nu_n^\varepsilon,\ \kappa_n,\ n \ge 0.$ (19)

Лема 2. *На тест-функціях* $\overline{\varphi}(u,v) = (\varphi_k(u,v),\ k = \overline{1, N}),\ \varphi_k \in C^3(R^N \times R^N)$ *компенсуючий оператор має вигляд*

$$L^\varepsilon\overline{\varphi}(u,v) = \varepsilon^{-2}\Lambda[G_\varepsilon(v)D^\varepsilon\mathrm{P} - I]\overline{\varphi}(u,v), \tag{20}$$

де

$$G_\varepsilon(v) = \int_0^\infty G_k(dt)\Gamma_t^\varepsilon(v)\overline{C}^\varepsilon_{\varepsilon^2 t}(v)C_{\varepsilon^2 t}, \qquad D^\varepsilon\overline{\varphi}(u,v) = \overline{\varphi}(u+\varepsilon e_l, v). \tag{21}$$

Доведення леми базується на обчисленні умовного математичного сподівання [6]:

$$\mathrm{E}[\overline{\varphi}_{\kappa_{n+1}}(\zeta_{n+1}^\varepsilon, v_n^\varepsilon)\,|\,\kappa_n = k,\ \zeta_n^\varepsilon = u,\ v_n^\varepsilon = v].$$

Лема 3. *Компенсуючий оператор* (20) *допускає асимптотичне зображення на тест-функціях* $\overline{\varphi}(u,v) \in C^2(R^N \times R^N)$

$$L^\varepsilon\overline{\varphi}(u,v) = \varepsilon^{-2}Q\overline{\varphi}(u,v) + Q_2\mathrm{P}\overline{\varphi}(u,v) + \theta_L^\varepsilon\overline{\varphi}(u,v), \tag{22}$$

де

$$Q \;:=\; \Lambda[\mathrm{P} - I], \tag{23}$$

$$Q_2 \;=\; \gamma(u) \;+\; \frac{1}{2}\,A(v) \;+\; h^d \;+\; C^d(v), \tag{24}$$

$$h^d \;=\; [\,h_k\delta_{kr},\;\; 1 \le k, r \le N\,], \qquad h_k \;=\; \lambda_k^3(g_k^{(2)} - 2g_k^2), \qquad k \;=\; \overline{1,\,N}. \tag{25}$$

Залишковий член θ_L^ε *задовольняє умову знехтування*:

$$\left\|\theta_L^\varepsilon \varphi(u,v)\right\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \qquad \varphi(u,v) \in C^3(R^N).$$

Використовуючи позначення (21) та тотожність

$$g\,\mathrm{P}\,d - I \;=\; \mathrm{P} - I + (g - I)\mathrm{P} + \mathrm{P}(d - I) + (g - I)\mathrm{P}(d - I),$$

записуємо компенсуючий оператор (11) у вигляді

$$L^\varepsilon \;=\; \varepsilon^{-2}Q + \varepsilon^{-2}[\,G_\varepsilon(x) - I\,]\,Q_0 + \varepsilon^{-2}[\,D^\varepsilon - I\,]\,Q_0 + \varepsilon^{-2}[\,G_\varepsilon(x) - I\,]\,[\,D^\varepsilon - I\,]\,Q_0. \tag{26}$$

Для асимптотичного зображення неперервної складової використаємо тотожність

$$\begin{aligned} abc - 1 \;=\; &(a-1) + (b-1) + (c-1) + (a-1)(b-1) + \\ &+ (a-1)(c-1) + (b-1)(c-1) + (a-1)(b-1)(c-1). \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} G_\varepsilon - I \;=\; &G_\varepsilon^\gamma - I + G_\varepsilon^{\overline{C}} - I + G_\varepsilon^C - I + (G_\varepsilon^\gamma - I)(G_\varepsilon^{\overline{C}} - I) + (G_\varepsilon^\gamma - I)(G_\varepsilon^C - I) + \\ &+ (G_\varepsilon^C - I)(G_\varepsilon^{\overline{C}} - I) + (G_\varepsilon^\gamma - I)(G_\varepsilon^{\overline{C}} - I)(G_\varepsilon^C - I). \end{aligned} \tag{27}$$

Для першого доданка, використовуючи означення напівгруп, метод інтегрування частинами та лему 2, отримуємо

$$\varepsilon^{-2}[G_\varepsilon^\gamma - I]Q_0 \;=\; \varepsilon^{-1}\gamma(v) + \gamma(u) + \frac{1}{2}\,B_0(v) + \overline{g}^{\,(2)}\,\Gamma^2(v) + \theta_\gamma^\varepsilon(v), \tag{28}$$

де $Q_0 = \Lambda\mathrm{P}$.

Аналогічно для другого та третього доданків у рівності (27) маємо

$$\varepsilon^{-2}[G_\varepsilon^{\overline{C}} - I]Q_0 \;=\; \varepsilon^{-1}C(v) + \overline{g}^{\,(2)}\,\Gamma^2(v) + \theta_{\overline{C}}^\varepsilon(v), \tag{29}$$

$$\varepsilon^{-2}[G_\varepsilon^C - I]Q_0 \;=\; C + \theta_C^\varepsilon(v). \tag{30}$$

Оператор C визначається таким чином: $C\varphi(v) = C(v)\varphi'(v)$.

Асимптотика четвертого доданка у (27)

$$\varepsilon^{-2}(G_\varepsilon^\gamma - I)(G_\varepsilon^{\overline{C}} - I)Q_0 \;=\; -2\overline{g}^{\,(2)}\,\Gamma(v)C(v) + \theta_{\gamma\overline{C}}^\varepsilon(v). \tag{31}$$

Решта доданків у (27) мають залишковий характер. Наприклад,

$$(G_\varepsilon^\gamma - I)(G_\varepsilon^C - I) \;=\; \int_0^\infty C_k(dt)\int_0^t \Gamma_s^\varepsilon(v)\,ds \int_0^{\varepsilon^2 t} C_s\,ds\,\Gamma^\varepsilon(v)C \;=$$

$$=\; 2\varepsilon^2\Gamma^\varepsilon(v)C\int_0^\infty \overline{C}_k^{(2)}(t)\,dt\,\Gamma_t^\varepsilon C_{\varepsilon^2 t} \;=\; 2\varepsilon^2\Gamma^\varepsilon(v)C[\,g_k I - \theta_{\gamma C}^\varepsilon(x)\,] \;=\; \theta_{\gamma C}^\varepsilon(x).$$

Далі обчислюємо доданки в рівності (26):

$$\varepsilon^{-2}[D^\varepsilon - I]Q_0 \;=\; \varepsilon^{-1}\lambda + \frac{1}{2}\Lambda + \theta_d^\varepsilon, \tag{32}$$

$$\varepsilon^{-2}(G_\varepsilon^{\overline{C}}(x) - I)[D^\varepsilon - I]Q_0 \;=\; -C^d(v) + \theta_{cd}^\varepsilon. \tag{33}$$

На підставі леми 2 останній доданок у (26) обчислюється так:

$$\varepsilon^{-2}(G_\varepsilon^\gamma(v) - I)[D^\varepsilon - I]Q_0 \;=\; \gamma^d(v) + \theta_{\gamma d}^\varepsilon. \tag{34}$$

Решта членів мають залишковий характер.

Об'єднуючи асимптотичні зображення (28) – (34), маємо

$$Q_2 \;=\; \gamma(u) + \frac{1}{2}A(v) - \frac{1}{2}\Lambda + \overline{g}^{(2)}[\gamma^2(v) + C^2(v) - 2\gamma(v)C(v)] +$$

$$+\; C + C^d(v) - \Lambda + \frac{1}{2}\Lambda,$$

або

$$Q_2 \;=\; \gamma(u) + \frac{1}{2}A(v) + h^d + C^d(v),$$

$$h^d \;=\; [h_k\delta_{kr},\; 1 \le k, r \le N], \qquad h_k \;=\; \lambda_k^3(g_k^{(2)} - 2g_k^2), \qquad k \;=\; \overline{1,\, N}.$$

Таким чином, оператор граничної дифузії

$$L^0\varphi(u, v) \;=\; \gamma^*(u)\varphi'_u(u, v) + \frac{1}{2}B(v)\varphi''_u(u, v) + C(v)\varphi'_v(u, v),$$

$$B(v) \;:=\; A(v) + C^d(v) + 2h^d.$$

Отже, граничний дифузійний процес $\zeta^0(t)$ визначається генератором

$$L_t^0\varphi(u) \;=\; \gamma^*(u)\varphi'(u) + \frac{1}{2}B(v(t))\varphi''(u), \qquad \gamma(u) \;=\; uA.$$

Дифузійна матриця залежить від усередненої еволюції $v(t),\; t \ge 0,$ що визначається розв'язком еволюційного рівняння

$$\frac{dv(t)}{dt} \;=\; C(v(t)).$$

Завершується доведення теореми за схемою, наведеною в роботі [6], з використанням граничної теореми для напівмарковських випадкових еволюцій у схемі усереднення [5] (теореми 4.1, 4.3).

Висловлюю щиру подяку академіку НАН України Володимиру Семеновичу Королюку за постановку задачі та постійну увагу при її розв'язанні.

1. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. – Киев: Наук. думка, 1982. – 236 с.
2. *Мамонова Г. В.* Експлуатаційна система обслуговування типу $[SM|M|\infty]^N$ у схемі усереднення // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2005. – **10**. – С. 135 – 144.
3. *Мамонова Г. В.* Експлуатаційна система обслуговування у схемі дифузійної апроксимації // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2005. – № 3. – С. 333 – 337.
4. *Karamaki N.* Continues exponentive martingales and BMO // Lect. Notes Math. – 1999. – № 1579.
5. *Korolyuk V. S., Swishchuk A. V.* Random evolution. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1994.
6. *Свириденко М. Н.* Об условиях сходимости семейства полумарковских процессов к марковскому процессу. – Мытищи, 1986. – 17 с.

Одержано 17.06.2005