УДК 517.5

С. А. Стасюк, О. В. Федуник (Ін-т математики НАН України, Київ)

АПРОКСИМАТИВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ КЛАСІВ $B^{\Omega}_{p,\theta}$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Exact order estimates are obtained for the approximation of the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic multivariable functions in the space L_q by using operators of orthogonal projection and linear operators subjected to certain conditions.

Одержано точні за порядком оцінки наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q за допомогою операторів ортогонального проектування, а також лінійних операторів, що підпорядковані деяким умовам.

Нехай $L_p(\pi_d)$, $1 \le p \le \infty$, — простір 2π-періодичних по кожній змінній і сумовних у степені p на кубі $\pi_d = \prod_{j=1}^{d}[0; 2\pi]$ функцій $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$, у якому норма визначається рівностями

$$\|f\|_{L_p(\pi_d)} = \|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty(\pi_d)} = \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)|.$$

Далі скрізь будемо вважати, що для функцій $f \in L_p(\pi_d)$ виконується додаткова умова

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x) dx_j = 0, \quad j = \overline{1, d}.$$

Для $f \in L_p(\pi_d)$ введемо мішаний модуль неперервності порядку l

$$\Omega_l(f, t)_p = \sup_{\substack{|h_j| \le t_j \\ j = \overline{1,d}}} \|\Delta_h^l f(x)\|_p,$$

де $\Delta_h^l f(x) = \Delta_{h_d}^l \ldots \Delta_{h_1}^l f(x) = \Delta_{h_d}^l (\ldots (\Delta_{h_1}^l f(x)))$ — мішана l-та різниця з кроком h_j за змінною x_j і

$$\Delta_{h_j}^l f(x) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} C_l^n f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + n h_j, x_{j+1}, \ldots, x_d).$$

Нехай $\Omega(t) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє такі умови:

1) $\Omega(t) > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1, d}$; $\Omega(t) = 0$, $\prod_{j=1}^{d} t_j = 0$;
2) $\Omega(t)$ зростає по кожній змінній;
3) $\Omega(m_1 t_1, \ldots, m_d t_d) \le \left(\prod_{j=1}^{d} m_j \right)^l \Omega(t)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$;
4) $\Omega(t)$ неперервна при $t_j \ge 0$, $j = \overline{1, d}$.

Будемо вважати, що $\Omega(t)$ задовольняє також умови (S), (S_l), які називають умовами Барі – Стєчкіна [1]. Це означає наступне.

Функція однієї змінної $\varphi(\tau) \geq 0$ задовольняє умову (S), якщо $\varphi(\tau)/\tau^{\alpha}$ майже зростає при деякому $\alpha > 0$, тобто існує така не залежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{\alpha}} \leq C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{\alpha}}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq 1.$$

Функція $\varphi(\tau) \geq 0$ задовольняє умову (S_l), якщо $\varphi(\tau)/\tau^{\gamma}$ майже спадає при деякому $0 < \gamma < l$, тобто існує така не залежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{\gamma}} \geq C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{\gamma}}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq 1.$$

Будемо говорити, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S) і (S_l), якщо $\Omega(t)$ задовольняє ці умови по кожній змінній t_j при фіксованих t_i, $i \neq j$.

Означимо деякі порядкові співвідношення, які будемо використовувати далі.

Функції $\mu(n)$ і $\nu(n)$ будемо називати функціями однакового порядку і писати $\mu(n) \asymp \nu(n)$, якщо для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $C_3\mu(n) \leq \nu(n) \leq$ $\leq C_4\mu(n)$, де сталі $C_3, C_4 > 0$ можуть залежати лише від параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій вимірюється похибка наближення, та розмірності d простору $\mathbb{R}^d$. Якщо ж $\mu(n) \leq C_5\nu(n)$ або $\mu(n) \geq C_6\nu(n)$, то позначимо $\mu(n) \ll$ $\ll \nu(n)$ і $\mu(n) \gg \nu(n)$ відповідно.

У подальшому формулювання отриманих результатів будуть містити порядкове співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$, $M, n \in \mathbb{N}$, яке будемо розуміти таким чином, що існують сталі $0 < C_7 < C_8$ такі, що виконуються нерівності

$$C_7 2^n n^{d-1} \leq M \leq C_8 2^n n^{d-1}.$$

Зазначимо, що з огляду на останню подвійну нерівність можемо записати порядкові співвідношення

$$n \asymp \log M, \qquad 2^n \asymp \frac{M}{\log^{d-1} M}.$$

Означимо тепер класи функцій $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які було розглянуто в роботі [2].

Нехай $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $k = (k_1, \ldots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1, d}$. Позначимо

$$\rho(s) = \left\{k \colon 2^{s_j - 1} \leq |k_j| < 2^{s_j},\ j = \overline{1, d}\right\},$$

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

де $\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \displaystyle\int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$ — коефіцієнти Фур'є функції f, $(k, x) =$ $= k_1 x_1 + \ldots + k_d x_d$.

Для $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ і заданої функції $\Omega(t)$ типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови 1 – 4, клас $B^{\Omega}_{p,\theta}$ визначається таким чином:

$$B^{\Omega}_{p,\theta} := \left\{ f \in L_p(\pi_d) :\ \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \leq 1 \right\},$$

де

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \left\{ \int\limits_{\pi_d} \left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^{\theta} \prod_{j=1}^{d} \frac{dt_j}{t_j} \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \ 1 \le \theta < \infty, \tag{1}$$

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} = \sup_{t>0} \frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}.$$

У роботі [2] для $1 < p < \infty$ і заданої функції $\Omega(t)$ типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови $1-4$, (S) і (S_l), встановлено, що

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left\{ \sum_{s} \|\delta_s(f,x)\|_p^{\theta} \Omega(2^{-s})^{-\theta} \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{2}$$

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_{s} \frac{\|\delta_s(f,x)\|_p}{\Omega(2^{-s})}, \tag{3}$$

де $\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, \ldots, 2^{-s_d})$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$.

Нижче ми покажемо, що для норм функцій із класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$ можна записати зображення, аналогічні (2) і (3) у випадках $p = 1$ і $p = \infty$, дещо видозмінивши при цьому „блоки” $\delta_s(f,x)$.

Нехай $V_n(t)$ — ядро Валле Пуссена порядку $2n-1$, тобто

$$V_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kt + 2 \sum_{k=n+1}^{2n-1} \left(1 - \frac{k-n}{n} \right) \cos kt.$$

Кожному вектору $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, поставимо у відповідність поліном

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^{d} \Big(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j) \Big)$$

і для $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \le p \le \infty$, через $A_s(f,x)$ позначимо згортку

$$A_s(f,x) = f(x) * A_s(x).$$

Має місце така теорема.

Теорема 1. *Нехай $\Omega(t)$ — функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, що задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > 0$, а також умову (S_l). Функція $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 \le p \le \infty$, тоді і лише тоді, коли*

$$\left\{ \sum_{s>0} \|A_s(f,x)\|_p^{\theta} \ \Omega(2^{-s})^{-\theta} \right\}^{\frac{1}{\theta}} < \infty, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

і в цьому випадку

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left\{ \sum_{s>0} \|A_s(f,x)\|_p^{\theta} \ \Omega(2^{-s})^{-\theta} \right\}^{\frac{1}{\theta}}. \tag{4}$$

Зазначимо, що при доведенні теореми будемо використовувати деякі ідеї з роботи [2].

Доведення. Встановимо для $\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}}$ оцінку зверху. В [2] показано, що

$$\|f\|^{\theta}_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \ll \sum_{k\geq 0} \Big(\Omega_l(f, 2^{-k})_p\Big)^{\theta} \Omega(2^{-k})^{-\theta}, \tag{5}$$

де $k = (k_1, \ldots, k_d)$, $2^{-k} = (2^{-k_1}, \ldots, 2^{-k_d})$, $k_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1, d}$.

Враховуючи, що (див., наприклад, [3, с. 304]) $f(x) = \sum_{s>0} A_s(f, x)$, одержуємо

$$\Omega_l(f, 2^{-k})_p = \sup_{|h|\leq 2^{-k}} \|\Delta^l_h f(x)\|_p \leq \sum_{s>0} \sup_{|h|\leq 2^{-k}} \|\Delta^l_h A_s(f, x)\|_p. \tag{6}$$

Для проведення подальших міркувань розглянемо два випадки.

Якщо $|h_j| \leq 2^{-s_j}$, то використаємо для оцінки $\|\Delta^l_{h_j} A_s(f, x)\|_p$ нерівність (див., наприклад, [3, с. 166])

$$\|\Delta^l_{h_j} g(x)\|_p \leq |h_j|^l \left\| \frac{\partial^l g}{\partial x^l_j} \right\|_p$$

та нерівність Бернштейна для тригонометричних поліномів. Тоді

$$\|\Delta^l_{h_j} A_s(f, x)\|_p \leq |h_j|^l \left\| \frac{\partial^l}{\partial x^l_j} A_s(f, x) \right\|_p \ll |h_j|^l 2^{s_j l} \|A_s(f, x)\|_p. \tag{7}$$

Якщо ж $|h_j| > 2^{-s_j}$, то, використовуючи для оцінки $\|\Delta^l_{h_j} A_s(f, x)\|_p$ нерівність Мінковського, маємо

$$\|\Delta^l_{h_j} A_s(f, x)\|_p \ll \|A_s(f, x)\|_p. \tag{8}$$

Беручи до уваги (7) та (8), робимо висновок, що

$$\|\Delta^l_h A_s(f, x)\|_p \ll \|A_s(f, x)\|_p \prod_{j=1}^{d} \min\{1, |h_j|^l 2^{s_j l}\},$$

а

$$\sup_{|h|\leq 2^{-k}} \|\Delta^l_h A_s(f, x)\|_p \ll \|A_s(f, x)\|_p \prod_{j=1}^{d} \min\{1, 2^{l(s_j - k_j)}\}. \tag{9}$$

Далі, враховуючи (6), (9) та використовуючи ті ж самі міркування, що і в [2], доводимо, що

$$\sum_{k\geq 0} \Big(\Omega_l(f, 2^{-k})_p\Big)^{\theta} \Omega(2^{-k})^{-\theta} \ll \sum_{s>0} \|A_s(f, x)\|^{\theta}_p \Omega(2^{-s})^{-\theta}. \tag{10}$$

Об'єднуючи (5) і (10), одержуємо для (4) оцінку зверху.

Оцінка знизу встановлюється аналогічно роботі [2], із заміною $\delta_s(f, x)$ на $A_s(f, x)$.

Перейдемо до встановлення оцінки знизу. Оскільки $\Omega(t)$, $\Omega_l(f, t)_p$ задовольняють умови $1-4$, (S) та (S_l), то при $0 < t_1 < t_2 < 2t_1$ мають місце співвідношення

$$\Omega(t_1) \asymp \Omega(t_2), \qquad \Omega_l(f, t_1)_p \asymp \Omega_l(f, t_2)_p. \tag{11}$$

У роботі [4] встановлено, що при $1 \leq p \leq \infty$ виконується нерівність

$$\|A_s(f,x)\|_p \ll \Omega_l(f,2^{-s})_p. \tag{12}$$

Виходячи з (1) і враховуючи (11) та (12), одержуємо

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} > \left(\int_0^1 \ldots \int_0^1 \left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}\right)^{\theta} \prod_{j=1}^{d} \frac{dt_j}{t_j}\right)^{\frac{1}{\theta}} \gg$$

$$\gg \left(\sum_{s>0} (\Omega_l(f,2^{-s})_p)^{\theta}\, \Omega(2^{-s})^{-\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \gg \left(\sum_{s>0} \|A_s(f,x)\|_p^{\theta}\, \Omega(2^{-s})^{-\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Оцінку знизу встановлено, а отже, теорему доведено.

Зауважимо, що при $\theta = \infty$ клас $B^{\Omega}_{p,\theta}$ збігається з класом H^{Ω}_p, для якого в [5] встановлено співвідношення

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_s \frac{\|A_s(f,x)\|_p}{\Omega(2^{-s})}. \tag{4'}$$

Далі в роботі будемо розглядати класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які визначаються функцією типу мішаного модуля неперервності порядку l деякого спеціального вигляду

$$\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^{d} t_j\right), \tag{13}$$

де $\omega(\tau)$ — задана функція (однієї змінної) типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови (S) і (S_l). Легко переконатися, що для $\Omega(t)$ вигляду (13) виконуються властивості $1-4$ функції типу мішаного модуля неперервності порядку l, а також умови (S) і (S_l), і тому зберігаються наведені вище зображення норм функцій класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

У даній роботі з використанням теореми 1 встановлюються точні за порядком оцінки ортопроекційних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ у просторі L_q для деяких значень параметрів p і q. Щоб навести означення цього поняття, введемо деякі позначення.

Нехай $\{u_i\}_{i=1}^{M}$ — ортонормована система функцій $u_i \in L_{\infty}(\pi_d)$. Кожній функції $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$, поставимо у відповідність апарат наближення вигляду $\sum_{i=1}^{M}(f,u_i)u_i$, тобто ортогональну проекцію функції f на підпростір, що породжений системою функцій $\{u_i\}_{i=1}^{M}$. Тоді для функціонального класу F з $L_q(\pi_d)$ величина

$$d^{\perp}_M(F,L_q) = \inf_{\{u_i\}_{i=1}^{M}} \sup_{f\in F} \left\| f(x) - \sum_{i=1}^{M} (f,u_i)u_i(x)\right\|_q \tag{14}$$

називається ортопроекційним поперечником цього класу в просторі $L_q(\pi_d)$.

Поняття ортопроекційного поперечника ввів В. М. Темляков [6]. Крім ортопроекційних поперечників будемо досліджувати величини $d^B_M(F,L_q)$, також введені В. М. Темляковим [6], які визначаються таким чином:

$$d^B_M(F,L_q) = \inf_{G\in L_M(B)_q} \sup_{f\in F\cap D(G)} \|f(x) - Gf(x)\|_q. \tag{15}$$

Тут $L_M(B)_q$ — множина лінійних операторів, які задовольняють умови:

а) область визначення $D(G)$ цих операторів містить всі тригонометричні поліноми, а їх область значень міститься в підпросторі розмірності M простору $L_q(\pi_d)$;

б) існує число $B \geq 1$ таке, що для всіх векторів $k = (k_1, \ldots, k_d)$ виконується нерівність $\left\| Ge^{i(k,x)} \right\|_2 \leq B$.

Зазначимо, що до $L_M(1)_2$ належать оператори ортогонального проектування на простори розмірності M, а також оператори, які задаються на ортонормованій системі функцій за допомогою мультиплікатора, який визначається послідовністю $\{\lambda_m\}$ такою, що $|\lambda_m| \leq 1$ для всіх m. Із (14) і (15) видно, що величини $d^{\perp}_M(F, L_q)$ і $d^B_M(F, L_q)$ пов'язані між собою нерівністю

$$d^B_M(F, L_q) \leq d^{\perp}_M(F, L_q). \tag{16}$$

На даний час відомо багато робіт, в яких досліджувались ортопроекційні поперечники тих чи інших класів функцій. Так, у роботах [7, 8] вивчались величини (14), (15) для класів функцій багатьох змінних $W^r_{p,\alpha}$, H^r_p. Дослідження ортопроекційних поперечників класів функцій багатьох змінних $B^r_{p,\theta}$ проводились у роботах [9, 10], де можна ознайомитись з детальнішою бібліографією.

При доведенні результатів будемо користуватися наступною теоремою.

Теорема A (Літтлвуда – Пелі, див., наприклад, [3, с. 55]). *Нехай $p \in (1, \infty)$. Тоді існують додатні числа C_9, C_{10} такі, що для кожної функції $f \in L_p(\pi_d)$ виконується співвідношення*

$$C_9 \|f\|_p \leq \left\| \left(\sum_s |\delta_s(f, x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq C_{10} \|f\|_p.$$

Теорема A є узагальненням на багатовимірний випадок відомої теореми Літтлвуда – Пелі (див. [11, т. 2], гл. 15).

При встановленні оцінок зверху в теоремах 2 і 3 за апарати наближення будемо брати частинні суми ряду Фур'є з „номерами" гармонік із множини Q_n

$$S_{Q_n}(f, x) = \sum_{(s,1)<n} \delta_s(f, x),$$

де $Q_n = \bigcup\limits_{(s,1)<n} \rho(s)$ — східчастий гіперболічний хрест, і розглядати величини

$$\mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q = \sup_{f \in B^{\Omega}_{p,\theta}} \|f(x) - S_{Q_n}(f, x)\|_q.$$

Перейдемо до викладу отриманих результатів.

Теорема 2. *Нехай $1 \leq q \leq p \leq \infty$, $p \geq 2$, $(q, p) \neq (\infty, \infty)$ і $\Omega(t) = \omega(t_1 \ldots t_d)$, де $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > 0$ та умову (S_l). Тоді при $1 \leq \theta \leq \infty$ має місце порядкова рівність*

$$d^{\perp}_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp d^B_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})_+}, \tag{17}$$

де $M \asymp 2^n n^{d-1}$, $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Зауважимо, що внаслідок нерівності (16) для доведення теореми достатньо оцінити знизу величину $d^B_M\big(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q\big)$ і, відповідно, зверху величину $d^{\perp}_M\big(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q\big)$.

Доведення. Оцінка зверху в (17) випливає із відомих результатів. Справді, нехай M є заданим. Підберемо n із співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$. Для $1 < q \le p < \infty$, $p \ge 2$, $1 \le \theta \le \infty$ розглянемо наближення класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$ східчасто-гіперболічними сумами Фур'є $S_{Q_n}(f,x)$ у метриці L_q. Тоді, використовуючи оцінки $\mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_p$ [2] та нерівність

$$d_M^{\perp}(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \ll \mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \le \mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_p,$$

одержуємо шукану оцінку зверху для $d_M^{\perp}(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$, а отже, і для $d_M^{B}(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$. У випадку $q = 1$ або $p = \infty$ проведемо аналогічні наведеним вище міркування, додатково використавши нерівність $\|\cdot\|_1 < \|\cdot\|_q$, $1 < q < \infty$, або вкладення $B^{\Omega}_{\infty,\theta} \subset B^{\Omega}_{p,\theta}$, $2 \le p < \infty$.

Перейдемо до встановлення в (17) оцінки знизу. Зазначимо, що оскільки отримана оцінка зверху не залежить від параметрів p і q, то для доведення оцінки знизу для величини $d_M^{B}(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$ достатньо розглянути випадок $p = \infty$, $q = 1$. Доведення розіб'ємо на три частини.

Нехай спочатку $2 \le \theta < \infty$. У цьому випадку використаємо допоміжне твердження, для формулювання якого введемо деякі позначення.

Покладемо

$$\overline{S}_n = \left\{ s : (s,1) = n, \ \ s_j - \text{парні числа}, \ \ j = \overline{1,d} \right\},$$

$$\rho^+(s) = \left\{ k : k = (k_1, \ldots, k_d), 2^{s_j - 1} \le k_j < 2^{s_j}, \ j = \overline{1,d} \right\},$$

$$\overline{Q}_n = \bigcup_{s \in \overline{S}_n} \rho^+(s),$$

$|\overline{Q}_n|$ — кількість елементів множини $\overline{Q}_n$.

Для вектора $m = (m_1, \ldots, m_d)$ (m_j, $j = \overline{1,d}$, — цілі невід'ємні числа) через $RT(m)$ позначимо множину дійсних тригонометричних поліномів виду

$$t(x) = \sum_{|k_j| \le m_j} \widehat{t}(k) e^{i(k,x)}.$$

Нехай $k_j^{s_j} = 2^{s_j - 1} + 2^{s_j - 2}$ і

$$T(\overline{Q}_n) = \left\{ t(x) = \sum_{s \in \overline{S}_n} t_s(x) e^{i(k^s, x)}, t_s \in RT(2^{s-2}) \right\}.$$

Для $g \in T(\overline{Q}_n)$ позначимо

$$\overline{\delta}_s(g,x) = \sum_{k \in \rho^+(s)} \widehat{g}(k) e^{i(k,x)}.$$

При таких позначеннях має місце наступне твердження.

Лема 1 [7]. *Нехай* $M \le \dfrac{|\overline{Q}_n|}{4}$. *Тоді для довільного простору* $\Phi \subset L_1(\pi_d)$, *розмірність якого не перевищує* M, *знайдеться функція* $g \in T(\overline{Q}_n)$ *така, що*

$$\|\overline{\delta}_s(g,x)\|_\infty \le |\overline{S}_n|^{-\frac{1}{2}}, \quad s \in \overline{S}_n,$$

$$\|g\|_2 \geq C_{11} > 0,$$

і для будь-якого $\varphi \in \Phi$ *виконується умова* $(g, \varphi) = 0$.

Отже, нехай M є заданим. Розглянемо деякий лінійний оператор G із $L_M(B)_1$, для якого $\dim G(B^{\Omega}_{\infty,\theta} \cap T(\overline{Q}_n)) \leq M$. Підберемо парне n із умови $|\overline{Q}_{n-2}| < 4M \leq$ $\leq |\overline{Q}_n|$. Тоді $\dim G(T(\overline{Q}_n)) \leq M$, і оскільки $M \leq \dfrac{|\overline{Q}_n|}{4}$, то розмірність простору $\Psi \subset T(\overline{Q}_n)$ такого, що $G(\Psi) = 0$, буде більшою за M. Крім того, внаслідок леми 1 знайдеться функція $g \in \Psi$ така, що

$$\|\overline{\delta}_s(g, x)\|_\infty \leq |\overline{S}_n|^{-\frac{1}{2}}, \quad s \in \overline{S}_n,$$

і

$$\|g\|_2 \geq C_{11} > 0.$$

Розглянемо функцію $f_1(x) = C_{12}\omega(2^{-n})|\overline{S}_n|^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} g(x)$, $C_{12} > 0$, і оцінимо $\|f_1\|_{B^{\Omega}_{\infty,\theta}}$, $2 \leq \theta < \infty$.

Використовуючи зображення (4) при $p = \infty$, для f_1 маємо

$$\|f_1\|_{B^{\Omega}_{\infty,\theta}} \asymp \left(\sum_s \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)}) \|A_s(f_1, x)\|^{\theta}_{\infty} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n})|\overline{S}_n|^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{s \in \overline{S}_n} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)}) \|\overline{\delta}_s(g, x)\|^{\theta}_{\infty} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n})|\overline{S}_n|^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} |\overline{S}_n|^{-\frac{1}{2}} \omega^{-1}(2^{-n}) \left(\sum_{s \in \overline{S}_n} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll n^{-\frac{d-1}{\theta}} n^{\frac{d-1}{\theta}} = 1.$$

Із одержаного робимо висновок, що функція f_1 із відповідною сталою $C_{12} > 0$ належить класу $B^{\Omega}_{\infty,\theta}$, $2 \leq \theta < \infty$.

Тепер оцінимо $\|f_1(x) - Gf_1(x)\|_1$. Зазначимо, що оскільки $g \in \Psi$ і $G(\Psi) = 0$, то

$$\|g(x) - Gg(x)\|_1 = \|g\|_1. \tag{18}$$

Для того щоб оцінити знизу $\|g\|_1$, скористаємось нерівністю [11, т. 1, с. 330]

$$\|g\|_2 \leq \|g\|_1^{\frac{1}{3}} \|g\|_4^{\frac{2}{3}},$$

внаслідок якої

$$\|g\|_1 \geq \|g\|_2^3 \|g\|_4^{-2}. \tag{19}$$

Таким чином, оскільки згідно з лемою 1 $\|g\|_2 \geq C_{11} > 0$, то для одержання шуканої оцінки знизу для $\|g\|_1$ залишається відповідним чином оцінити знизу $\|g\|_4^{-2}$. З огляду на те, що $g \in \Psi \subset T(\overline{Q}_n)$, на підставі теореми Літтлвуда – Пелі і нерівності Мінковського будемо мати

$$0 < \|g\|_4 \ll \left\| \left(\sum_{s \in \overline{S}_n} |\overline{\delta}_s(g,x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_4 \ll \left(\sum_{s \in \overline{S}_n} \|\overline{\delta}_s(g,x)\|_4^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{s \in \overline{S}_n} \|\overline{\delta}_s(g,x)\|_\infty^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq |\overline{S}_n|^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{s \in \overline{S}_n} 1 \right)^{\frac{1}{2}} = |\overline{S}_n|^{-\frac{1}{2}} |\overline{S}_n|^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Звідси $\|g\|_4^{-1} \geq C_{13}$, тому, враховуючи (19), отримуємо оцінку

$$\|g\|_1 \geq C_{14}. \tag{20}$$

Отже, із (18) і (20) маємо

$$\|g(x) - Gg(x)\|_1 \geq C_{14}$$

і внаслідок вибору функції f_1 одержуємо шукану оцінку знизу у випадку $2 \leq \leq \theta < \infty$:

$$\|f_1(x) - Gf_1(x)\|_1 = C_{12}\omega(2^{-n})|\overline{S}_n|^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \|g(x) - Gg(x)\|_1 \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})}.$$

Для встановлення відповідної оцінки знизу величини $d_M^B(B_{\infty,\theta}^\Omega, L_1)$ у випадку $1 \leq \theta < 2$ також використаємо допоміжне твердження.

Через S_n і $\widetilde{Q}_n$ позначимо множини

$$S_n = \left\{ s : (s,1) = n, s_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1,d} \right\}, \quad \widetilde{Q}_n = \bigcup_{s \in S_n} \rho(s).$$

Має місце наступна лема.

Лема 2 [7]. *Нехай $G \in L_M(B)_1$ і число n таке, що $C_{15}(B,d)|\widetilde{Q}_{n-1}| < M < < C_{16}(B,d)|\widetilde{Q}_n|$. Тоді існують вектор $k^0 = (k_1^0, \ldots, k_d^0) \in \widetilde{Q}_n$ і стала $C_{17}(d) > 0$ такі, що*

$$\left\| e^{i(k^0,x)} - Ge^{i(k^0,x)} \right\|_1 \geq C_{17}(d).$$

Розглянемо функцію $f_2(x) = \omega(2^{-n})e^{i(k^0,x)}$. Використовуючи (4), легко переконатись, що f_2 належить класу $B_{\infty,\theta}^\Omega$. Тоді згідно з лемою 2 для f_2 маємо

$$\|f_2(x) - Gf_2(x)\|_1 = \omega(2^{-n}) \left\| e^{i(k^0,x)} - Ge^{i(k^0,x)} \right\|_1 \gg \omega(2^{-n}).$$

Нехай тепер $\theta = \infty$. У цьому випадку знову скористаємося допоміжним твердженням.

Лема 3 [7]. *Нехай $G \in L_M(B)_1$. Тоді існують число n і множина $S_n^1 \subset S_n$ такі, що $|\widetilde{Q}_n| < C_{18}(B,d)M$, $|S_n^1| \geq \dfrac{|S_n|}{2}$ і в кожному $\rho(s), s \in S_n^1$, знайдуться вектори $k^s \in \rho(s)$ такі, що для функції*

$$g_1(x) = \sum_{s \in S_n^1} e^{i(k^s,x)}$$

і деякого вектора y^* має місце оцінка

$$\|g_1(x + y^*) - Gg_1(x + y^*)\|_1 \gg (\log M)^{\frac{d-1}{2}}.$$

Розглянемо функцію

$$f_3(x) = \omega(2^{-n}) g_1(x).$$

З огляду на зображення (4′) легко переконатись, що f_3 належить класу $B^{\Omega}_{\infty,\infty}$. Для того щоб оцінити $\|f_3(x+y^*) - Gf_3(x+y^*)\|_1$, використаємо лему 3. Тоді

$$\|f_3(x+y^*) - Gf_3(x+y^*)\|_1 = \omega(2^{-n}) \|g_1(x+y^*) - Gg_1(x+y^*)\|_1 \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n}) (\log M)^{\frac{d-1}{2}} \asymp \omega(2^{-n}) n^{\frac{d-1}{2}}.$$

Оцінки знизу величини $d^B_M(B^{\Omega}_{\infty,\theta}, L_1)$ при $1 \le \theta \le \infty$ встановлено, а отже, теорему 2 доведено.

Теорема 2′. *Нехай* $p \ge 2$, $1 \le \theta \le \infty$, $\Omega(t) = \omega(t_1 \ldots t_d)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > 0$ *та умову* (S_l). *Тоді*

$$\mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_1 \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})_+}, \tag{21}$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Оцінка зверху в (21) випливає на основі нерівності $\mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_1 \le \mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q$ з оцінки наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ східчасто-гіперболічними сумами Фур'є $S_{Q_n}(f,x)$ у метриці L_q при $1 < q \le p < \infty$, $p \ge 2$ [12], а оцінка знизу — з теореми 1 при умові $M \asymp 2^n n^{d-1}$ внаслідок нерівності

$$d^{\perp}_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_1) \ll \mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_1.$$

***Наслідок* 1.** *При* $\theta = \infty$ *із теореми* 2 *у випадку* $1 \le q \le p \le \infty$, $p \ge 2$, $(q,p) \ne (\infty, \infty)$ *отримуємо оцінку*

$$d^{\perp}_M(H^{\Omega}_p, L_q) \asymp d^B_M(H^{\Omega}_p, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) n^{\frac{d-1}{2}},$$

де $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

***Зауваження* 1.** Точні за порядком оцінки величин $d^{\perp}_M(F, L_q)$ і $d^B_M(F, L_q)$, якщо p і q задовольняють умови теореми 1, для класів $F = H^r_p$ встановив В. М. Темляков [7], а у випадку, коли роль F відіграють класи $B^r_{p,\theta}$, — А. С. Романюк [9].

Теорема 3. *Нехай* $1 \le q \le p \le 2$, $(q,p) \ne (1,1)$ *і* $\Omega(t) = \omega(t_1 \ldots t_d)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > 0$ *та умову* (S_l). *Тоді при* $1 \le \theta \le \infty$ *має місце порядкова рівність*

$$d^{\perp}_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp d^B_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta})_+}, \tag{22}$$

де $M \asymp 2^n n^{d-1}$, $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Доведення. Оцінка зверху у співвідношенні (22) випливає із результату наближення функцій класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$ східчасто-гіперболічними сумами Фур'є $S_{Q_n}(f,x)$ у метриці L_p [2] на основі нерівності $\mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \le \mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_p$, $q \le p$.

Переходячи до встановлення відповідної оцінки знизу в (22) для $d^B_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$, зазначимо, що її достатньо встановити для випадку $q = 1$, $1 < p \le 2$.

Нехай спочатку $1 \le \theta < p$. У цьому випадку оцінка знизу величини $d^B_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_1)$ встановлюється за допомогою тих самих міркувань, що і при доведенні оцінки знизу в теоремі 2 у випадку $1 \le \theta < 2$.

Розглянемо тепер випадок $p \le \theta \le \infty$. Введемо деякі позначення та сформулюємо твердження, яке будемо використовувати у подальших міркуваннях.

Як і в теоремі 2, через S_n і $\widetilde{Q}_n$ позначимо множини

$$S_n = \left\{ s : (s,1) = n, s_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1,d} \right\}, \qquad \widetilde{Q}_n = \bigcup_{s \in S_n} \rho(s),$$

а також покладемо

$$\widetilde{S}_n = \left\{ s \in S_n : s_j \geq \frac{n}{2d}, j = \overline{1,d} \right\}.$$

Оскільки $|S_n| \asymp n^{d-1}$, то легко переконатись, що і $|\widetilde{S}_n| \asymp n^{d-1}$.

Нехай K_n означає ядро Фейєра порядку n, тобто

$$K_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1} \right) \cos kt.$$

Через k^s позначимо вектор $k^s = (k_1^{s_1}, \ldots, k_d^{s_d})$, де

$$k_j^{s_j} = \begin{cases} 2^{s_j - 1} + 2^{s_j - 2}, & s_j \geq 2, \\ 1, & s_j = 1, \quad j = \overline{1,d}. \end{cases}$$

Далі, розіб'ємо куб π_d на n^{d-1} кубів з довжиною ребра $\dfrac{2\pi}{|\widetilde{S}_n|^{\frac{1}{d}}}$ і встановимо взаємно однозначну відповідність між множиною $\widetilde{S}_n$ і утвореною множиною кубів. При цьому через $x^s \in \pi_d$ позначимо центр куба, що відповідає вектору $s \in \widetilde{S}_n$, і покладемо $u = 2^{[(1-\frac{1}{d})\log_2 n]}$.

При таких позначеннях має місце наступне твердження.

Лема 4 [7]. *Нехай $G \in L_M(B)_1$. Тоді існують число n і множина $S_n^2 \subset \widetilde{S}_n$ такі, що $|\widetilde{Q}_n| < C_{19}(B,d)M$, $|S_n^2| \geq \dfrac{|\widetilde{S}_n|}{2}$ і в кожному $\rho(s), s \in S_n^2$, знайдуться куби з центрами в k^s і довжинами ребер $2u$ такі, що для функції*

$$g_2(x) = \sum_{s \in S_n^2} e^{i(k^s,x)} \prod_{j=1}^{d} K_u(x_j - x_j^s)$$

і деякого вектора y^* має місце оцінка

$$\|g_2(x+y^*) - Gg_2(x+y^*)\|_1 \gg \log^{d-1} M.$$

Перейдемо безпосередньо до встановлення оцінки знизу величини $d_M^B(B_{p,\theta}^{\Omega}, L_1)$. Розглянемо для цього функції

$$f_4(x) = \omega(2^{-n}) n^{-\frac{d-1}{\theta}} g_2(x), \quad 2 \leq \theta < \infty,$$

$$f_5(x) = \omega(2^{-n}) g_2(x), \quad \theta = \infty,$$

і оцінимо $\|f_4\|_{B_{p,\theta}^{\Omega}}$, $2 \leq \theta < \infty$, та $\|f_5\|_{B_{p,\infty}^{\Omega}}$, використавши (4) і (4′) відповідно.

Враховуючи, що внаслідок вибору параметра u

$$\|A_s(g_2,x)\|_p \ll \left\| \prod_{j=1}^{d} K_u(x_j) \right\|_p \asymp u^{d(1-\frac{1}{p})} \asymp n^{(d-1)(1-\frac{1}{p})} \quad \forall s \in S_n^2,$$

маємо

$$\|f_4\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \omega(2^{-n}) n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{s \in S^2_n} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)}) \|A_s(g_2,x)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n}) n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{s \in S^2_n} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)}) n^{(d-1)(1-\frac{1}{p})\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= \omega(2^{-n}) n^{-\frac{d-1}{\theta}} \omega^{-1}(2^{-n}) n^{(d-1)(1-\frac{1}{p})} \left(\sum_{s \in S^2_n} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} n^{(d-1)(1-\frac{1}{p})} n^{\frac{d-1}{\theta}} = n^{(d-1)(1-\frac{1}{p})}, \tag{23}$$

$$\|f_5\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_s \frac{\|A_s(f_5,x)\|_p}{\omega(2^{-(s,1)})} = \omega(2^{-n}) \sup_{s \in S^2_n} \frac{\|A_s(g_2,x)\|_p}{\omega(2^{-(s,1)})} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1-\frac{1}{p})} \omega^{-1}(2^{-n}) = n^{(d-1)(1-\frac{1}{p})}. \tag{24}$$

Таким чином, з (23) і (24) робимо висновок, що

$$g_3(x) = C_{20} n^{-(d-1)(1-\frac{1}{p})} f_4(x) = C_{20} \omega(2^{-n}) n^{-(d-1)(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{\theta})} g_2(x)$$

належить класу $B^{\Omega}_{p,\theta}, 2 \le \theta < \infty$, з відповідною сталою $C_{20} > 0$, а

$$g_4(x) = C_{21} n^{-(d-1)(1-\frac{1}{p})} f_5(x) = C_{21} \omega(2^{-n}) n^{-(d-1)(1-\frac{1}{p})} g_2(x)$$

— класу $B^{\Omega}_{p,\infty}$ з відповідною сталою $C_{21} > 0$.

Далі, згідно з лемою 4 існує вектор y^* такий, що

$$\|g_3(x+y^*) - Gg_3(x+y^*)\|_1 \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n}) n^{-(d-1)(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{\theta})} \|g_2(x+y^*) - Gg_2(x+y^*)\|_1 \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n}) n^{-(d-1)(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{\theta})} \log^{d-1} M \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n}) n^{-(d-1)(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{\theta})} n^{d-1} = \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta})}.$$

Як і вище, внаслідок леми 4

$$\|g_4(x+y^*) - Gg_4(x+y^*)\|_1 \gg \omega(2^{-n}) n^{\frac{d-1}{p}}.$$

Теорему 3 доведено.

Теорема 3′. *Нехай* $1 < p \le 2$, $1 \le \theta \le \infty$, $\Omega(t) = \omega(t_1 \ldots t_d)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > 0$ *та умову* (S_l). *Тоді*

$$\mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_1 \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta})_+},$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Оцінка зверху випливає з [2], а знизу — з теореми 3 при умові, що $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

***Наслідок* 2.** *При* $\theta = \infty$ *із теореми* 3 *у випадку* $1 \le q \le p \le 2$, $(q,p) \ne (1,1)$ *отримуємо оцінку*

$$d^{\perp}_M(H^{\Omega}_p, L_q) \asymp d^B_M(H^{\Omega}_p, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) n^{\frac{d-1}{p}},$$

де $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

***Зауваження* 2.** У випадку $1 \leq q \leq p \leq 2$, $(q,p) \neq (1,1)$ точні за порядком оцінки величин $d_M^{\perp}(H_p^r, L_q)$ і $d_M^B(H_p^r, L_q)$ встановив В. М. Темляков [7], а величин $d_M^{\perp}(B_{p,\theta}^r, L_q)$ і $d_M^B(B_{p,\theta}^r, L_q)$ — А. С. Романюк [9].

***Зауваження* 3.** Теореми $2'$ і $3'$ доповнюють результати робіт [2, 12, 13] по наближенню класів $B_{p,\theta}^{\Omega}$ східчасто-гіперболічними сумами Фур'є.

1. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 483 – 522.
2. *Sun Youngsheng, Wang Heping.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. Мат. ин-та РАН. – 1997. – **219**. – С. 356 – 377.
3. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
4. *Пустовойтов Н.Н.* Многомерная теорема Джексона в пространстве L_p // Мат. заметки. – 1992. – **52**, № 1. – С. 35 – 48.
5. *Пустовойтов Н. Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. math. – 1994. – **20**. – P. 35 – 48.
6. *Темляков В. Н.* Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных // Докл. АН СССР. – 1982. – **267**, № 2. – С. 314 – 317.
7. *Темляков В. Н.* Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **189**. – С. 138 – 168.
8. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Там же. – 1986. – **178**. – С. 1 – 112.
9. *Романюк А. С.* Оценки аппроксимативных характеристик классов Бесова $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q. I // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 9. – С. 1224 – 1231.
10. *Романюк А. С.* Оценки аппроксимативных характеристик классов Бесова $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q. II // Там же. – № 10. – С. 1402 – 1408.
11. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т 1. – 615 с; Т 2. – 537 с.
12. *Стасюк С. А.* Найкращі наближення, колмогоровські та тригонометричні поперечники класів $B_{p,\theta}^{\Omega}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 11. – С. 1557 – 1568.
13. *Стасюк С. А.* Наближення класів $B_{p,\theta}^{\Omega}$ періодичних функцій багатьох змінних у рівномірній метриці // Там же. – 2002. – **54**, № 11. – С. 1551 – 1559.

Одержано 13.09.2005