УДК 517.9

Я. А. Прикарпатський (Ін-т математики НАН України, Київ
та AGH Univ. Sci. and Technol., Krakow, Poland)

СИМПЛЕКТИЧНИЙ МЕТОД ПОБУДОВИ ЕРГОДИЧНИХ МІР НА ІНВАРІАНТНИХ ПІДМНОГОВИДАХ НЕАВТОНОМНИХ ГАМІЛЬТОНОВИХ СИСТЕМ: ЛАГРАНЖЕВІ МНОГОВИДИ, ЇХ СТРУКТУРА ТА ГОМОЛОГІЇ МАЗЕРА*

We develop a new approach to the study of properties of ergodic measures for nonautonomous periodic Hamiltonian flows on symplectic manifolds, which are applied in many problems of mechanics and mathematical physics. By using the Mather results on the homology of invariant probability measures, which minimize some Lagrangian functionals, and the symplectic theory developed by Floer and others for the investigation of symplectic actions and transversal splittings of Lagrangian manifolds, we propose the analog of the Mather-type β-function for the study of ergodic measures associated with nonautonomous Hamiltonian systems on weakly exact symplectic manifolds. In the frame of the Gromov – Salamon – Zehnder elliptic methods in symplectic geometry, we establish some results on stable and unstable manifolds to hyperbolic invariant sets, which are applied in the theory of adiabatic invariants of slowly perturbed integrable Hamiltonian systems.

Розвивається новий підхід до вивчення властивостей ергодичних мір для неавтономних періодичних гамільтонових потоків на симплектичних многовидах, які використовуються в багатьох задачах механіки та математичної фізики. Ґрунтуючись на результатах Дж. Мазера про гомології інваріантних ймовірнісних мір, що мінімізують деякі лагранжеві функціонали, а також на симплектичній теорії, розвиненій А. Флоером та іншими для дослідження симплектичних дій і трансверсальних перетинів лагранжевих многовидів, запропоновано аналог β-функції типу Мазера для вивчення ергодичних мір, асоційованих з неавтономними гамільтоновими системами на слабко точних симплектичних многовидах. Деякі результати про стійкі та нестійкі многовиди до гіперболічних інваріантних множин, що застосовуються в теорії адіабатичних інваріантів повільно збурених інтегровних гамільтонових систем, встановлено в рамках еліптичних методів Громова – Саламона – Зендера в симплектичній геометрії.

Вступ. За останні роки методи симплектичної геометрії в застосуванні до вивчення широкого класу гамільтонових динамічних систем досить бурхливо розвивалися [1 – 4]. Зокрема, при аналізі структури періодичних розв'язків неавтономних гамільтонових систем на симплектичних многовидах були запропоновані нові математичні методи їх дослідження, що ґрунтуються на аналогу теорії Морса для нескінченновимірних многовидів петель [5, 6] та симплектичній геометрії лагранжевих многовидів [7 – 9]. Так, вивчаючи ергодичні міри, асоційовані з лагранжевими динамічними системами на дотичних просторах до конфігураційних замкнених многовидів, Дж. Мазер [8] запропонував новий підхід до вивчення відповідних інваріантних ймовірнісних мір за допомогою спеціально сконструйованої β-функції на групі гомологій лагранжевого многовиду. Ця функція дає, зокрема, можливість ефективно описати так звані гомології інваріантних ймовірнісних мір, що мінімізують відповідний лагранжевий функціонал дії. Як показано в [10], підхід Дж. Мазера допускає нетривіальне узагальнення на випадок опису ергодичних мір, що природно пов'язані з заданою неавтономною періодичною гамільтоновою системою на замкненому симплектичному многовиді. З цією метою в даній статті

*Частково підтримана грантом AGH (Польща).

розвивається нова конструкція β-функції Мазера, асоційованої з відповідним многовидом Лагранжа та його гомологічною структурою. Ґрунтуючись, зокрема, на варіанті еліптичної техніки М. Громова [4, 6, 7], конструюємо скінченновимірні інваріантні підмноговиди петель, асоційованих з лагранжевим многовидом неавтономної гамільтонової системи, які є носіями відповідних інваріантних ергодичних мір.

1. Ергодичні міри на симплектичних многовидах. Загальні властивості. Нехай $(M^{2n}, \omega^{(2)})$ є симплектичним $2n$-вимірним гладким метричним простором. Симплектична структура $\omega^{(2)} \in \Lambda^2(M)$ називається слабко точною, якщо $\omega^{(2)}(\pi_2(M^{2n})) = 0$, де $\pi_2(M^{2n})$ — друга гомотопічна група многовиду M^{2n}. Розглянемо гладке періодичне відображення $H : M^{2n} \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ і побудуємо гладке неавтономне векторне поле $K : M^{2n} \times \mathbb{S}^1 \to T(M)$ на M^{2n} за правилом

$$i_K\omega^{(2)} = -dH, \tag{1.1}$$

де i_K — звичайне внутрішнє диференціювання алгебри Грасмана $\Lambda(M^{2n})$. Якщо $u \in M^{2n}$ є точкою многовиду M^{2n} у локальних координатах, то рівність (1.1) еквівалентна рівнянням

$$\frac{du}{ds} = K(u;t), \qquad \frac{dt}{ds} = 1 \tag{1.2}$$

для всіх $t \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}^1$, для яких існує орбіта $\varphi : M^{2n} \times \mathbb{S}^1 \to M^{2n}$ векторного поля (1.2), тобто відображення $\mathbb{R} \ni s \to \varphi^s(u) \in M^2$ для кожного $u \in M^{2n}$ розв'язує (1.2). Оскільки симплектична структура $\omega^{(2)} \in \Lambda^2(M^{2n})$ є замкненою, тобто $d\omega^{(2)} = 0$ на M^{2n}, з (1.1) випливає

$$\frac{d}{ds}\omega^{(2)} = 0 \tag{1.3}$$

для всіх точок орбіти векторного поля (1.2).

Далі будемо вважати, що орбіта $\varphi : M^{2n} \to M^{2n}$ є визначеною на M^{2n} для всіх $s \in \mathbb{R}$. Розглянемо наступну інфінітезимальну міру $d\mu_\omega := (\omega^{(2)})^n \in \Lambda^{2n}(M^{2n})$ на многовиді M^{2n}. З (1.3) легко випливає, що міра μ_ω є інваріантною відносно векторного поля (1.2), тобто

$$\int\limits_{\varphi^{-s}(A)} d\mu_\omega(u) = \int\limits_A \varphi^{s,*} d\mu_\omega(u) = \int\limits_A d\mu_\omega(u) \tag{1.4}$$

для будь-якої вимірної борелевої підмножини $A \subset M^{2n}$ та всіх $s \in \mathbb{R}$, де ми позначили через $\varphi^{s,*} : \Lambda^{2n}(M^{2n}) \to \Lambda^{2n}(M^{2n})$ відповідне кодотичне відображення до відображення $\varphi^s : M^{2n} \to M^{2n}$, $s \in \mathbb{R}$. Дійсно, оскільки умова (1.3) означає, що

$$\varphi^{s,*}\omega^{(2)} = \omega^{(2)} \tag{1.5}$$

для всіх $s \in \mathbb{R}$, то з (1.4) і (1.5) знаходимо

$$\mu_\omega(\varphi^{-s}(A)) = \mu_\omega(A) \tag{1.6}$$

для всіх $s \in \mathbb{R}$ та борелевих підмножин $A \subset M^{2n}$, що й означає [11, 12] інваріантність міри μ_ω на M^{2n}. Оскільки нас будуть цікавити борелеві інваріантні міри з носіями на певних підмноговидах чи підмножинах многовиду M^{2n}, то очевидно, що ці міри не обов'язково повинні бути обмеженнями побудованої вище міри μ_ω на ці підмножини, а можуть існувати інші інваріантні міри, серед яких такі, що задовольняють умову ергодичності.

Означення 1.1. *Нехай* $\psi^s : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, $s \in \mathbb{R}$, *є потоком на* $\mathcal{L}$. *Тоді* ψ^s-*інваріантна міра* μ *на множині* $\mathcal{L}$ *називається ергодичною, якщо для кожної вимірної інваріантної* (*борелевої*) *підмножини* $A \subset \mathcal{L}$ *виконується умова* $\mu(A) = 0$ *або* $\mu(\mathcal{L} \setminus A) = 0$.

Означення 1.2. *Потік* $\psi^s : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ *для* $s \in \mathbb{R}$ *на інваріантній вимірній підмножині* $\mathcal{L} \subset M^{2n}$ *називається строго ергодичним, якщо для нього існує лише одна інваріантна міра.*

Має місце таке твердження, що характеризує строго ергодичні міри.

Твердження 1.1. *Єдина інваріантна міра* μ *строго ергодичного потоку* $\psi^s : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, $s \in \mathbb{R}$, *є ергодичною.*

Доведення. Нехай $A \subset \mathcal{L}$ є вимірною підмножиною з умовою $\mu(A) > 0$. Тоді можна визначити на $\mathcal{L}$ нову умовну міру

$$\mu_A(B) := \mu(B \cap A)/\mu(A) \tag{1.7}$$

для всіх вимірних підмножин $B \subset \mathcal{L}$. Якщо міра μ не є ергодичною, то обов'язково знайдеться така ψ^s-інваріантна підмножина $A \subset \mathcal{L}$, що $0 < \mu(A) < 1$. Тоді, очевидно, дві міри μ_A та $\mu_{\mathcal{L}\setminus A}$ є відмінними одна від одної ψ^s-інваріантними мірами на $\mathcal{L}$, оскільки $\mu_A(A) = 1$, $\mu_{\mathcal{L}\setminus A} = 0$, що суперечить умові існування лише однієї інваріантної міри на $\mathcal{L}$. Отже, повинна виконуватись умова $\mu_A(A) = 0$ або $\mu_A(A) = 1$, що й означає ергодичність міри μ на $\mathcal{L}$.

Твердження 1.1 доведено.

Ергодичність зручно переформулювати також в функціональних термінах. А саме, інваріантний потік $\psi^s : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, $s \in \mathbb{R}$, є ергодичним, якщо будь-яка вимірна дійсна ψ^s-інваріантна функція $f : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ є майже скрізь сталою. Як наслідок, справджується таке твердження [11].

Твердження 1.2. *Якщо потік* $\psi^s : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, $s \in \mathbb{R}$, *є відображенням, ергодичним відносно ймовірнісної міри* μ, *то для кожної функції* $f : L_1^{(\mu)}(\mathcal{L}; \mathbb{R})$ *виконується рівність*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} f \circ (\psi^s u) ds \doteq \int\limits_{\mathcal{L}} f d\mu \tag{1.8}$$

майже скрізь для всіх $u \in \mathcal{L}$.

Доведення. Оскільки вираз з лівої частини (1.8) згідно з теоремою Біркгофа – Хінчина [12, 13] існує для майже всіх $u \in \mathcal{L}$ і є інваріантним відносно відображення $\psi^s : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, $s \in \mathbb{R}$, то він є майже скрізь сталим на $\mathcal{L}$, і стала ця, очевидно, дорівнює правій частині (1.8) завдяки інваріантності міри μ, що й доводить твердження 1.2.

Твердження 1.2 приводить до постановки важливого питання: чи має будь-який неперервний потік $\psi^s : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, $s \in \mathbb{R}$, ергодичну інваріантну міру на $\mathcal{L}$? Для широкого класу потоків відповідь є ствердною, причому кожну таку інваріантну міру можна розкласти на так звані ергодичні компоненти. Якщо позначити через

$\mathcal{M}(\psi^s;\mathcal{L})$ множину всіх ψ^s-інваріантних імовірнісних борелевих мір на компактах $\mathcal{L}$, то ця множина буде опуклою і замкненою, а отже, компактною підмножиною всіх борелевих імовірнісних мір на $\mathcal{L}$. Справджується [12, 14] наступне твердження.

Твердження 1.3. *Якщо міра $\mu \in \mathcal{M}(\psi^s;\mathcal{L})$ не є ергодичною, то існує таке число $\lambda \in (0,1)$, а також різні інваріантні міри μ_1 та $\mu_2 \in \mathcal{M}(\psi^s;\mathcal{L})$, що виконується умова $\mu = \lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2$ на $\mathcal{L}$.*

Доведення. Справді, якщо існує інваріантна підмножина $A \subset \mathcal{L}$ така, що $0 < \mu(A) < 1$, то легко зауважити, що

$$\mu = \mu(A)\mu_A + \mu(\mathcal{L}\setminus A)\mu_{\mathcal{L}\setminus A},$$

де μ_A і $\mu_{\mathcal{L}\setminus A}$ визначені за допомогою (1.7). Тоді при $\mu_1 = \mu_A$, $\mu_2 = \mu_{\mathcal{L}\setminus A}$ і $\lambda = \mu(A)$ отримуємо справедливість даного твердження.

Твердження 1.3 є підставою для побудови розкладу інваріантної міри $\mu \in \mathcal{M}(\psi^s;\mathcal{L})$ як опуклої оболонки крайніх точок опуклого компакту $\mathcal{M}(\psi^s;\mathcal{L})$. Це питання, яке в загальному випадку є дуже нетривіальним, ґрунтовно вивчалось, зокрема, у відомій праці [14] та у працях багатьох інших авторів. Відомо, що для скінченновимірних компактних опуклих множин $\mathcal{M}(\psi^s;\mathcal{L})$ крайні точки [11, 14, 15] завжди існують. Можна довести також, що у випадку нескінченновимірного опуклого компакту $\mathcal{M}(\psi^s;\mathcal{L})$ крайні точки існують теж [11, 14], що обумовлює існування ергодичних мір на $\mathcal{L}$ для неперервного потоку $\psi^s : \mathcal{L} \to \mathcal{L}, s \in \mathbb{R}$. Стосовно побудови інваріантних мір та їх розкладів на ергодичні компоненти, що пропонуються в даній праці і вивчаються за допомогою конструкції так званої β-функції Мазера, важливим є саме існування крайніх точок опуклого компакту $\mathcal{M}(\psi^s;\mathcal{L})$, які є, власне, шуканими ергодичними мірами з відповідними носіями. При цьому їх наявність гарантується важливою додатковою умовою існування нетривіальної β-функції Мазера на відповідній групі гомологій певного опуклого скінченновимірного компакту, опуклий симпліціальний розклад якого за допомогою крайніх точок існує за теоремою Мінковського – Крейна – Мільмана [11, 14, 15]. Дійсно, оскільки мають місце теорема 3.1 та наслідок 3.1 з даної статті про сюр'єктивність відповідного відображення мір та гомологій, шукана інваріантна міра та її розклад на ергодичні компоненти є простим наслідком властивостей побудованої тут β-функції Мазера.

Розглянемо тепер вираз (1.8) для характеристичної функції $f := \chi_A$ будь-якої вимірної множини $A \subset \mathcal{L}$. Тоді, інтегруючи обидві частини по борелевій множині $B \subset \mathcal{L}$, з (1.8) отримуємо

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} \mu(\psi^{-s}A \cap B)ds = \mu(A)\mu(B) \tag{1.9}$$

для будь-яких борелевих A та $B \subset \mathcal{L}$. Якщо справджується рівність (1.9), то інваріантна міра μ буде, очевидно, ергодичною для потоку $\psi^s : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, $s \in \mathbb{R}$.

Зауважимо також, що більш сильна властивість

$$\lim_{s\to\infty} \mu(\psi^{-s}A \cap B) = \mu(A)\mu(B) \tag{1.10}$$

для всіх борелевих множин A і $B \subset \mathcal{L}$ має назву перемішування. Очевидно, що потік $\psi^s : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, $s \in \mathbb{R}$, який є відносно певної інваріантної міри μ на $\mathcal{L}$

перемішуванням, тобто задовольняє (1.10), буде одночасно і ергодичним, але не навпаки.

Нехай тепер $\mathcal{L} \subset M^{2n} \times \mathbb{S}^1$ є інваріантною підмножиною для періодичного гамільтонового потоку (1.2). Тоді, очевидно, існує редукція канонічної інваріантної міри μ_ω з компактного простору $M^{2n} \times \mathbb{S}^1$ на $\mathcal{L}$, якщо множина $\mathcal{L} \subset M^{2n} \times \mathbb{S}^1$ є гладко вкладеним (імерсією) підмноговидом в $M^{2n} \times \mathbb{S}^1$. На жаль, редукована міра $\mu_\omega \times d\theta|_{\mathcal{L}}$ у багатьох випадках є або виродженою, або неінваріантною, що вимагає знаходження іншого способу побудови інваріантних мір на таких множинах. У випадку лагранжевих періодичних динамічних систем на дотичних многовидах такий спосіб було розвинено у працях [8, 9], ґрунтуючись на гомологічних властивостях так званої функції Мазера і фундаментальній теоремі Крилова – Боголюбова [11, 13, 16] про існування інваріантних імовірнісних мір для будь-якого неперервного потоку $\psi^s : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, $s \in \mathbb{R}$, на компактному метричному просторі $\mathcal{L}$.

Побудову з праць [8, 9] буде нижче розвинено й узагальнено на випадок неавтономних періодичних гамільтонових систем на замкнених симплектичних слабко точних многовидах $(M^{2n}, \omega^{(2)})$ за допомогою еліптичної техніки, запропонованої в [3 – 7, 17] на симплектичних многовидах із квазікомплексною структурою. Як застосування отриманих результатів у наступному пункті буде наведено аналіз проблеми Мельнікова – Самойленка стійкості адіабатичних інваріантів для певного класу неавтономних періодичних адіабатично збурених гамільтонових систем осциляторного типу, близьких до цілком інтегровних за Ліувіллем – Арнольдом.

2. Симплектичний аналіз неавтономних періодичних гамільтонових систем. Нехай, як і вище, $(M^{2n}, \omega^{(2)})$ — замкнений симплектичний многовид з умовою слабкої точності $\omega^{(2)}(\pi_2(M^{2n})) = 0$. Кожній достатньо гладкій функції $H : M^{2n} \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ відповідає неавтономне векторне поле $K_H : M^{2n} \times \mathbb{S}^1 \to$ $\to T(M^{2n})$, яке задовольняє умову (1.1), тобто

$$i_{K_H}\omega^{(2)} = -dH. \tag{2.1}$$

Відповідне векторне поле на $M^{2n} \times \mathbb{S}^1$ можна записати як

$$\frac{du}{ds} = K_H(u;t), \qquad \frac{dt}{ds} = 1, \tag{2.2}$$

де $t \in \mathbb{R}^1/2\pi\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}^1$, а $(u;t) : \mathbb{R} \to M^{2n} \times \mathbb{S}^1$ — орбіта відповідного повного потоку $\psi^s : M^{2n} \times \mathbb{S}^1 \to M^{2n} \times \mathbb{S}^1$, визначеного для всіх $s \in \mathbb{R}$. Зауважимо, що векторне поле в (2.2) є 2π-періодичним по еволюційній змінній $t \in \mathbb{S}^1$. Проекція $\psi^s_{t_0} := \psi^s|_{M^{2n}}$, $s \in \mathbb{R}$, при фіксованому значенні параметра $t_0 \in \mathbb{S}^1$ задовольняє, очевидно, умову типу (1.5), тобто

$$\psi^{s,*}_{t_0}\omega^{(2)} = \omega^{(2)} \tag{2.3}$$

для всіх $s \in \mathbb{R}$. Відображення $\psi^s_{t_0} : M^{2n} \to M^{2n}$, $s \in \mathbb{R}$, яке задовольняє умову (2.3), є симплектичним [1, 2].

Розглянемо тепер 1-форму $\alpha^{(1)} \in \Lambda^1(M^{2n})$ таку, що $\displaystyle\int_{D^2}(\omega^{(2)} - d\alpha^{(1)}) = 0$ для будь-якого компактного двовимірного диска $D^2 \subset M^{2n}$. Така 1-форма $\alpha^{(1)} \in$ $\in \Lambda^1(M^{2n})$ існує [7, 17] завдяки умові $\omega^{(2)}(\pi_2(M^{2n})) = 0$.

Розглянемо тепер деякий $(n+1)$-вимірний підмноговид $\mathcal{L}^{n+1} \subset M^{2n} \times \mathbb{S}^1$ такий, що для кожної замкненої стягувальної гладкої кривої $\gamma \subset \mathcal{L}^{n+1}$ виконується інтегральна рівність

$$\oint_{\gamma}(\alpha^{(1)}(s) - H(t_0 + s)ds) = 0, \qquad (2.4)$$

де $\gamma : \mathbb{R}^1/2\pi\mathbb{Z} \ni s \to \gamma(s) \in M^{2n} \times \mathbb{S}^1$ — відповідна параметризація кривої $\gamma \subset \subset \mathcal{L}^{n+1}$. Структуру підмноговиду $\mathcal{L}^{n+1} \subset M^{2n} \times \mathbb{S}^1$ опишемо таким чином. Нехай $\mathcal{L}^n_{t_0} \subset M^{2n}$ — деякий компактний лагранжевий підмноговид, тобто, за означенням, $\omega^{(2)}|_{\mathcal{L}^n_{t_0}} = 0$. Тоді за допомогою симплектоморфізму $\psi^s_{t_0} : M^{2n} \to M^{2n}$, $s \in \mathbb{R}$, можна записати вкладення

$$\{\psi^s_{t_0}\mathcal{L}^n_{t_0}, t_0 + s : \ s \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}^{n+1}, \qquad (2.5)$$

яке випливає з (2.4). Зокрема, для всіх $t_0 + s \in \mathbb{R}$ можна визначити в околі лагранжевого підмноговиду $\mathcal{L}^n_{t_0} \subset M^{2n}$ відображення $\mathcal{A}_{t_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для якого $\alpha^{(1)}(s) - H(s + t_0)ds = d\mathcal{A}_{t_0}(s)$, $s \in \mathbb{R}$, яке є породжуючою функцією для визначеної вище неперервної множини симплектоморфізмів $\psi^s_{t_0} \in \mathrm{Diff}(M^{2n})$, $s \in \mathbb{R}$. Більш того, вираз (2.4) дає можливість визначити природним чином наступний функціонал типу Пуанкаре – Картана на множині всіх майже скрізь диференційовних кривих $\gamma : [0, \tau] \to M^{2n} \times \mathbb{S}^1$:

$$\mathcal{A}^{(\tau)}_{t_0}(\gamma) := \frac{1}{\tau}\int_{\gamma}(\alpha^{(1)}(s) - H(s + t_0)ds), \qquad (2.6)$$

де $\gamma(\tau) = \psi^\tau(\gamma(0))$, $\mathrm{supp}\,\gamma \subset U(\mathcal{L}^n_{t_0}) \times \mathbb{S}^1$ і $U(\mathcal{L}^n_{t_0})$ — деякий відкритий окіл лагранжевого підмноговиду $\mathcal{L}^n_{t_0} \subset M^{2n}$, що задовольняє умову $\psi^s_{t_0}U(\mathcal{L}^n_{t_0}) \subset U(\mathcal{L}^n_{t_0})$ для всіх $s \in \mathbb{R}$.

Позначимо через $\Sigma_{t_0}(H)$ підмножину кривих γ з носієм в $U(\mathcal{L}^n_{t_0}) \times \mathbb{S}$, фіксованими кінцями і таких, що мінімізують функціонал (2.6). Якщо мінімум реалізується, то кожна така крива $\gamma \in \Sigma_{t_0}(H)$ розв'язує динамічну систему (2.2). Щоб описати структуру множини кривих $\Sigma_{t_0}(H)$ більш детально, виберемо згідно з [5, 7, 17] майже комплексну структуру $J : M^{2n} \to \mathrm{End}(T(M^{2n}))$ на симплектичному многовиді M^{2n}, де, за означенням, $J^2 = -\mathbf{1}$, яка сумісна з симплектичною структурою $\omega^{(2)} \in \Lambda^2(M^{2n})$. Тоді вираз

$$\langle \xi, \eta \rangle := \omega^{(2)}(\xi, J\eta), \qquad (2.7)$$

де $\xi, \eta \in T(M^{2n})$, визначає природним чином ріманову метрику на M^{2n}. По відношенню до цієї метрики (2.7) наше гамільтонове векторне поле $K_H : M^{2n} \times \mathbb{S}^1 \to \to T(M^{2n})$ зображується як $K_H = J\nabla H$, де $\nabla : \mathcal{D}(M^{2n}) \to T(M^{2n})$ позначає градієнтне відображення стосовно введеної вище ріманової метрики (2.7).

Розглянемо тепер простір $\Omega := \Omega(M^{2n} \times \mathbb{S}^1)$ усіх майже скрізь неперервно диференційовних кривих в $M^{2n} \times \mathbb{S}^1$ із фіксованими кінцевими точками. Тоді можна визначити на Ω функціонал виду (2.6) і обчислити відображення $\mathrm{grad}\,\mathcal{A}^{(\tau)}_{t_0} : \Omega \to T(\Omega)$:

$$(\mathrm{grad}\,\mathcal{A}^{(\tau)}_{t_0}(\gamma), \xi) := \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \langle J(\gamma_{t_0})\dot{\gamma}_{t_0}(s) + \nabla H(\gamma_{t_0}; s + t_0),\ \xi\rangle ds, \qquad (2.8)$$

де $\gamma := \{\gamma_{t_0}^{(s)}; t_0 + s(\operatorname{mod} 2\pi) : s \in [0,\tau]\} \in \Omega$ і елемент $\xi \in T(\Omega)$. Оскільки всі критичні криві $\gamma \in \Sigma_{t_0}(H)$, що мінімізують функціонал (2.6), розв'язують рівняння Гамільтона (2.2), можна побудувати інваріантну підмножину $\Omega_H \subset \Omega$ таку, що $\Omega_H := \Omega(U(\mathcal{L}_{t_0}^n) \times \mathbb{S}^1)$. А саме, визначимо криву $\gamma \in \Omega_H(\gamma^{(-)}) \subset \Omega_H$ як таку, що задовольняє градієнтний потік в $U(\mathcal{L}_{t_0}^n) \times \mathbb{S}^1$:

$$\frac{\partial u_{t_0}}{\partial z} = -\operatorname{grad} \mathcal{A}_{t_0}(u), \qquad \frac{\partial t}{\partial z} = 0 \tag{2.9}$$

для всіх $z \in \mathbb{R}$ при таких асимптотичних умовах:

$$\lim_{z\to-\infty} u_{t_0}(s;z) = \gamma_{t_0}^{(-)}(s), \qquad \lim_{z\to+\infty} u_{t_0}(s;z) = \gamma_{t_0}(s), \tag{2.10}$$

де $s \in [0,\tau]$ і криві $\gamma_{t_0}^{(-)}, \gamma_{t_0} : [0,\tau] \to M^{2n}$ задовольняють систему (2.2). Більш того, криву $\gamma_{t_0}^{(-)} : [0,\tau] \to M^{2n}$ вважаємо гіперболічною з носієм $\operatorname{supp} \gamma_{t_0}^{(1)} \subset \mathcal{L}_{t_0}^n$, де параметр $t_0 \in [0, 2\pi]$ є фіксованим. Тепер можемо побудувати, варіюючи криву $\gamma_{t_0} \subset \mathcal{L}_{t_0}^n$, аналог так званого нестійкого многовиду $W^u(\gamma_{t_0}^{(-)})$ до цієї гіперболічної кривої $\gamma_{t_0}^{(-)} \subset \mathcal{L}_{t_0}^n$. Таким чином, згідно з описаною вище побудовою, функціональний многовид $W^u(\gamma_{t_0}^{(-)})$ при умові його компактності в слабкій гладкій топології Вітні [6, 17] може бути вкладеним як точковий компактний підмноговид у M^{2n}. Це дозволяє інтерпретувати носії кривих, що розв'язують (2.9) та (2.10), із $\operatorname{supp} \gamma_{t_0} \subset \mathcal{L}_{t_0}^n$ як компактний окіл $\mathcal{L}_{t_0}^{(-)}(H) \subset U(\mathcal{L}_{t_0}^n)$ шуканого вище компактного лагранжевого підмноговиду $\mathcal{L}_{t_0}^n \subset M^{2n}$.

Подібну побудову можна провести для випадку, коли умови (2.10) замінено на

$$\lim_{z\to+\infty} \gamma_{t_0}(s;z) = \gamma_{t_0}^{(+)}(s), \qquad \lim_{z\to-\infty} \gamma_{t_0}(s;z) = \gamma_{t_0}(s), \tag{2.10а}$$

або

$$\lim_{z\to-\infty} \gamma_{t_0}(s;z) = \gamma_{t_0}^{(-)}(s), \qquad \lim_{z\to+\infty} \gamma_{t_0}(s;z) = \gamma_{t_0}^{(+)}(s), \tag{2.10б}$$

де $\gamma_{t_0}^{(\pm)} : [0,\tau] \to M^{2n}$ — дві різні строго неперетинні гіперболічні криві в M^{2n} з носіями $\operatorname{supp} \gamma_{t_0}^{(\pm)} \subset \mathcal{L}_{t_0}^n$, які розв'язують систему рівнянь (2.2).

Використовуючи умови (2.10а), можна побудувати аналогічно стійкий підмноговид $W^s(\gamma_{t_0}^{(+)})$ до гіперболічної кривої $\gamma_{t_0}^{(+)} \subset \mathcal{L}_{t_0}^n$ і далі відповідний точковий окіл $\mathcal{L}_{t_0}^{(+)}(H) \subset U(\mathcal{L}_{t_0}^n)$ компактного лагранжевого підмноговиду $\mathcal{L}_{t_0}^n \subset M^{2n}$, що є важливим для вивчення властивостей трансверсального перетину стійкого $W^s(\gamma_{t_0}^{(+)})$ та нестійкого $W^u(\gamma_{t_0})$ многовидів. Аналогічно, використовуючи умови (2.10б), можна побудувати околи $\mathcal{L}_{t_0}^{\pm}(H) \subset U(\mathcal{L}_{t_0}^n)$ компактного лагранжевого підмноговиду $\mathcal{L}_{t_0}^n \subset M^{2n}$, які є важливими при вивченні так званих адіабатичних збурень інтегровних за Ліувіллем – Арнольдом гамільтонових систем на симплектичному многовиді M^{2n}.

Скористаємося тепер підходом із робіт [5 – 7, 17] до вивчення структури функціональної множини Ω_H. Для функції Гамільтона $H : M^{2n} \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ загального положення множина Ω_H, виявляється, має властивість компактності в слабкій топології Вітні та скінченної розмірності. Це обумовлює можливість побудови відповідних компактних точкових многовидів $\mathcal{L}_{t_0}^{(\pm)}(H)$ та $\mathcal{L}_{t_0}(H)$ як околів лагранжевого підмноговиду $\mathcal{L}_{t_0}^n \subset M^{2n}$. Щоб побачити наочніше цей перехід до відповідного точкового компактного підмноговиду, розглянемо наступний диференціальний оператор першого порядку як лінеаризацію рівняння (2.9) у напрямку векторного поля $\xi \in T(\Omega_H)$:

$$F_{t_0}(u)\xi = \nabla_z \xi + J(u)\nabla_s \xi + \nabla_\xi J(u)\frac{\partial u}{\partial s} + \nabla_\xi \nabla H(u; t_0 + s), \tag{2.11}$$

де $u \in \Omega_H|_{M^{2n}}$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial z} + J(u)\frac{\partial u}{\partial s} + \nabla H(u; s + t_0) = 0 \tag{2.12}$$

і ∇_z, ∇_s та ∇_ξ позначають відповідні коваріантні похідні по відношенню до метрики (2.7) на M^{2n}. Якщо $u \in \Omega_H|_{M^{2n}}$ є обмеженою і задовольняє рівняння (2.12), крива γ_{t_0} в M^{2n} має носій $\operatorname{supp} \gamma_{t_0} \subset \mathcal{L}^n_{t_0}$ і криві $\gamma^{(\pm)}$, як гіперболічні і невироджені [5, 17], мають носії $\operatorname{supp} \gamma^{(\pm)}_{t_0} \subset \mathcal{L}^n_{t_0}$, то лінійне відображення $F_{t_0}(u) : T(\Omega_H) \to T(\Omega_H)$, визначене в (2.11), є фредгольмовим оператором [18] між відповідними просторами Соболева. При цьому пара відображень (H, J), де $J : M^{2n} \to \operatorname{End} T(M^{2n})$ задовольняє (2.7), називається регулярною [5], якщо кожний гіперболічний розв'язок (2.2) є невиродженим і оператор $F_{t_0}(u)$ є сюр'єкцією на $T(\Omega_H)$ для всіх $u \in \Omega_H|_{M^{2n}}$. У загальному випадку можна встановити, що простір $(\mathcal{H}, J)_{\mathrm{reg}} \subset (\mathcal{H}, J)$ регулярних пар $(H, J) \in (\mathcal{H}, J)$ є щільним по відношенню до C^∞-топології. Таким чином, для регулярних пар з теореми про неявну функцію [1, 18] випливає, що простір $\Omega_H(\gamma^{(-)}_{t_0})$ для будь-якої кривої $\gamma^{(-)}_{t_0}$ із $\operatorname{supp} \gamma_{t_0} \subset \mathcal{L}^n_{t_0}$ є скінченновимірним слабко компактним за Вітні функціональним підмноговидом, локальна розмірність якого біля точки $u \in \Omega_H(\gamma^{(-)}_{t_0})$ збігається з індексом Фредгольма оператора $F_{t_0}(u)$. Як висновок із скінченного виміру та компактності функціонального простору отримуємо, що $\Omega_H(\gamma^{(-)}_{t_0})$ є компактністю відповідної точкової множини $\mathcal{L}^{(-)}_{t_0}(H)$, яку можна розглядати як компактний інваріантний окіл лагранжевого підмноговиду $\mathcal{L}^n_{t_0} \subset M^{2n}$.

Щоб дати більш детальний опис компактного околу $\mathcal{L}^{(-)}_{t_0}(H)$, скористаємося результатами Флоера та Громова [4, 6, 7]. Зокрема, з їхньою допомогою можна проаналізувати структуру простору обмежених розв'язків задачі (2.9), (2.10). Легко встановити, що для будь-яких двох кривих $\gamma^{(-)}, \gamma : [0, \tau] \to \mathcal{L}^n_{t_0} \times \mathbb{S}^1$, що задовольняють рівняння (2.2), додатний функціонал

$$\Phi^{(\tau)}_{t_0}(u) := \frac{1}{\tau}\int_0^\tau ds \int_{\mathbb{R}} dz \left(\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial s} - K_H(u; s + t_0)\right|^2 \right) \tag{2.13}$$

при умові його обмеженості задовольняє характеристичну рівність

$$\Phi^{(\tau)}_{t_0}(u) = \mathcal{A}^{(\tau)}_{t_0}(\gamma^{(-)}) - \mathcal{A}^{(\tau)}_{t_0}(\gamma) \tag{2.14}$$

для всіх $t_0 \in \mathbb{S}^1$ і $\tau \in \mathbb{R}$. Тому якщо права частина рівності (2.14) не дорівнює нулю, функціональний простір $\Omega_H(\gamma^{(-)})$ буде *a priori* нетривіальним. Подібним чином для обмеженого розв'язку $u \in \Omega_H|_{M^{2n}}$ рівняння (2.12) отримуємо

$$\Phi^{(\tau)}_{t_0}(u) = \mathcal{A}^{(\tau)}_{t_0}(\gamma) - \mathcal{A}^{(\tau)}_{t_0}(\gamma^{(+)}), \tag{2.14a}$$

де відповідна крива $\gamma^{(+)}_{t_0} : [0, \tau] \to M^{2n}$ задовольняє систему (2.2) і є гіперболічною, причому носій $\operatorname{supp} \gamma_{t_0} \subset \mathcal{L}^n_{t_0}$, і, насамкінець, для $u \in \mathcal{L}_{t_0}(H)$

$$\Phi_{t_0}^{(\tau)}(u) = \mathcal{A}_{t_0}^{(\tau)}(\gamma^{(-)}) - \mathcal{A}_{t_0}^{(\tau)}(\gamma^{(+)}), \tag{2.14б}$$

де криві $\gamma^{(\pm)} : [0,\tau] \to M^{2n} \times \mathbb{S}^1$ є строго відмінними, гіперболічними з носіями $\operatorname{supp}\gamma_{t_0}^{(\pm)} \subset \mathcal{L}_{t_0}^n$. Випадок, коли $\gamma_{t_0}^{(-)} = \gamma_{t_0}^{(+)}$, очевидно, приводить лише до точок $u \in \mathcal{L}_{t_0}^n$. Таким чином, ми сконструювали відповідні інваріантні компактні околи $\mathcal{L}_{t_0}^{(\pm)}(H)$ та $\mathcal{L}_{t_0}(H)$ компактного підмноговиду $\mathcal{L}_{t_0}^n \subset M^{2n}$, які складаються з точок обмежених розв'язків рівнянь (2.9), (2.10) та (2.10а), (2.10б). Ґрунтуючись на цих даних та аналітичних виразах (2.14), (2.14а), (2.14б), можна сформулювати наступне твердження.

Твердження 2.1. *Всі околи $\mathcal{L}_{t_0}^{(\pm)}(H)$ та $\mathcal{L}_{t_0}(H)$, побудовані за запропонованою вище схемою, є компактними й інваріантними по відношенню до гамільтонового потоку дифеоморфізмів $\psi^s \in \operatorname{Diff}(M^{2n} \times \mathbb{S}^1)$, $s \in \mathbb{R}$.*

Розглянемо тепер випадок компактного інваріантного околу $\mathcal{L}_{t_0}(H) \subset M^{2n}$. Попередній опис простору кривих Ω_H дає можливість, використовуючи підхід Дж. Мазера [8, 19], вивчити інші важливі властивості компактного околу $\mathcal{L}_{t_0}(H)$, зокрема структуру простору ймовірнісних борелевих мір $\mathcal{M}_{t_0}(H) :=$ $:= \mathcal{M}(T(\mathcal{L}_{t_0}(H)) \times \mathbb{S}^1)$ із компактним носієм, інваріантних по відношенню до гамільтонового потоку дифеоморфізмів $\psi^s \in \operatorname{Diff}(M^{2n} \times \mathbb{S}^1)$, $s \in \mathbb{R}$, розширеного природним чином на простір $T(\mathcal{L}_{t_0}(H)) \times \mathbb{S}^1$. Цей гамільтонів ψ-потік, завдяки твердженню 2.1, можна редукувати інваріантним чином на компактний інваріантний підмноговид $\mathcal{L}_{t_0}(H) \times \mathbb{S}^1 \subset M^{2n} \times \mathbb{S}^1$. З метою більш детального вивчення цього редукованого ψ-потоку на підмноговиді $\mathcal{L}_{t_0}(H) \times \mathbb{S}^1$ припустимо, що розширений гамільтоновий ψ_*-потік на $T(\mathcal{L}_{t_0}(H)) \times \mathbb{S}^1$ є ергодичним, тобто $\lim\limits_{\tau\to\infty} \mathcal{A}_{t_0}^{(\tau)}(\gamma)$ не залежить від початкових точок $(u_0, \dot{u}; t_0) \in T(\mathcal{L}_{t_0}(H)) \times \mathbb{S}^1$.

Пригадаймо тепер один результат (див., наприклад, [18, с. 262]) із функціонального аналізу, який стверджує, що множина ймовірнісних мір на компактному метричному просторі X є підмножиною дуального простору $C^*(X)$ до простору Банаха $C(X)$ неперервних функцій на X. Ця множина є, очевидно, опуклою і, як відомо [20], є також метризованим компактом по відношенню до слабкої топології на $C^*(X)$, яку часто ще називають слабкою $(*)$-топологією, а обмеження цієї топології до множини борелевих мір — нечіткою топологією на них.

Оскільки простір $\mathcal{P}_{t_0} := T(\mathcal{L}_{t_0}(H)) \times \mathbb{S}$ є метризованим і може бути одноточково компактифікованим, множина борелевих імовірнісних мір на $\mathcal{P}_{t_0}$ є також метризованим опуклим компактом по відношенню до слабкої топології на просторі $C^*(\mathcal{P}_{t_0})$, дуальному до банахового простору неперервних функцій на $\mathcal{P}_{t_0}$. Відповідна множина $\mathcal{M}_{t_0}(H)$ буде тоді також компактною опуклою підмножиною цього компакту борелевих імовірнісних мір на $\mathcal{P}_{t_0}$.

Добре відомий класичний результат М. М. Крилова і М. М. Боголюбова [13, 16] стверджує, що будь-який ψ-потік на компактному метричному просторі X має інваріантну ймовірнісну міру. Цей результат можна адаптувати до нашого метричного компактифікованого простору $\mathcal{P}_{t_0} := T(\mathcal{L}_{t_0}(H)) \times \mathbb{S}$ таким чином. Візьмемо траєкторію $\gamma \in \Omega_H$ розширеного ψ_*-потоку на $\mathcal{P}_{t_0}$ із носієм $\operatorname{supp}\gamma \subset$ $\subset \mathcal{L}_{t_0}(H) \times \mathbb{S}$, визначеним на інтервалі $[0,\tau] \subset \mathbb{R}$, і припустимо, що міра μ_τ на $T(\mathcal{L}_{t_0}(H)) \times \mathbb{S}$ рівномірно розподілена вздовж орбіти $\gamma \in \Omega_H$. Тоді, очевидно, $\|\psi_*^s\mu_\tau - \mu_\tau\| \leqslant 2s/\tau$ для всіх $s \in [0,\tau)$. Позначимо через μ точку згущення множини $\{\mu_\tau : \tau \in \mathbb{R}_+\}$ при $\tau \to \infty$ по відношенню до раніше визначеної нечіткої топології. Для будь-якої неперервної функції $f \in C(\mathcal{P}_{t_0})$, довільного $s \in \mathbb{R}$ та будь-яких

$\tau_0, \varepsilon > 0$ існує $\tau > \tau_0$ таке, що $\left|\int_{\mathcal{P}_{t_0}} f \circ \psi_*^{\bar{s}} d\mu - \int_{\mathcal{P}_{t_0}} f \circ \psi_*^{\bar{s}} d\mu_\tau\right| < \varepsilon$ для всіх $\bar{s} \in \{0, s\}$. Тоді з цих оцінок випливає

$$\left|\int\limits_{\mathcal{P}_{t_0}} f \circ \psi_*^s d\mu - \int\limits_{\mathcal{P}_{t_0}} f d\mu\right| \leqslant \left|\int\limits_{\mathcal{P}_{t_0}} f \circ \psi_*^s d\mu - \int\limits_{\mathcal{P}_{t_0}} f d\mu_\tau\right| +$$

$$+\left|\int\limits_{\mathcal{P}_{t_0}} f \circ \psi_*^s d\mu_\tau - \int\limits_{\mathcal{P}_{t_0}} f d\mu_\tau\right| + \left|\int\limits_{\mathcal{P}_{t_0}} f d\mu_\tau - \int\limits_{\mathcal{P}_{t_0}} f d\mu\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon + \|f\| \|\psi_*^s \mu_\tau - \mu_\tau\| \leqslant 2\varepsilon + 2s\|f\|/\tau,$$

тобто $\left|\int_{\mathcal{P}_{t_0}} f \circ \psi_*^s d\mu - \int_{\mathcal{P}_{t_0}} f d\mu\right| = 0$, оскільки $\varepsilon > 0$ є довільним малим додатним числом і $\tau_0 > 0$ — будь-яке велике додатне число. Тепер ми бачимо, що сконструйована міра $\mu \in \mathcal{M}_{t_0}(H)$, тобто є нормованою й інваріантною по відношенню до розширеного гамільтонового ψ_*-потоку на $\mathcal{P}_{t_0}$. Отже, у випадку ергодичності ψ_*-потоку на $\mathcal{P}_{t_0}$ згадана вище границя

$$\lim_{\tau \to \infty} \mathcal{A}_{t_0}^{(\tau)}(\gamma) = \int\limits_{\mathcal{P}_{t_0}} (\alpha^{(1)} - H) d\mu,$$

де 1-форма $\alpha^{(1)} \in \Lambda^1(M^{2n})$ розглядається як функція $\alpha^{(1)} : \mathcal{P}_{t_0} \to \mathbb{R}$, оскільки підмноговид $\mathcal{L}_{t_0}(H)$ за побудовою є компактним і інваріантно вкладеним у M^{2n} завдяки твердженню 2.1. Таким чином, природно вивчати властивості функціонала

$$\mathcal{A}_{t_0}(\mu) := \int\limits_{\mathcal{P}_{t_0}} (\alpha^{(1)} - H) d\mu \tag{2.15}$$

на просторі мір $\mathcal{M}_{t_0}(H)$, де ми для простоти знехтували природним відображенням обмеження 1-форми $\alpha^{(1)} \in \Lambda^1(M^{2n})$ на інваріантний підмноговид $\mathcal{L}_{t_0}(H) \subset M^{2n}$. Оскільки нас цікавлять ергодичні властивості ψ_*-орбіт на $T(\mathcal{L}_{t_0}(H)) \times \mathbb{S}$, нижче ми розвиваємо аналог гомологічної техніки Дж. Мазера для лагранжевих мір [8, 20] для складнішого і цікавішого випадку редукованого гамільтонового ψ-потоку — на інваріантний компактний підмноговид $\mathcal{L}_{t_0}(H) \subset M^{2n}$. Зокрема, ми побудуємо так званий аналог β-функції Мазера [8, 20] на групі гомологій $H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H); \mathbb{R})$, чиї лінійні області генерують ергодичні компоненти міри $\mu \in \mathcal{M}_{t_0}(H)$, які мінімізують функціонал (2.15) і є дуже важливими для вивчення властивостей регулярності ψ_*-потоку на $T(\mathcal{L}_{t_0}(H)) \times \mathbb{S}$. Ці результати можна далі поширити на адіабатично збурені гамільтонові системи, які залежать від малого додатного параметра $\varepsilon \downarrow 0$, зауваживши, що неперервна гамільтонова функція $H(t) := \tilde{H}(\varepsilon t)$, $t \in \mathbb{R}$, де $\tilde{H}(\tau + 2\pi) = \tilde{H}(\tau)$ для всіх $\tau \in \mathbb{R}$, задовольняє необхідні властивості розглядуваних систем на M^{2n}. При цьому можна вивчити існування так званих адіабатичних інваріантів із компактними носіями в $\mathcal{L}_{t_0} \subset M^{2n}$, які мають різні застосування в математичній фізиці та механіці. Деякі з результатів можуть бути застосовані до дослідження важливої проблеми трансверсального перетину відповідних стійких та нестійких многовидів до гіперболічних кривих і сингулярних точок, що характеризують, згідно з ідеями А. Пуанкаре, існування в нашій гамільтоновій системі сильно нерегулярних рухів.

3. Інваріантні міри та β-функція Мазера. Перед дослідженням усередненого функціонала (2.15) на просторі мір $\mathcal{M}_{t_0}(H)$ проаналізуємо властивості функціонала

$$\oint\limits_{\sigma} a^{(1)} := \langle a^{(1)}, \sigma \rangle \tag{3.1}$$

на просторі $H^1(\mathcal{L}_{t_0}(H); \mathbb{R})$ при фіксованому значенні елемента $\sigma \in H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H); \mathbb{R})$. Оскільки 1-форма $a^1 \in H^1(\mathcal{L}_{t_0}(H); \mathbb{R})$ в (3.1) може одночасно розглядатися як функція $a^{(1)} : \mathcal{P}_{t_0} \to \mathbb{R}$, то на підставі відомої теореми Рісса [18, 19] існує борелева міра $\mu : \mathcal{P}_{t_0} \to \mathbb{R}_+$ (на разі не ψ-інваріантна) така, що

$$\langle a^{(1)}, \sigma \rangle = \int\limits_{\mathcal{P}_{t_0}} a^{(1)} d\mu \tag{3.2}$$

для всіх $a^1 \in H^1(\mathcal{L}_{t_0}(H); \mathbb{R})$. Наступна лема характеризує праву частину (3.2).

Лема 3.1. *Нехай 1-форма $a^{(1)} = d\lambda^{(0)} \subset \Lambda^1(\mathcal{L}_{t_0}(H))$ є точною, тобто когомологічний клас $[d\lambda^{(0)}] = 0 \in H^1(\mathcal{L}_{t_0}(H); \mathbb{R})$. Тоді для будь-якої міри $\mu \in \mathcal{M}_{t_0}(H)$*

$$\int\limits_{\mathcal{P}_{t_0}} a^{(1)} d\mu = 0. \tag{3.3}$$

Доведення. Справді, для $a^{(1)} = d\lambda^{(0)}$, де $\lambda^{(0)} : \mathcal{L}_{t_0}(H) \to \mathbb{R}$ — деяке абсолютно неперервне відображення, за теоремою Фубіні має місце така оцінка для всіх $\tau \in \mathbb{R}_+$:

$$\left| \int\limits_{\mathcal{P}_{t_0}} d\lambda^{(0)} d\mu \right| = \left| \frac{1}{\tau} \int\limits_0^\tau ds \int\limits_{\mathcal{P}_{t_0}} d\lambda^{(0)} (\psi_*^s d\mu) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{\tau} \int\limits_0^\tau d\mu \int\limits_{\mathcal{P}_{t_0}} ds d(\lambda^{(0)} \circ \psi_*^s)/ds) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{\tau} \int\limits_{\circ P_{t_0}} d\mu [\lambda^{(0)} \circ \psi_*^\tau - \lambda^{(0)} \circ \psi_*^{(0)}] \right| \leqslant \frac{2\|\lambda^{(0)}\|}{\tau}. \tag{3.4}$$

Остання нерівність в (3.4) при $\tau \to \infty$ приводить до (3.3), що й доводить лему.

Таким чином, права частина (3.2) визначає на $H^1(\mathcal{L}_{t_0}(H); \mathbb{R})$ добре визначений функціонал

$$H^1(\mathcal{L}_{t_0}(H); \mathbb{R}) \ni a^{(1)} \longrightarrow \int\limits_{\mathcal{P}_{t_0}} a^{(1)} d\mu \in \mathbb{R}$$

на просторі когомологій $H^1(\mathcal{L}_{t_0}(H); \mathbb{R})$, що дає можливість сформулювати наступну теорему.

Теорема 3.1. *Нехай елемент* $\sigma \in H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H);\mathbb{R})$ *є фіксованим. Тоді існує* ψ*-інваріантна ймовірнісна борелева міра* (*не єдина*!) $\mu \in \mathcal{M}_{t_0}(H)$ *така, що має місце зображення* (3.2), *і, навпаки, для будь-якої міри* $\mu \in \mathcal{M}_{t_0}(H)$ *існує такий гомологічний клас* $\sigma := \rho_{t_0}(\mu) \in H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H);\mathbb{R})$, *що*

$$\langle a^{(1)}, \rho_{t_0}(\mu)\rangle = \int\limits_{\mathcal{P}_{t_0}} a^{(1)} d\mu \tag{3.5}$$

для всіх $a^{(1)} \in H^1(\mathcal{L}_{t_0}(H);\mathbb{R})$.

Наведемо тепер наступне означення (див. [16, 20]).

Означення 3.1. *Для будь-якої міри* $\mu \in \mathcal{M}_{t_0}(H)$ *гомологічний клас* $\rho_{t_0}(\mu) \in H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H);\mathbb{R})$ *будемо називати її гомологією.*

***Наслідок* 3.1.** *Відображення гомології* $\rho_{t_0} : \mathcal{M}_{t_0}(H) \to H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H);\mathbb{R})$, *визначене в теоремі* 3.1, *є сюр'єктивним.*

Доведення. Факт, що для кожної міри $\mu \in \mathcal{M}_{t_0}(H)$ існує єдиний гомологічний клас $[\sigma] = \rho_{t_0}(\mu) \in H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H);\mathbb{R})$, ґрунтується на добре відомій теоремі А. Пуанкаре [1, 4] про дуальність. Обернене твердження про сюр'єктивність відображення $\rho_{t_0} : \mathcal{M}_{t_0}(H) \to H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H);\mathbb{R})$ ґрунтується на наступній конструкції. Розглянемо [8, 21] накривний простір $\tilde{\mathcal{L}}_{t_0}(H)$ над $\mathcal{L}_{t_0}(H)$, визначений умовою, що $\pi_1(\tilde{\mathcal{L}}_{t_0}(H)) = \ker h_{t_0}$, де $h_{t_0} : \pi_1(\mathcal{L}_{t_0}(H)) \to H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H);\mathbb{R})$ позначає відповідний гомоморфізм Гуревича [21]. Оскільки насправді функціонал (3.5) є визначеним на накривному просторі $\tilde{\mathcal{L}}_{t_0}(H)$, то необхідно підняти всі криві $\gamma \in \Omega_H$ на $\mathcal{L}_{t_0}(H) \times \mathbb{S}$ до кривих $\tilde{\gamma} \subset \tilde{\Omega}_H$ на $\tilde{\mathcal{L}}_{t_0}(H) \times \mathbb{S}$. У випадку, коли гомотопічна група $\pi_1(\mathcal{L}_{t_0}(H))$ є абелевою, накривний простір $\tilde{\mathcal{L}}_{t_0}(H)$ стає універсальним, але в загальному випадку одержуємо його як накривний простір $\tilde{\mathcal{L}}_{t_0}(H)$, профакторизований по відношенню до дії ядра відповідного гомоморфізму Гуревича $h_{t_0} : \pi_1(\mathcal{L}_{t_0}(H)) \to H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H);\mathbb{R})$.

Виберемо тепер довільний елемент $\sigma \in H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H);\mathbb{R})$ і побудуємо апроксимуючу його множину так званих перетворень Дека у формі $\tau^{-1}\sigma_\tau \in \operatorname{Im} H_{t_0} \subset H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H);\mathbb{R})$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, і таких, що існує слабка границя $\lim\limits_{\tau\downarrow 0}\tau^{-1}\sigma_\tau = \sigma$. Покладемо далі $\tilde{x}_\tau := \sigma_\tau \circ \tilde{x}_0 \in \tilde{\mathcal{L}}_{t_0}(H) \times \mathbb{S}$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, де $\tilde{x}_0 \in \tilde{\mathcal{L}}_{t_0}(H) \times \mathbb{S}$ вибираємо довільним чином, і розглянемо таку криву $\tilde{\gamma} : [0,\tau] \to \tilde{\mathcal{L}}_{t_0}(H) \times \mathbb{S}$ із кінцевими точками $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$, $\tilde{\gamma}(\tau) = \tilde{x}_\tau$, проекція якої на $\mathcal{L}_{t_0}(H) \times \mathbb{S}^1$ буде кривою $\gamma \in \Sigma_{t_0}(H)$, що мінімізує функціонал (2.6). Розглянемо також множину $\{\mu_\tau : \tau \in \mathbb{R}_+\}$ імовірнісних мір на $\mathcal{P}_{t_0}$, рівномірно розподілених вздовж відповідних кривих $\gamma \in \Sigma_{t_0}(H)$ для кожного $\tau \in \mathbb{R}_+$, і позначимо через μ точку їх згущення при $\tau \to \infty$. Завдяки рівномірному розподілу мір μ_τ, $\tau \in \mathbb{R}_+$, вздовж кривих $\gamma \in \Sigma_{t_0}(H)$ із кінцевими точками, узгодженими по відношенню до вибраних вище перетворень Дека $\sigma_\tau \in H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H);\mathbb{R})$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, з ергодичної теореми Біркгофа – Хінчина [11 – 13] одержуємо

$$\int\limits_{\mathcal{P}_{t_0}} a^{(1)} d\mu_\tau = \langle a^{(1)}, \tau^{-1} a_\tau\rangle \tag{3.6}$$

для будь-якого $a^{(1)} \in H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H);\mathbb{R})$. Переходячи тепер до границі в (3.6) при $\tau \to \infty$ і беручи до уваги, що слабко $\lim\limits_{\tau\to\infty} \tau^{-1}\sigma_\tau = \sigma$, легко отримуємо, що рівність (3.5) має місце для деякої міри $\mu \in \mathcal{M}_{t_0}(H)$ такої, що $\rho_{t_0}(\mu) = \sigma \in H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H);\mathbb{R})$, тим самим встановлюючи сюр'єктивність відображення $\rho_{t_0} : \mathcal{M}_{t_0}(H) \to \to H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H);\mathbb{R})$.

Наслідок доведено.

Повернемось тепер до аналізу усередненого функціонала (2.15) стосовно простору всіх інваріантних мір $\mathcal{M}_{t_0}(H)$. А саме, розглянемо β-функцію β_{t_0}: $H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H);\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, визначену як

$$\beta_{t_0}(\sigma) := \inf_{\mu \in \mathcal{M}_{t_0}(H)} \{\mathcal{A}_{t_0}(\mu) : \rho_{t_0}(\mu) = \sigma \in H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H);\mathbb{R})\}, \tag{3.7}$$

яку будемо називати β-функцією типу Мазера на підставі її аналогії з визначенням в [8, 9, 20]. Має місце така лема.

Лема 3.2. *Нехай* 1-*форма* $a^{(1)} \in H^1(\mathcal{L}_{t_0}(H);\mathbb{R})$ *є довільною. Тоді* β-*функція типу Мазера*

$$\beta_{t_0}^{(a)}(\sigma) := \inf_{\mu \in \mathcal{M}_{t_0}(H)} \{\mathcal{A}_{t_0}^{(a)}(\mu) : \rho_{t_0}(\mu) = \sigma \in H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H);\mathbb{R})\}, \tag{3.8}$$

де, за визначенням,

$$\mathcal{A}_{t_0}^{(a)}(\mu) := \int\limits_{\mathcal{P}_{t_0}} (\alpha^{(1)} + a^{(1)} - H) d\mu, \tag{3.9}$$

задовольняє рівність

$$\beta_{t_0}^{(a)}(\sigma) = \beta_{t_0}(\sigma) + \langle a^{(1)}, \sigma \rangle \tag{3.10}$$

для всіх $\sigma \in H^1(\mathcal{L}_{t_0}(H);\mathbb{R})$.

Доведення легко випливає з (3.8) та рівності (3.5).

Припустимо тепер, що інфінімум в (3.7) досягається на мірі $\mu(\sigma) \in \mathcal{M}_{t_0}(H)$. Тоді, очевидно, $\rho_{t_0}(\mu(\sigma)) = \sigma$ для будь-якого гомологічного класу $\sigma \in H^1(\mathcal{L}_{t_0}(H); \mathbb{R})$. Позначимо через $\mathcal{M}_{t_0}^{(\sigma)}(H)$ множину всіх мір з $\mathcal{M}_{t_0}(H)$, що мінімізують функціонал (3.7), і перейдемо до вивчення ергодичних та гомологічних властивостей цієї множини мір.

4. Ергодичні міри та їх гомології. Розглянемо введену вище β-функцію типу Мазера $\beta_{t_0}^{(a)} : H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H);\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ для будь-яких $a^{(1)} \in H^1(\mathcal{L}_{t_0}(H);\mathbb{R})$. Очевидно, що вона є опуклою функцією на $H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H);\mathbb{R})$, тобто для будь-яких λ_1 і $\lambda_2 \in [0,1]$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, і $\sigma_1, \sigma_2 \in H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H);\mathbb{R})$ справджується нерівність

$$\beta_{t_0}^{(a)}(\lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2) \leqslant \lambda_1\beta_{t_0}^{(a)}(\sigma_1) + \lambda_2\beta_{t_0}^{(a)}(\sigma_2).$$

Як звичайно, в теорії опуклих функцій визначається [15] так званий екстремальний елемент $\sigma \in H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H);\mathbb{R})$, якщо $\beta_{t_0}^{(a)}(\lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2) < \lambda_1\beta_{t_0}^{(a)}(\sigma_1) + \lambda_2\beta_{t_0}^{(a)}(\sigma_2)$ для всіх $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,1)$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, і $\sigma = \lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2 \in H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H);\mathbb{R})$. Відповідно, будемо називати опуклу множину $Z_{t_0}(H) \subset H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H);\mathbb{R})$ лінійною областю β-функції типу Мазера (3.8), якщо

$$\beta_{t_0}^{(a)}(\lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2) = \lambda_1\beta_{t_0}^{(a)}(\sigma_1) + \lambda_2\beta_{t_0}^{(a)}(\sigma_2)$$

для всіх $\sigma_1, \sigma_2 \in Z_{t_0}(H)$ та $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Легко бачити тепер, що коли елемент $\sigma \in H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H);\mathbb{R})$ є екстремальним, то множина $\mathcal{M}_{t_0}^{(\sigma)}(H)$ містить [9, 15, 20] компоненти, які є ергодичними мінімізуючими мірами. А саме, згідно з [8, 9, 20], можна встановити, що коли $Z_{t_0}(H)$ є лінійною областю і $\mathcal{P}_{t_0}^{(\sigma)} \subset \mathcal{P}_{t_0}$ — замикання об'єднання носіїв усіх мір $\mu(\sigma) \in \mathcal{M}_{t_0}^{(\sigma)}(H)$ із $\sigma \in Z_{t_0}(H)$, то множина $\mathcal{P}_{t_0}^{(\sigma)}$ буде компактною і обернене відображення $(p_{t_0}|_{\mathcal{P}_{t_0}^{(\sigma)}})^{-1} : p_{t_0}\mathcal{P}_{t_0}^{(\sigma)} \to \mathcal{P}_{t_0}^{(\sigma)}$ є ліпшицевим, де $p_{t_0} : \mathcal{P}_{t_0} \to \mathcal{L}_{t_0}(H) \times \mathbb{S}$ є стандартною проекцією, ін'єктивною на $\mathcal{P}_{t_0}^{(\sigma)}$. Більш того, можна показати [8, 20], що коли міра $\mu \in \mathcal{M}_{t_0}^{(\sigma)}(H)$ мінімізує функціонал (3.9), то її носій $\operatorname{supp}\mu \subset \mathcal{P}_{t_0}^{(\sigma)}$ і всі її ергодичні компоненти $\{\bar{\mu}\}$ також мінімізують цей функціонал, при цьому опукла оболонка відповідних гомологій $\operatorname{conv}\{\rho_{t_0}(\bar{\mu})\}$ є лінійною областю $Z_{t_0}^{(\sigma)}(H)$ β-функції типу Мазера (3.8). Ці результати є досить цікавими з точки зору багатьох важливих застосувань у динаміці. Зокрема, ергодичні міри, як відомо, мають визначальну властивістю, яка полягає в тому, що кожна інваріантна борелева множина має міру 0 або 1, що обумовлює важливу рівність

$$\lim_{\tau \to \infty} \mathcal{A}_{t_0}^{(\tau)}(\gamma) = \mathcal{A}_{t_0}(\bar{\mu}) \tag{4.1}$$

рівномірно відносно елементів $(\gamma_{t_0}(0), \dot{\gamma}_{T_0}(0); t_0) \in \mathcal{P}_{t_0} \cap \operatorname{supp}\bar{\mu}$, де $\gamma \in \Sigma_{t_0}(H)$.

Отже, можна сформулювати наступну теорему.

Теорема 4.1. *Нехай міра $\mu \in \mathcal{M}_{t_0}(H)$ мінімізує функціонал* (3.9) *і задовольняє умову $\beta_{t_0}^{(a)}(\rho_{t_0}(\mu)) = \mathcal{A}_{t_0}(\mu)$. Тоді носій $\operatorname{supp}\mu \subset \Sigma_{t_0}(H)$, а опукла оболонка гомологій $\rho_{t_0}(\hat{\mu}) \in H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H); \mathbb{R})$, де $\{\hat{\mu}\} \subset \mathcal{M}_{t_0}(H)$ — відповідні ергодичні компоненти міри $\mu \in \mathcal{M}_{t_0}(H)$, є лінійною областю $Z_{t_0}(H)$ β-функції типу Мазера* (3.8).

Доведення. Нехай $h_{t_0} : \pi_1(\mathcal{L}_{t_0}(H)) \to H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H); \mathbb{R})$ — відповідний гомоморфізм Гуревича. Візьмемо деякий базис $\sigma_k \in \operatorname{Im} h_{t_0} \subset H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H); \mathbb{R})$, $k = \overline{1, r}$, де $r = \dim(\operatorname{Im} h_{t_0})$, який є дуальним до базису $a_j^{(1)} \in H^1(\mathcal{L}_{t_0}(H); \mathbb{R})$, $j = \overline{1, r}$. Тоді для будь-яких точок $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{\mathcal{L}}_{t_0}(H) \times \mathbb{S}^1$ можна визначити елемент $\xi^{(\tau)}(\tilde{x}, \tilde{y}|\tilde{\gamma}) \in H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H); \mathbb{R})$ як суму

$$\xi^{(\tau)}(\tilde{x}, \tilde{y}|\tilde{\gamma}) := \frac{1}{\tau} \sum_{j=1}^{r} \sigma_j \int_0^\tau \tilde{a}_j^{(1)}(\tilde{\gamma}),$$

де $\tilde{\gamma} : [0, \tau] \to \tilde{\mathcal{L}}_{t_0}(H) \times \mathbb{S}$ — будь-яка неперервна крива, що з'єднує ці дві точки, і $\tilde{a}_j^{(1)} \in H^1(\tilde{\mathcal{L}}_{t_0}(H); \mathbb{R})$, $j = \overline{1, r}$, — відповідні підняття на $\tilde{\mathcal{L}}_{t_0}(H)$ 1-форм $a_j^{(1)} \in H^1(\mathcal{L}_{t_0}(H); \mathbb{R})$, $j = \overline{1, r}$. Тепер можна легко показати, що коли міра μ є ергодичною і $\operatorname{supp}\mu \subset \Sigma_{t_0}(H)$, то міра μ мінімізує функціонал (3.9). Покладемо далі $\sigma := \rho_{t_0}(\mu)$ і нехай $Z_{t_0}(H) \subset H_1(\tilde{\mathcal{L}}_{t_0}(H); \mathbb{R})$ — несуча область, яка містить гомологічний клас $\sigma \in H_1(\tilde{\mathcal{L}}_{t_0}(H); \mathbb{R})$. Тоді можна бачити, що екстремальні точки опуклої множини $Z_{t_0}(H)$ є також екстремальними точками β-функції Мазера (3.8). Далі розкладемо гомологічний клас $\sigma := \rho_{t_0}(\mu)$ як опуклу комбінацію екстремальних точок $\bar{\sigma}_j \in \Sigma_{t_0}(H)$, $j = \overline{1, m}$, для деякого $m \in \mathbb{Z}_+$. Оскільки елементи $\bar{\sigma}_j \in Z_{t_0}(H)$, $j = \overline{1, m}$, є екстремальними, то існують ергодичні міри $\bar{\mu}_j \in \mathcal{M}_{t_0}^{(\sigma)}(H)$, $j = \overline{1, m}$, такі, що $\rho_{t_0}(\bar{\mu}_j) = \bar{\sigma}_j$, $j = \overline{1, m}$. Більш того, з огляду на те, що множина $Z_{t_0}^{(\sigma)}(H)$ є лінійною областю, легко отримуємо

$$\beta_{t_0}^{(a)} = \sum_{j=1}^{m} c_j \beta_{t_0}^{(a)}(\bar{\sigma}_j) = \sum_{j=1}^{m} c_j \mathcal{A}_{t_0}^{(a)}(\bar{\mu}_j),$$

де $\sigma := \sum_{j=1}^{m} c_j \bar{\sigma}_j$ — елемент із деякими дійсними коефіцієнтами $c_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, m}$. Завдяки ергодичності міри $\mu \in \mathcal{M}_{t_0}(H)$ з ергодичної теореми Біркгофа – Хінчина

[1, 13] виводиться, що існує орбіта $\tilde{\gamma} : [0, \tau] \to \tilde{\mathcal{L}}_{t_0}(H) \times \mathbb{S}^1$ із носієм $\operatorname{supp} \gamma \subset \subset \operatorname{supp} \mu$ така, що виконуються властивість (4.1) разом із рівністю

$$\sigma := \rho_{t_0}(\mu) = \lim_{\tau \to \infty} \xi^{(\tau)}(\tilde{x}, \tilde{y} | \tilde{\gamma}).$$

Далі, існують криві $\tilde{\gamma}_j \in \Sigma_{t_0}(H)$, $\operatorname{supp} \tilde{\gamma}_j \subset \bar{\mu}_j$, $j = \overline{1, m}$, такі, що виконуються рівності

$$\bar{\sigma}_j := \rho_{t_0}(t_0)(\bar{\mu}_j) = \lim_{\tau \to \infty} \xi^{(\tau)}(\tilde{x}, \tilde{y} | \tilde{\gamma}_j)$$

разом з рівностями $\beta_{t_0}^{(a)}(\bar{\sigma}_j) = \mathcal{A}_{t_0}^{(a)}(\bar{\mu}_j) = \lim\limits_{\tau \to \infty} \mathcal{A}_{t_0}^{(\tau)}(\tilde{\gamma}_j)$ для всіх $j = \overline{1, m}$. При виконанні умов (2.14б), накладених на інваріантний окіл $\mathcal{L}_{t_0}(H)$, встановлюємо, що для будь-якої міри $\mu \in \mathcal{M}_{t_0}(H)$ такої, що $\rho_{t_0}(\mu) = \sigma$, має місце нерівність $\mathcal{A}_{t_0}^{(a)}(\mu) \leqslant \beta_{t_0}^{(a)}(\rho_{t_0}(\mu))$, тим самим доводячи її мінімальність.

Припустимо тепер, що міра $\mu \in \mathcal{M}_{t_0}(H)$ має ергодичні компоненти, носії якої лежать в $\Sigma_{t_0}(H)$, і опукла оболонка її гомологій є лінійною областю β-функцій типу Мазера (3.8). Можна апроксимувати (в слабкій топології) міру $\mu \in \mathcal{M}_{t_0}(H)$ за допомогою опуклої комбінації $\hat{\mu} := \sum_{j=1}^{m} \hat{c}_j \bar{\mu}_j$, де $\hat{c}_j \in \mathbb{R}$ і $\bar{\mu}_j \in \mathcal{M}_{t_0}(H)$, $j = \overline{1, m}$, є ергодичними компонентами міри $\mu \in \mathcal{M}_{t_0}(H)$. Тоді вкладення $\operatorname{supp} \hat{\mu} \subset \subset \Sigma_{t_0}(H)$ означають, що всі міри $\bar{\mu}_j \in \mathcal{M}_{t_0}(H)$, $j = \overline{1, m}$, мінімізують (3.9), тобто є мінімальними.

Таким чином, оскільки опукла оболонка гомологій $\{\rho_{t_0}(\bar{\mu}_j) \in H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H); \mathbb{R}) : j = \overline{1, m}\}$ є лінійною областю завдяки мінімальності, то отримуємо

$$\mathcal{A}_{t_0}^{(a)}(\hat{\mu}) = \sum_{j=1}^{m} \hat{c}_j \mathcal{A}_{t_0}^{(a)}(\bar{\mu}_j) = \sum_{j=1}^{m} \hat{c}_j \beta_{t_0}^{(a)}(\rho_{t_0}(\bar{\mu}_j)) =$$

$$= \beta_{t_0}^{(a)}\left(\rho_{t_0}\left(\sum_{j=1}^{m} \hat{c}_j \bar{\mu}_j\right)\right) = \beta_{t_0}^{(a)}(\rho_{t_0}(\mu)),$$

означаючи, очевидно, також мінімальність міри $\hat{\mu} \in \mathcal{M}_{t_0}(H)$. Використовуючи тепер той факт, що границі мінімізуючих мір є також мінімізуючими, отримуємо, що міра $\mu \in \mathcal{M}_{t_0}(H)$ мінімізує функціонал (3.9), що й доводить теорему.

Розглянемо тепер деякі властивості так званої несучої області

$$Z_{t_0}^{(a)}(H) := \{\sigma \in H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H); \mathbb{R}) : \beta_{t_0}^{(a)}(\sigma) = \langle a^{(1)}, \sigma \rangle + c_{t_0}^{(a)}\}$$

для β-функції Мазера (3.8) при деякому фіксованому значенні елемента $a^{(1)} \in \in H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H); \mathbb{R})$ і певним чином вибраному числі $c_{t_0}^{(a)} \in \mathbb{R}$ на основі (3.10). Визначимо множину $\mathcal{P}_{t_0}^{(a)} := \bigcup\limits_{\sigma \in Z_{t_0}^{(a)}(H)} \operatorname{supp} \mu(\sigma)$, де $\mu(\sigma) \in \mathcal{M}_{t_0}(H)$ — міра, для якої $\rho_{t_0}(\mu(\sigma)) = \sigma \in Z_{t_0}^{(a)}(H)$. Подамо тепер несучу область $Z_{t_0}^{(a)} \subset H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H); \mathbb{R})$ на підставі виразу (3.10) як

$$Z_{t_0}^{(a)}(H) = \{\sigma \in H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H); \mathbb{R}) : \beta_{t_0}^{(0)}(\sigma) = c_{t_0}^{(a)}\}, \tag{4.2}$$

де β-функція $\beta_{t_0}^{(0)} : H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H); \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, оскільки є обмеженою знизу, вибирається таким чином, що $\beta_{t_0}^{(0)}(\sigma) \geqslant c_{t_0}^{(a)}$ для всіх $\sigma H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H); \mathbb{R})$. Візьмемо тепер міру $\mu \in$

$\in \mathcal{M}_{t_0}(H)$ і припустимо, що носій $\operatorname{supp}\mu \subset \Sigma_{t_0}(H)$. Оскільки $\beta^{(0)}_{t_0}(\sigma) \geqslant c^{(a)}_{t_0}$ для всіх $\sigma H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H);\mathbb{R})$ і завдяки (4.2) $Z^{(a)}_{t_0}(H) = (\beta^{(0)}_{t_0})^{-1}\{c^{(a)}_{t_0}\}$ для деякого фіксованого елемента $a^{(1)} \in H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H);\mathbb{R})$, то легко встановлюємо, що міра $\mu \in \mathcal{M}_{t_0}(H)$ мінімізує функціонал (3.9), якщо $\rho_{t_0}(\mu) \in Z^{(a)}_{t_0}(H)$. Таким чином, встановлено наступну теорему.

Теорема 4.2. *Нехай* $Z^{(a)}_{t_0}(H) \subset H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H);\mathbb{R})$ *є несучою областю* β*-функції типу Мазера* (3.10) *і міра* $\mu \in \mathcal{M}_{t_0}(H)$ *задовольняє умову* $\operatorname{supp}\mu \subset \Sigma_{t_0}(H)$. *Тоді ця міра* $\mu \in \mathcal{M}_{t_0}(H)$ *є мінімізуючою, якщо* $\rho_{t_0}(\mu) \in Z^{(a)}_{t_0}(H)$.

Із теореми 4.2 випливають наступні прості наслідки.

***Наслідок* 4.1.** *Мінімізуюча міра* $\mu \in \mathcal{M}_{t_0}(H)$ *з носієм* $\operatorname{supp}\mu \subset \Sigma_{t_0}(H)$ *задовольняє умову* $\mathcal{A}^{(0)}_{t_0}(\mu) = c^{(a)}_{t_0}$ *для деякого елемента* $a^{(1)} \in H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H);\mathbb{R})$. *За допомогою вибору елемента* $a^{(1)} \in H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H);\mathbb{R})$ *можна звести значення* $c^{(a)}_{t_0} \in \mathbb{R}$ *до нуля, тобто можна покласти* $c^{(a)}_{t_0} = 0$.

***Наслідок* 4.2.** *Для будь-якої строго екстремальної замкненої кривої* $\sigma \in \in H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H);\mathbb{R})$ *мають місце наступні властивості*:

i) *існує ергодична міра* $\bar{\mu}(\sigma) \in \mathcal{M}_{t_0}(H)$, *носій якої є мінімальною множиною і* $\rho_{t_0}(\bar{\mu}(\sigma)) = \sigma$;

ii) *для кожної замкненої* 1*-форми* $a^{(1)} \in H_1(\mathcal{L}_{t_0}(H);\mathbb{R})$ *має місце рівномірна рівність* $\langle a^{(1)}, \sigma\rangle = \lim\limits_{\tau\uparrow\infty}\dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+\tau} a^{(1)}(\dot{\gamma})ds$ *для всіх* $(\gamma_{t_0}(0), \dot{\gamma}_{t_0}; t_0) \in \mathcal{P}_{t_0} \cap \cap \operatorname{supp}\bar{\mu}(\sigma)$, $\rho_{t_0}(\bar{\mu}(\sigma)) = \sigma$ *і* $\gamma_{t_0} \in \Sigma_{t_0}(H)$;

iii) *якщо* $(\gamma_{t_0}(0), \dot{\gamma}_{t_0}; t_0) \in \mathcal{P}_{t_0} \cap \operatorname{supp}\bar{\mu}(\sigma)$, $\rho_{t_0}(\bar{\mu}(\sigma)) = \sigma$ *і* $\gamma_{t_0} \in \Sigma_{t_0}(H)$ — *відповідна орбіта в* $\mathcal{L}_{t_0}(H)$, *то* $\beta^{(a)}_{t_0}(0) = \lim\limits_{\tau\uparrow\infty}\mathcal{A}^{(\tau)}_{t_0}(\gamma)$ *рівномірно.*

Сформульовані вище твердження можна ефективно використати для вивчення багатьох неавтономно збурених, зокрема адіабатично, інтегровних гамільтонових потоків осциляторного типу та властивостей регулярності їх динаміки, що складає відому проблему Мельнікова – Самойленка. Деякі аспекти цієї проблеми досліджувались в теорії трансверсального перетину відповідних збурених стійких та нестійких многовидів до гіперболічних замкнених орбіт або особливих точок. Ці аспекти вивчення структури ергодичних мір та їх гомологічних властивостей для таких гамільтонових систем є на даний час об'єктом нашого дослідження.

Автор висловлює щиру вдячність колегам з Інституту математики НАН України за численні корисні обговорення результатів статті на наукових семінарах відділу диференціальних рівнянь, зокрема його керівникові академіку А. М. Самойленку за глибокий інтерес та підтримку тематики досліджень, професору А. М. Плічку за ряд корисних порад та зауважень щодо деяких аспектів теореми Шоке та її застосувань, а також рецензенту статті, чиї неформальні та продумані зауваження стосовно розкладу інваріантних мір на ергодичні компоненти допомогли уникнути ряду неточностей та сприяли суттєвому покращенню викладу отриманих результатів.

1. *Abraham R., Marsden J.* Foundations of mechanics. – Commings, USA, 1978. – 806 p.
2. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1989. – 408 с.
3. *Eliashberg Y., Givental A., Hofer H.* Introduction to symplectic field theory // arXive:math. SG/00-10059, 6 Oct 2000. – P. 1 – 102.
4. *Aebischer B., Borer M. et al.* Symplectic geometry: Introductory course. – Basel: Birkhauses Verlag, 1992.

5. *Salamon D., Zehnder E.* Morse theory for periodic solutions of Hamiltonian systems and the Maslov index // Communs Pure and Appl. Math. – 1992. – **45**. – P. 1303 – 1360.
6. *McDuff D.* Elliptic methods in symplectic geometry // Bull. Amer. Math. Soc. – 1990. – **23**. – P. 311 – 358.
7. *Floer A.* Morse theory for Lagrangian intersections // J. Different. Geom. – 1988. – **28**. – P. 513 – 547.
8. *Mather J. N.* Action minimizing measures for positive definite Lagrangian systems // Math. Z. – 1991. – **207**. – P. 169 – 207.
9. *Mane R.* On the minimizing measures of Lagrangian dynamical systems // Nonlinearity. – 1992. – **5**. – P. 623 – 638.
10. *Blackmore D., Prykarpatsky A. K., Prykarpatsky Y. A.* Symplectic field theory approach to studing ergodic measures related with nonautonomous Hamiltonian systems // CUBO Math. J. – 2004.
11. *Каток А. Б., Хассельблат.* Введение в современную теорию динамических систем. – М.: Факториал, 1999. – 767 с.
12. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория. – М.: Наука, 1980. – 383 с.
13. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.: Гостехиздат, 1949. – 550 с.
14. *Фелпс Р.* Лекции о теоремах Шоке. – М.: Мир, 1968. – 112 с.
15. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979. – 429 с.
16. *Kryloff N. M., Bogoliubov N. N.* La theorie generale de la mesure et son application á l’etude des systemes dynamiques de la mechanique nonlineaire // Ann. Math. – 1937. – **11**, № 38. – P. 65 – 113.
17. *Hofer H.* Lusternik – Schnirelman theory for Lagrangian intersections // Ann. Inst. H. Poincaré. – 1988. – **5**, № 5. – P. 456 – 499.
18. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 740 с.
19. *Edwards R. E.* Functional analysis. – New York: Holt, Rinehart and Winston Publ., 1965. – 1071 p.
20. *Mather J.* Variational construction of connecting orbits // Ann. Inst. Fourier. – 1993. – **43**, № 5. – P. 1349 – 1386.
21. *Фоменко А. Т., Фукс Д. Б.* Курс гомотопической топологии. – М.: Наука, 1989. – 494 с.

Одержано 02.12.2004,
після доопрацювання — 08.12.2005