УДК 512.547

Э. М. Жмудь, канд. физ.-мат. наук (Харьк. ун-т)

О МУЛЬТИПЛИКАТОРЕ ГРУППЫ С НЕТРИВИАЛЬНЫМ ЦЕНТРОМ

This paper is a continuation of paper [1]. Bazed on the results of the latter, a number of inequalities are established strengthening the known inequality of J. Green for the Schur multiplier order of a p-group.

Продовжуючи дослідження, розпочаті в [1], одержано нерівності, які підсилюють відому нерівність Дж. Гріна для порядку мультиплікатора Шура p-групи.

1. Будем пользоваться обозначениями, принятыми в [1]. В частности, $Z(X)$ обозначает центр группы X (рассматриваются только конечные группы), X' — коммутант X, $Y \le X$ означает, что Y — подгруппа группы X. Цепь $I = Z_0 \le \le Z_1 \le \ldots \le Z_l$ нормальных подгрупп группы G назовем центральной цепью (длины l), если $Z_i/Z_{i-1} \le Z(G/Z_{i-1})$, $i = 1, \ldots, l$. Центральную цепь назовем C-цепью, если все факторы Z_i/Z_{i-1} цикличны. Подгруппу $H \trianglelefteq G$ назовем C-достижимой, если через нее проходит некоторая центральная цепь группы G. Так как центральные цепи уплотняемы до C-цепей, то C-достижимая подгруппа является членом некоторой C-цепи. В статье установлено соотношение между порядками мультипликаторов групп G и G/H, где H — C-достижимая подгруппа группы G. В применении к p-группам это соотношение приводит к ряду неравенств, усиливающих неравенство Дж. Грина [2] для порядка мультипликатора p-группы.

2. Напомним некоторые результаты из [1], необходимые для дальнейшего изложения. Пусть π — 2-коцикл группы G над $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ ($\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел). Проективные представления группы G, принадлежащие системе факторов π, называются π-представлениями. Ядра π-представлений группы G называются π-ядрами. Множество $L_\pi(G)$ всех π-ядер группы G зависит только от класса Π коцикла π; полагаем $L_\Pi(G) = L_\pi(G)$. Подгруппа $H \trianglelefteq G$ называется Π-ядром, если $H \in L_\Pi(G)$. Пусть $M(G)$ — мультипликатор группы G и $H \trianglelefteq G$. Множество $M_H(G) = \{\Pi \in M(G) \mid H \in L_\Pi(G)\}$ называется H-мультипликатором группы G. Как показано в [1, 3], $M_H(G) \le \le M(G)$.

Лемма 1 [1, 3]. *Пусть* $\Pi \in M(G)$, $H \in L_\Pi(G)$. *Если* $H_1 \trianglelefteq G$, $H_1 \le H$, *то* $H_1 \in L_\Pi(G)$.

Пусть X — группа, $Y \le X$. В дальнейшем $[Y, X]$ — взаимный коммутант Y и X, $D(Y) = Y \cap X'$, $\mathrm{Lin}(X)$ — группа линейных характеров группы X, 1_X — главный характер группы X.

Лемма 2 [1]. *Пусть* $H \trianglelefteq G$. *Тогда* $M_H(G) \cong M(G/H)/N$, *где* $N \le \le M(G/H)$, $N \cong D(H)/[H, G]$.

***Следствие* 1.** *Пусть* $H \trianglelefteq G$. *Тогда*

$$|M(G)| = u_H(G)\, v_H(G), \tag{1}$$

где

$$u_H(G) = |M(G/H)|/|D(H)|, \quad v_H(G) = |M(G) : M_H(G)|\,|[H, G]|. \tag{2}$$

Элементу $x \in G$ и 2-коциклу π поставим в соответствие функцию $\chi_x^\pi : C_G(x) \to \mathbb{C}^*$:

$$\chi_x^\pi(y) = \frac{\pi(x,y)}{\pi(y,x)}, \quad y \in C_G(x). \tag{3}$$

Можно показать (см. [1, 3]), что $\chi_x^\pi \in \mathrm{Lin}\,(C_G(x))$. Элемент $x \in G$ называется π-*элементом*, если $\chi_x^\pi = 1_{C_G(x)}$. Множество G_π всех π-элементов группы G непусто и нормально в G. Если π и π' принадлежат одному и тому же классу Π 2-коциклов, то $\chi_x^\pi = \chi_x^{\pi'}$, $x \in G$, и $G_\pi = G_{\pi'}$. Положим $\chi_x^\Pi = \chi_x^\pi$, $G_\Pi = G_\pi$, где $\pi \in \Pi$.

Из леммы 16.? статьи [3, с. 355] вытекает следующая лемма.

Лемма 3. *Если* $\Pi \in M(G)$, *то*: а) $\varphi_\Pi : z \mapsto \chi_z^\Pi$, $z \in Z(G)$, — *гомоморфизм* $Z(G)$ *в* $\mathrm{Lin}(G)$; б) $\ker \varphi_\Pi = K_\Pi$, *где* $K_\Pi = G_\Pi \cap Z(G)$; в) K_Π — *наибольшее* Π-*ядро группы* G, *содержащееся в* $Z(G)$.

3. Перейдем к доказательству основных результатов статьи.

Лемма 4. *Если* $Z \le Z(G)$ *циклична*, $Z = \langle z \rangle$, *то*: а) *отобра́жение* ψ_z: $\Pi \mapsto \chi_z^\Pi$, $\Pi \in M(G)$, — *гомоморфизм группы* $M(G)$ *в* $\mathrm{Lin}(G)$; б) $\ker \psi_z = M_Z(G)$ — Z-*мультипликатор группы* G.

Доказательство. Утверждение а) следует из (3) и определения функции χ_x^Π. Докажем утверждение б). Если $\Pi \in \ker \psi_z$, то $\chi_z^\Pi = I_G$, т. е. $z \in G_\Pi \cap Z(G) = K_\Pi$. Поэтому $Z = \langle z \rangle \le K_\Pi$. Так как $K_\Pi \in L_\Pi(G)$, то по лемме 1 $Z \in L_\Pi(G)$, т. е. $\Pi \in M_Z(G)$. Таким образом, $\ker \psi_z \le M_Z(G)$. Обратно, если $\Pi \in M_Z(G)$, то $Z \in L_\Pi(G)$, откуда по лемме 3 $Z \le K_\Pi$ и, следовательно, $Z \subseteq G_\Pi$. Поэтому $z \in G_\Pi$, откуда $\chi_z^\Pi = I_G$, т. е. $\Pi \in \ker \psi_z$. Таким образом, $M_Z(G) \le \ker \psi_z$. Итак, $\ker \psi_z = M_Z(G)$.

Следствие 2. *Если* $Z \le Z(G)$ *циклична*, $Z = \langle z \rangle$, *то* $v_Z(G) = |\operatorname{im} \psi_z|$.

Доказательство. По лемме 4, б) $M(G)/M_Z(G) \cong \operatorname{im} \psi_z$, откуда в силу (2) и $[Z, G] = I$ вытекает утверждение.

Лемма 5. *Если* $Z \le Z(G)$ *циклична, то* $v_Z(G) \mid |G : G'|$.

Доказательство. Утверждение вытекает из леммы 4 и следствия 2.

Лемма 6. *Пусть* $N_1, N_2 \trianglelefteq G$, $N_1 \le N_2$. *Тогда*

$$\frac{v_{N_2}(G)}{v_{N_1}(G)} = v_{N_2/N_1}(G/N_1). \tag{4}$$

Доказательство. Положим $\tilde{G} = G/N_1$, $\tilde{N}_2 = N_2/N_1$. В силу (1) $|M(G)| = u_{N_1}(G)\, v_{N_1}(G) = (|M(\tilde{G})|/|D(N_1)|)\, v_{N_1}(G)$. Далее

$$|M(\tilde{G})| = u_{\tilde{N}_2}(\tilde{G})\, v_{\tilde{N}_2}(\tilde{G}) = \frac{|M(\tilde{G}/\tilde{N}_2)|}{|D(\tilde{N}_2)|} v_{\tilde{N}_2}(\tilde{G}) = \frac{|M(G/N_2)|}{|D(N_2)|} v_{\tilde{N}_2}(\tilde{G}).$$

Так как $|D(N_2)| = |\tilde{N}_2 \cap \tilde{G}'| = |N_1|^{-1} |N_2 \cap N_1 G'|$, то

$$|M(G)| = \frac{|M(G/N_2)|}{|N_1|^{-1} |N_2 \cap N_1 G'| |D(N_1)|} v_{\tilde{N}_2}(\tilde{G})\, v_{N_1}(G).$$

Используя модулярное тождество, получаем

$$|M(G)| = \frac{|M(G/N_2)|}{|D(N_2)|} v_{\tilde{N}_2}(G) v_{N_1}(G) = u_{N_2}(G) v_{\tilde{N}_2}(\tilde{G}) v_{N_1}(G).$$

Ввиду $|M(G)| = u_{N_2}(G) v_{N_2}(G)$ получаем $v_{N_2}(G) = v_{\tilde{N}_2}(\tilde{G}) v_{N_1}(G)$, откуда и вытекает (4).

Лемма 7. *Пусть* $H \trianglelefteq G$ *C-достижима,* l *— длина C-цепи группы* G*, обрывающейся на* H*. Тогда* $v_H(G) \,\big|\, |G:G'|^l$.

Доказательство. Пусть $I = Z_0 \le Z_1 \le \ldots \le Z_l = H$ — C-цепь группы G. Так как $v_{Z_0}(G) = 1$, то по лемме 6

$$\prod_{i=1}^{l} \frac{v_{Z_i}(G)}{v_{Z_{i-1}}(G)} = \prod_{i=1}^{l} v_{Z_i/Z_{i-1}}(G/Z_{i-1}). \tag{5}$$

Для заданного i, $1 \le i \le l$, положим $\tilde{G} = G/Z_{i-1}$, $\tilde{Z}_i = Z_i/Z_{i-1}$. Так как $\tilde{Z}_i \le Z(\tilde{G})$ циклична, то по лемме 5 $_{\tilde{Z}_i}(\tilde{G}) \,\big|\, |\tilde{G}:\tilde{G}'|$, откуда следует, что $v_{\tilde{Z}_i}(\tilde{G}) \,\big|\, |G:G'|$. Отсюда в силу (5) вытекает утверждение леммы.

Следствие 3. *Если* $H \trianglelefteq G$ *C-достижима, то* $v_H(G) \,\big|\, |G:G'|^{\sigma(H)}$, *где* $\sigma(H)$ *— число сомножителей в разложении* $|H|$ *на простые множители.*

Доказательство. Отрезок главного ряда группы G, получающийся путем уплотнения C-цепи, обрывающейся на H, является C-цепью. Так как факторы последней имеют простые порядки, то ее длина равна $\sigma(H)$. Это позволяет применить лемму 7 при $l = \sigma(H)$.

Теорема 1. *Пусть* $H \trianglelefteq G$ *C-достижима,* l *— длина какой-нибудь C-цепи, обрывающейся на* H*. Тогда*

$$|M(G)| = \frac{|M(G/H)|}{|D(H)|} k, \tag{6}$$

где k *— целое число, делящее* $|G:G'|^l$ *и делящееся на* $|[H,G]|$*. В частности,* $k \,\big|\, |G:G'|^{\sigma(H)}$.

Доказательство. Равенство (6) получается из (1) и (2), если положить $k = v_H(G)$. Свойства числа k вытекают из леммы 7 и следствия 3.

Следствие 4. *Пусть* G *— p-группа,* $|G| = p^n$, $|G'| = p^{n_1}$. *Если* $H \trianglelefteq G$, *то*

$$|M(G)| \le \frac{|M(G/H)|}{|D(H)|} |H|^{n-n_1}. \tag{7}$$

Доказательство. Так как главные ряды нильпотентной группы являются C-цепями, то H C-достижима. Если $|H| = p^l$, то $\sigma(H) = l$. Поэтому $|G:G'|^{\sigma(H)} = p^{(n-n_1)l} = |H|^{n-n_1}$. Применяя к G теорему 1, получаем (7).

Лемма 8. *Пусть* A *— абелева p-группа,* $|A| = p^m$. *Тогда* $|M(A)| \le p^{m(m-1)/2}$.

Доказательство. Пусть $\{p^{\varepsilon_i}\}_1^d$ — инварианты группы A, $\varepsilon_1 \le \ldots \le \varepsilon_d$. Утверждение легко вытекает из формулы $|M(A)| = \prod_{i<j} (p^{\varepsilon_i}, p^{\varepsilon_j})$ [4, 5].

Теорема 2. *Пусть* $|G| = p^n$, $G = G^{(0)} > G' > \ldots > G^{(l)} = I$ *— производный ряд группы* G, $|G^{(i)}| = p^{n_i}$, $i = 1, \ldots, l$. *Тогда*

$$\prod_{i=1}^{l} |M(G^{(i)})| \le p^{n(n-1)/2 - \sum_{i=1}^{l-1} n_i} \le p^{n(n-1)/2 - (l-1)^2}. \tag{8}$$

Доказательство. Применяя следствие 4 при $H = G'$ и полагая $n - n_1 = m$, получаем $|M(G)| \le |M(G/G')| p^{n_1(m-1)}$. Так как G/G' абелева порядка p^m, то по лемме 8 $|M(G/G')| \le p^{m(m-1)/2}$. Поэтому $|M(G)| \le p^{m(m-1)/2 + n_1(m-1)} = p^{n(n-1)/2 - n_1(n_1-1)/2 - n_1}$. Заменяя здесь G на $G^{(i-1)}$, получаем $|M(G^{(i-1)})| \le p^{n_{i-1}(n_{i-1}-1)/2 - n_i(n_i-1)/2 - n_i}$, $i = 1, \ldots, l$. Поэтому

$$\prod_{i=1}^{l} |M(G^{(i-1)})| \le p^{n(n-1)/2 - \sum_{i=1}^{l-1} n_i}.$$

Замечая, что $n_{l-1} \ge 1$ и $n_{i-1} - n_i \ge 2$, получаем $\sum n_i \ge 1 + 3 + \ldots + 2(l-1) - 1 = (l-1)^2$. Тем самым (8) доказано.

Теорема 2 усиливает теорему Дж. Грина: если $|G| = p^n$, то $|M(G)| \le p^{n(n-1)/2}$. Небольшая модификация изложенного выше метода позволяет получить еще более сильное, чем (8), неравенство Гашюца – Нойбюзера – Йена [6].

Обозначим через $\mathrm{Sc}(X)$ цоколь группы X.

Лемма 9. *Если X — p-группа, то* $\mathrm{Sc}(X/X') \cong X/\Phi(X)$, *где* $\Phi(X)$ — *подгруппа Фраттини группы* X.

Доказательство. Используются элементарные свойства p-групп.

Лемма 10. *Пусть* G — *p-группа,* $Z \lhd G$, $|Z| = p$, $Z = \langle z \rangle$. *Тогда*: а) $\mathrm{im}\,\psi_z \le \mathrm{Sc}(\mathrm{Lin}(G))$; б) $v_Z(G) \le |G/\Phi(G)|$.

Доказательство. Пусть $\Pi \in M(G)$. Из леммы 3 вытекает, что $(\chi_{z^p}^{\Pi})^p = \chi_1^{\Pi} = I_G$. Поэтому $\psi_z(\Pi) = \chi_z^{\Pi} \in \mathrm{Sc}(\mathrm{Lin}(G))$. Следовательно, $\mathrm{im}\,\psi_z \le \mathrm{Sc}(\mathrm{Lin}(G))$, что доказывает а). Утверждение б) вытекает из а), следствия 2 и леммы 9, если учесть, что $\mathrm{Lin}(G) \cong G/G'$.

Пусть X — группа, $Y \le X$, $\mathrm{Lin}_Y(X) = \{\lambda \in \mathrm{Lin}(X) \mid \ker\lambda \ge Y\}$. Если $Y \trianglelefteq X$, то $\mathrm{Lin}_Y(X) \cong \mathrm{Lin}(X/Y) \cong X/X'Y$.

Следующее утверждение дополняет лемму 4.

Лемма 11. *Пусть* $Z \le D(Z(G))$ *циклическая,* $Z = \langle z \rangle$. *Тогда* $\mathrm{im}\,\psi_z \le \mathrm{Lin}_{Z(G)}(G)$.

Доказательство. Пусть $\Pi \in M(G)$ и $s \in Z(G)$. Тогда $\chi_s^{\Pi} \in \mathrm{Lin}(G)$ и, следовательно, $\ker\chi_s^{\Pi} \ge G' \ge Z$. Поэтому $\chi_s^{\Pi}(z) = 1$. Ввиду (3) $\chi_s^{\Pi}(z) = \chi_z^{\Pi}(s)^{-1}$. Поэтому $\chi_z^{\Pi}(s) = 1$, т. е. $s \in \ker\chi_z^{\Pi}$. Таким образом, $Z(G) \le \ker\chi_z^{\Pi}$ или, что то же самое, $\chi_z^{\Pi} \in \mathrm{Lin}_{Z(G)}(G)$. Так как $\chi_z^{\Pi} = \psi_z(\Pi)$, то $\mathrm{im}\,\psi_z \le \mathrm{Lin}_{Z(G)}(G)$.

Лемма 12. *Пусть* G — *p-группа,* $Z \lhd G$, $Z \trianglelefteq G'$, $|Z| = p$. *Тогда* $v_Z(G) \mid |\mathrm{Sc}(\mathrm{Lin}_{Z(G)}(G))|$.

Доказательство. Так как $|Z| = p$ и $Z \lhd G$, то $Z \trianglelefteq Z(G)$. Пусть $Z = \langle z \rangle$. Тогда в силу следствия 2 $v_Z(G) = |\mathrm{im}\,\psi_z|$. С другой стороны, в силу лемм 10, 11 $\mathrm{im}\,\psi_z \le \mathrm{Sc}(\mathrm{Lin}_{Z(G)}(G))$, откуда вытекает $v_Z(G) \mid |\mathrm{Sc}(\mathrm{Lin}_{Z(G)}(G))|$.

Лемма 13. *Пусть* $K,\ N \trianglelefteq G,\ \ N \le G',\ \ \tilde{G} = G/N,\ \ \tilde{K} = KN/N$. *Тогда* $\mathrm{Lin}_{\tilde{K}}(\tilde{G}) \cong G/G'K$.

Доказательство. $\mathrm{Lin}_{\tilde{K}}(\tilde{G}) = \mathrm{Lin}_{\tilde{G}'\tilde{K}}(\tilde{G}) = \mathrm{Lin}_{\widetilde{G'K}}(\tilde{G}) \cong \tilde{G} / \widetilde{G'K} \cong G/G'K$.

Теорема 3. *Пусть* G — p*-группа,* $|G/Z(G) : \Phi(G/Z(G))| = p^d$. *Если* $H \trianglelefteq G,\ H \le G'$, то

$$|M(G)| \le |M(G/H)|\,|H|^{d-1}. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть $I = Z_0 < Z_1 < \ldots < Z_l = H$ — отрезок проходящего через H главного ряда группы G. В силу (5) имеем $v_H(G) = \prod_{i=1}^{l} v_{Z_i/Z_{i-1}}(G/Z_{i-1})$. Полагая для заданного $i,\ 1 \le i \le l,\ \tilde{G} = G/Z_{i-1}$, $\tilde{Z}_i = Z_i/Z_{i-1}$ и учитывая, что $\tilde{Z}_i \le D(Z(\tilde{G}))$, $Z(\widetilde{G}) \le Z(\tilde{G})$, в силу леммы 12 имеем $v_{\tilde{Z}_i}(\tilde{G}) \le |\mathrm{Sc}(\mathrm{Lin}_{Z(\tilde{G})}(\tilde{G}))| \le |\mathrm{Sc}(\mathrm{Lin}_{\widetilde{Z(G)}}(\tilde{G}))|$. В силу лемы 13 отсюда вытекает $v_{\tilde{Z}_i}(\tilde{G}) \le |\mathrm{Sc}(G/G'Z(G))|$. Так как $G/G'Z(G)) \cong G/Z(G)/(G/Z(G))'$, то по лемме 9 $|\mathrm{Sc}(G/G'Z(G))| = |G/Z(G) : \Phi(G/Z(G))| = p^d$. Таким образом, $v_{Z_i/Z_{i-1}}(G/Z_{i-1}) \le p^d$, $i = 1, \ldots, l$. Перемножая по всем $i = 1, \ldots, l$ и замечая, что $|H| = p^l$, получаем $v_H(G) \le (p^d)^l = |H|^d$. Наконец, так как $D(H) = H \cap G' = H$, то

$$|M(G)| = u_H(G)\,v_H(G) = \frac{|M(G/H)|}{|H|}\,v_H(G) \le |M(G/H)|\,|H|^{d-1}.$$

Теорема доказана.

При $H = G'$ из теоремы 3 вытекает следующая теорема.

Теорема 4 (Гашюц – Нойбюзер – Йен). *Пусть* G — p*-группа,* $|G/Z(G) : \Phi(G/Z(G))| = p^d$, $|G'| = p^{n_1}$. *Тогда*

$$|M(G)| \le |M(G/G')|\,p^{n_1(d-1)}.$$

1. *Жмудь Э. М.* О ядрах проективных представлений конечных групп // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1991. – Вып. 55. – С. 34 – 49.
2. *Green J. A.* On the number of automorphisms of a finite group // Proc. Roy. Soc. A. – 1956. – **237**. – P. 574 – 581.
3. *Жмудь Э. М.* Об изоморфных неприводимых проективных представлениях конечных групп // Зап. мат. отд-ния физ.-мат. ф-та ХГУ и Харьк. мат. о-ва. Сер. 4, 26. – 1960. – С. 333 – 372.
4. *Frucht R.* Darstellungen Abelschen Gruppen durch Kollineationen // J. Math. – 1931. – **166**. – P. 16 – 29.
5. *Huppert B.* Endliche Gruppen.–Berlin etc., 1979.
6. *Gaschütz W., Neubüser J., Ti Yen.* Über den Multiplicator von p-Gruppen // Math. Z. – 1967. – **100**. – P. 93 – 96.

Получено 15.12.93