УДК 513. 88

О. Г. Сторож, канд. фіз.-мат. наук (Львів. ун-т)

ПРО УМОВИ РОЗВ'ЯЗНОСТІ І РЕЗОЛЬВЕНТУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ГРАНИЧНОГО ОПЕРАТОРА ДРУГОГО ПОРЯДКУ В ПРОСТОРІ ВЕКТОР-ФУНКЦІЙ

A differential boundary operator generated by the Sturm – Liouville differential expression with a bounded operator potential and nonlocal boundary conditions is considered. The conditions for a considered operator to be a Fredholm operator and its solvability are considered. Its resolvent is constructed.

Розглядається диференціально-граничний оператор, породжений диференціальним виразом Штурма – Ліувілля з обмеженим операторним потенціалом і нелокальними крайовими умовами. Встановлено умови фредгольмовості і розв'язності розглядуваного оператора, побудовано його резольвенту.

1. Вступ. Будемо використовувати такі позначення. Для будь-яких гільбертових просторів H_1, H_2 $\mathcal{B}(H_1, H_2)$ $(\mathcal{B}_\infty(H_1, H_2))$ — множина лінійних неперервних (компактних) операторів $H_1 \to H_2$, визначених на всьому H_1, $\mathcal{B}(H_1) = \mathcal{B}(H_1, H_1)$, $\mathcal{B}_\infty(H_1) = \mathcal{B}_\infty(H_1, H_1)$; $D(T), R(T)$, $\ker T$ і $\rho(T)$ — відповідно область визначення, область значень, ядро та резольвентна множина оператора T; 1_X — одиничний оператор у просторі X, $\operatorname{ind} T = \dim \ker T - \dim \ker T^*$ (індекс оператора T). Як і в [1], будемо називати оператор T фредгольмовим, якщо він нормально розв'язний, а $\dim \ker T$ і $\dim \ker T^*$ скінченні.

Нехай H_0 — сепарабельний гільбертів простір, $H = L_2(a, b; H_0)$ де $-\infty < a < b < +\infty$, $\forall\, x \in [a, b]$ $p(x) \in \mathcal{B}(H_0)$ причому оператор-функція $x \mapsto p(x)$ сильно неперервна, а L та L_0 — відповідно максимальний і мінімальний оператори, породжені в H диференціальним виразом

$$l[y] = -y'' + p(x)y, \quad x \in [a, b], \tag{1}$$

тобто $D(L) = H^2(a, b; H_0) = \{y \in H: y, y' \in H\}$, $Ly = l[y]$, $D(L_0) = H_0^2(a, b; H_0) = \{y \in D(L): y^{(i)}(a) = y^{(i)}(b) = 0, i = 0, 1\}$, $L_0 \subset L$.

Далі, нехай $A_{ij} \in \mathcal{B}(H_0), i, j = 1, \ldots, 4$, такі, що оператор

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{14} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{41} & \ldots & A_{44} \end{pmatrix} \tag{2}$$

оборотний в $\mathcal{B}(H_0^4)$, а $\varphi_i(x) \in \mathcal{B}_\infty(H_0)$ такі, що $\int_a^b \|\varphi_i(x)\|^2 dx < +\infty$, $i = 1, \ldots, 4$. Покладемо

$$u_i(y) = A_{i1}y(a) + A_{i2}y'(a) + A_{i3}y(b) + A_{i4}y'(b), \quad y \in D(L), \tag{3}$$

$$\Phi_i y = \int_a^b \varphi_i^*(x)y(x)\,dx, \quad i = 1, \ldots, 4, \tag{4}$$

і визначимо оператор T співвідношеннями

$$D(T) = \{y \in D(L): u_i(y) = \Phi_i y,\ i = 1, 2\}, \tag{5}$$

$$Ty = Ly + \Phi_3^* u_3(y) + \Phi_4^* u_4(y), \quad y \in D(T). \tag{6}$$

Ми трактуємо T як збурення диференціального оператора L_1:

© О. Г. СТОРОЖ, 1995

$$D(L_1) = \{ y \in D(L) : u_i(y) = 0,\ i = 1, 2 \}, \quad L_1 \subset L. \tag{7}$$

Зауважимо, що диференціальні оператори в просторі вектор-функцій були об'єктом досліджень багатьох авторів (див., наприклад, [2–5]). Що стосується диференціально-граничних операторів з інтегральними крайовими умовами, тобто операторів виду (5), (6), то вони у випадку $\dim H_0 < \infty$ вивчались в [6–10] та ряді інших робіт, у загальному випадку — в [11], де, зокрема, доведено, що при зроблених припущеннях T — замкнений, щільно визначений в H оператор. У даній роботі, виходячи з певних спектральних характеристик незбуреного оператора L_1, встановлено відповідні (а саме, вказані в анотації) характеристики збуреного оператора T.

2. Резольвента незбуреного оператора. Розглянемо рівняння

$$-Y'' + p(x)Y = \lambda Y, \tag{8}$$

під розв'язком якого розуміємо (двічі неперервно диференційовну) $\mathcal{B}(H_0)$-значну функцію, яка задовольняє це рівняння. Нехай $\{Y_1(x, \lambda), Y_2(x, \lambda)\}$ — його фундаментальна система розв'язків (ф. с. р.), тобто така система, що загальний розв'язок рівняння (8) має вигляд $Y(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{2} Y_i(x, \lambda) C_i$, де $C_i \in \mathcal{B}(H_0)$, причому рівність $Y(x, \lambda) = 0$ можлива тільки при $C_1 = C_2 = 0$. Таким чином [2–5], $y = \sum_{i=1}^{2} Y_i(x, \lambda) c_i$, де $c_i \in H_0$ — загальний розв'язок рівняння $l[y] = \lambda y$. З результатів, викладених у [12], випливає, що операторна матриця

$$W(x, \lambda) = \begin{pmatrix} Y_1(x,\lambda) & Y_2(x,\lambda) \\ Y_1'(x,\lambda) & Y_2'(x,\lambda) \end{pmatrix} \tag{9}$$

оборотна в $\mathcal{B}(H_0 \oplus H_0)$ при $x \in [a, b]$. Покладемо

$$W^{-1}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \tilde{Y}_{11}(x,\lambda) & \tilde{Y}_1(x,\lambda) \\ \tilde{Y}_{21}(x,\lambda) & \tilde{Y}_2(x,\lambda) \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$g(x, \xi, \lambda) = \pm \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} Y_i(x, \lambda) \tilde{Y}_i(\xi, \lambda), \tag{11}$$

причому знак "+" береться при $x > \xi$, а "–" — при $x < \xi$,

$$\Delta_0(\lambda) = \begin{pmatrix} u_1(Y_1(x,\lambda)) & u_1(Y_2(x,\lambda)) \\ u_2(Y_1(x,\lambda)) & u_2(Y_2(x,\lambda)) \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$\Delta_0^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} w_{11}(\lambda) & w_{12}(\lambda) \\ w_{21}(\lambda) & w_{22}(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Повторюючи міркування, наведені в [2] для випадку $\dim H_0 < \infty$, переконуємось, що

$$y(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{2} Y_i(x, \lambda) c_i + \int_a^b g(x, \xi, \lambda) f(\xi)\, d\xi, \quad c_i \in H_0,\ f \in H, \tag{14}$$

— загальний розв'язок рівняння $l[y] - \lambda y = f$ і якщо $\Delta_0^{-1}(\lambda) \in \mathcal{B}(H_0^2)$, то $\lambda \in \rho(L_1)$ і

$$(L_1 - \lambda 1_H)^{-1} f(x) = \int_a^b G_0(x, \xi, \lambda) f(\xi)\, d\xi, \quad f \in H, \tag{15}$$

де

$$G_0(x,\xi,\lambda) = g(x,\xi,\lambda) - \sum_{j,k=1}^{2} Y_j(x,\lambda)w_{jk}(\lambda)u_k(g(\cdot,\xi,\lambda)). \tag{16}$$

***Зауваження* 1.** З результатів, викладених у [12, с. 146], випливає, що

а) $\{\tilde{Y}_1(x,\lambda), \tilde{Y}_2(x,\lambda)\}$ — ф. с. р. рівняння $-Z'' + Zp(x) = \lambda Z$;

б) $\tilde{Y}_{j1}(x,\lambda) = -\tilde{Y}_j'(x,\lambda)$, $j = 1, 2$.

Виходячи звідси, легко переконатись, що:

в) $\{\tilde{Y}_1^*(x,\overline{\lambda}), \tilde{Y}_2^*(x,\overline{\lambda})\}$ — ф. с. р. рівняння $-Y'' + p(x)^*Y = \lambda Y$, зокрема, у випадку $p(x) = p(x)^*$ ця система є ф. с. р. рівняння (8), тому існує оборотна в $\mathcal{B}(H_0^2)$ операторна матриця

$$C(\lambda) = \begin{pmatrix} C_{11}(\lambda) & C_{12}(\lambda) \\ C_{21}(\lambda) & C_{22}(\lambda) \end{pmatrix}$$

така, що

$$\tilde{Y}_j^*(x,\overline{\lambda}) = \sum_{k=1}^{2} Y_k(x,\lambda)C_{jk}(\lambda), \quad j = 1, 2;$$

г) вірна рівність

$$C(\lambda) = \left[W(x,\overline{\lambda})^* \begin{pmatrix} 0 & -1_{H_0} \\ 1_{H_0} & 0 \end{pmatrix} W(x,\lambda) \right]^{-1}, \tag{17}$$

з якої випливає, що права частина (17) не залежить від x, якщо $p(x) = p(x)^*$, в чому легко переконатись безпосередньо.

Зокрема, якщо $c \in [a, b]$, $Y_1(c,\lambda) = Y_2'(c,\lambda) = 1_{H_0}$, $Y_2(c,\lambda) = Y_1'(c,\lambda) = 0$, то $\tilde{Y}_1(x,\lambda) = Y_2^*(x,\overline{\lambda})$, $\tilde{Y}_2(x,\lambda) = -Y_1^*(x,\overline{\lambda})$. Якщо ж $Y_1(0,\lambda) = Y_2(1,\lambda) = 1_{H_0}$, $Y_1(1,\lambda) = Y_2(0,\lambda) = 0$, то $\tilde{Y}_1(x,\lambda) = Y_2'(0,\lambda)^{-1}Y_2^*(x,\overline{\lambda}) = -Y_1^*(1,\overline{\lambda})^{-1}Y_2^*(x,\overline{\lambda})$, $\tilde{Y}_2(x,\lambda) = Y_1'(1,\lambda)^{-1}Y_1^*(x,\overline{\lambda}) = Y_2'^*(0,\overline{\lambda})^{-1}Y_1^*(x,\overline{\lambda})$.

Покладемо $u_{ia}(Y) = A_{i1}Y(a) + A_{i2}Y'(a)$, $u_{ib}(Y) = A_{i3}Y(b) + A_{i4}Y'(b)$, $i = 1, 2$,

$$\Delta_a(\lambda) = \begin{pmatrix} u_{1a}(Y_1) & u_{1a}(Y_2) \\ u_{2a}(Y_1) & u_{2a}(Y_2) \end{pmatrix}, \quad \Delta_b(\lambda) = \begin{pmatrix} u_{1b}(Y_1) & u_{1b}(Y_2) \\ u_{2b}(Y_1) & u_{2b}(Y_2) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}(\lambda) & \alpha_{12}(\lambda) \\ \alpha_{21}(\lambda) & \alpha_{22}(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{cases} -\Delta_0^{-1}(\lambda)\Delta_a(\lambda), & x > \xi; \\ \Delta_0^{-1}(\lambda)\Delta_b(\lambda), & x < \xi. \end{cases}$$

Твердження 1. *Нехай* $\Delta_0^{-1}(\lambda) \in \mathcal{B}(H_0^2)$. *Тоді* $\lambda \in \rho(L_1)$, *резольвента* $(L_1 - \lambda 1_H)^{-1}$ *визначається співвідношенням* (15), *де*

$$G_0(x,\xi,\lambda) = \sum_{j,k=1}^{2} Y_j(x,\lambda)\alpha_{jk}(\lambda)\tilde{Y}_k(\xi,\lambda). \tag{18}$$

Це випливає з того, що G_0 задовольняє усі умови, які повинна задовольняти функція Гріна оператора $L_1 - \lambda 1_H$.

3. Розв'язний простір граничних значень. У цьому пункті, на відміну від інших, H — довільний гільбертів простір.

Нехай L, L_0 — замкнені щільно визначені оператори $H \to H$, причому

$L_0 \subset L$. Покладемо $M = L_0^*$, $M_0 = L^*$ і припустимо, що L_0 та M_0 мають обмежені обернені. Далі, нехай $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ —гільбертові простори, $\Gamma_1 \in \mathcal{B}(D(L), \mathcal{H}_1)$, $\Gamma_2 \in \mathcal{B}(D(L), \mathcal{H}_2)$, $\tilde{\Gamma}_1 \in \mathcal{B}(D(M), \mathcal{H}_2)$, $\tilde{\Gamma}_2 \in \mathcal{B}(D(M), \mathcal{H}_1)$, де $D(L)$ і $D(M)$ трактуються як гільбертові простори з скалярними добутками графіків операторів L та M відповідно. Покладемо $\Gamma y = (\Gamma_1 y, \Gamma_2 y)$, $\tilde{\Gamma} z = (\tilde{\Gamma}_1 z, \tilde{\Gamma}_2 z)$, $y \in D(L)$, $z \in D(M)$.

Означення 1. $(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \Gamma_1, \Gamma_2, \tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2)$ *називається розв'язним простором граничних значень (п. г. з.) для пари* (L, L_0), *якщо*

а) $\ker \Gamma = D(L_0)$, $\ker \tilde{\Gamma} = D(M_0)$;

б) $R(\Gamma) = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, $R(\tilde{\Gamma}) = \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_1$;

в) $\forall\, y \in D(L)$, $\forall\, z \in D(M)$

$$(Ly|z) - (y|Mz) = (\Gamma_1 y|\tilde{\Gamma}_2 z)_{\mathcal{H}_1} - (\Gamma_2 y|\tilde{\Gamma}_1 z)_{\mathcal{H}_2};$$

г) $\ker \Gamma_1 = D(L_0) \dotplus \ker L$, $\ker \tilde{\Gamma}_1 = D(M_0) \dotplus \ker M$;

д) *звуження оператора* L *на* $\ker \Gamma_2$ *має обернений з* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Зауважимо, що наведене означення еквівалентне означенню п. г. з. в сенсі [13] (див. також [14–16]). Існування такого п. г. з. випливає з результатів роботи [17].

Означення 2. *Нехай* $\mathcal{H}$ — *гільбертів простір,* $A_{11}, A_{12} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. *Оператор* $A_1 : \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, *визначений співвідношенням*

$$A_1(h_1, h_2) = A_{11} h_1 + A_{12} h_2, \quad h_1, h_2 \in \mathcal{H}, \tag{19}$$

назвемо правильним, якщо існують $A_{21}, A_{22} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *такі, що оператор*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

оборотний в $\mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$.

Теорема 1. *Нехай* $(\mathcal{H}, \mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2, \tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2)$ — *розв'язний п. г. з. для пари* (L, L_0), $A_{11}, A_{12} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *такі, що оператор* (19) *правильний,*

$$D(L_1) = \{ y \in D(L) :\, A_{11}\Gamma_1 y + A_{12}\Gamma_2 y = 0 \}, \quad L_1 \subset L. \tag{20}$$

Тоді:

а) $\dim \ker L_1 = \dim \ker A_{12}$;

б) $\dim \ker L_1^* = \dim \ker A_{12}^*$;

в) L_1 *нормально розв'язний тоді і тільки тоді, коли* A_{12} *нормально розв'язний.*

Зокрема:

г) $\ker L_1 = \{0\}$ *тоді і тільки тоді, коли* $\ker A_{12} = \{0\}$;

д) $R(L_1) = H$ *тоді і тільки тоді, коли* $R(A_{12}) = \mathcal{H}$;

е) $L_1^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *тоді і тільки тоді, коли* $A_{12}^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Зауваження 2. Умови розв'язності операторів типу, описаного в теоремі 1, справедливість якої випливає з результатів роботи [18], розглядались багатьма авторами (див., наприклад, [13–17]), але в цих роботах крайові умови задані в деякому "канонічному", а не загальному вигляді.

4. Умови розв'язності незбуреного оператора. Використаємо результати попереднього пункту для дослідження оператора $L_1 - \lambda 1_H$, де L_1 визначено згідно з (7). Для цього позначимо через M та M_0 відповідно максимальний і мінімальний оператори, породжені в H диференціальним виразом $l^*[z] = -z'' + p(x)^* z$. Таким чином, $M = L_0^*$, $M_0 = L^*$. Покладемо $\Gamma_0 y = (y'(a), y(a))$, $\Gamma_2 y = (y'(b), y(b))$, $y \in D(L)$; $\tilde{\Gamma}_0 z = (z(b), -z'(b))$, $\tilde{\Gamma}_2 z = (z(a), -z'(a))$, $z \in D(M)$ і позначимо через $\omega_1(x, \lambda), \omega_2(x, \lambda)$ розв'язки операторного рівняння $-Y'' + p(x)Y = \lambda Y$ такі, що $\omega_1(b, \lambda) = 0$, $\omega_1'(b, \lambda) = 1_{H_0}$, $\omega_2(b, \lambda) = 1_{H_0}$, $\omega_2'(b, \lambda) = 0$, а через $\tilde{\omega}_1(x, \lambda)$, $\tilde{\omega}_2(x, \lambda)$ — розв'язки рівняння $-Z'' + p(x)^* Z = \lambda Z$ такі, що $\tilde{\omega}_1(a, \lambda) = 1_{H_0}$, $\tilde{\omega}_1'(a, \lambda) = 0$, $\tilde{\omega}_2(a, \lambda) = 0$, $\tilde{\omega}_2'(a, \lambda) = -1_{H_0}$.

Далі, нехай $\mathcal{H} = H_0 \oplus H_0$, $Z_\lambda a = \omega_1(x, \lambda) a_1 + \omega_2(x, \lambda) a_2$, $\tilde{Z}_\lambda a = \tilde{\omega}_1(x, \lambda) a_1 + + \tilde{\omega}_2(x, \lambda) a_2$ $(a = (a_1, a_2) \in \mathcal{H})$, $\Gamma_1 y = \Gamma_0 y - (\Gamma_0 Z_\lambda) \Gamma_2 y$, $\tilde{\Gamma}_1 z = \tilde{\Gamma}_0 z - (\tilde{\Gamma}_0 \tilde{Z}_{\bar{\lambda}}) \tilde{\Gamma}_2 z$ $(y \in D(L), z \in D(M))$. Таким чином,

$$R(Z_\lambda) = \ker (L - \lambda 1_H), \quad R\left(\tilde{Z}_\lambda\right) = \ker (M - \lambda 1_H), \tag{21}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \Gamma_2 Z_\lambda = \tilde{\Gamma}_2 \tilde{Z}_\lambda = 1_{\mathcal{H}} \tag{22}$$

Звідси і з тотожності Лагранжа випливає

$$(\Gamma_0 Z_\lambda)^* = \tilde{\Gamma}_0 Z_{\bar{\lambda}}. \tag{23}$$

Твердження 2. $(\mathcal{H}, \mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2, \tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2)$ — *розв'язний п. г. з. для пари* $(L - \lambda 1_H, L_0 - \lambda 1_H)$.

Доведення. З результатів робіт [2–4] та тотожності (23) випливає, що оператори $\Gamma_i, \tilde{\Gamma}_i$, $i = 1, 2$, задовольняють умови а)–в) означення 1. Далі, позначимо через $\hat{L}$ звуження оператора L на $\ker \Gamma_2$. Ясно, що для будь-якого $\lambda \in \mathbb{C}$ $\hat{L} - \lambda 1_H$ оборотний в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (див., наприклад, [4]). Тому досить переконатись у тому, що

$$\ker \Gamma_1 = D(L_0) \dotplus \ker (L - \lambda 1_H), \quad \ker \tilde{\Gamma}_1 = D(M_0) \dotplus \ker (M - \lambda 1_H). \tag{24}$$

Доведемо справедливість першої з умов (24) (друга доводиться аналогічно). Включення $D(L_0) \dotplus \ker (L - \lambda 1_H) \subset \ker \Gamma_1$ випливає з (21), (22). Навпаки, якщо $y \in \in \ker \Gamma_1$, то, виходячи з доведеної в [17] рівності $D(L) = D(\hat{L}) \dotplus \ker (L - \lambda 1_H)$, бачимо, що $y = y_1 + y_2$, де $y_1 \in \ker \Gamma_2$, $y_2 \in \ker (L - \lambda 1_H)$ (а отже, $y_2 \in \ker \Gamma_1$). Таким чином, $y_1 \in \ker \Gamma_1 \cap \ker \Gamma_2 = D(L_0)$, що й треба було довести.

Теорема 2. *Справедливі такі твердження:*

а) $\dim \ker (L_1 - \lambda 1_H) = \dim \ker \Delta_0(\lambda)$;

б) $\dim \ker \left(L_1^* - \bar{\lambda} 1_H\right) = \dim \ker \Delta_0(\lambda)^*$;

в) $L_1 - \lambda 1_H$ *нормально розв'язний тоді і тільки тоді, коли* $\Delta_0(\lambda)$ *нормально розв'язний.*

Доведення. Покладемо $U_1 y = (u_1(y), u_2(y))$, $y \in D(L)$,

$$B_1 = \begin{pmatrix} A_{12} & A_{11} \\ A_{22} & A_{21} \end{pmatrix}, \quad B_2 = B_1 \Gamma_0 Z_\lambda + \begin{pmatrix} A_{14} & A_{13} \\ A_{24} & A_{23} \end{pmatrix}.$$

Безпосередня перевірка показує, що $U_1 y = B_1 \Gamma_1 y + B_2 \Gamma_2 y$. Далі, з оборотності оператора (2) випливає правильність оператора B, визначеного умовою $B(h_1, h_2) = B_1 h_1 + B_2 h_2$. Виходячи звідси і з теореми 1, робимо висновок, що

$\dim\ker(L_1 - \lambda 1_H) = \dim\ker B_2$, $\dim\ker\left(L_1^* - \bar{\lambda} 1_H\right) = \dim\ker B_2^*$, а оператори $L_1 - \lambda 1_H$ та B_2 нормально розв'язні або ні одночасно. Але $B_2 = U_1 Z_\lambda$, $\Delta_0(\lambda) = U_1 Y_\lambda$, де $Y_\lambda(a_1, a_2) = \sum_{i=1}^2 Y_i(x, \lambda) a_i$, тобто $\Delta_0(\lambda)$ і B_2 відрізняються множником, оборотним в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Теорему доведено.

***Наслідок* 1.** а). *Число* $\lambda \in \mathbb{C}$ *є резольвентною точкою оператора* L_1 *тоді і тільки тоді, коли* $\Delta_0(\lambda)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$;

б). $L_1 - \lambda 1_H$ *фредгольмів тоді і тільки тоді, коли* $\Delta_0(\lambda)$ *фредгольмів; у цьому випадку* $\operatorname{ind}(L_1 - \lambda 1_H) = \operatorname{ind}\Delta_0(\lambda)$.

5. Резольвента збуреного оператора. Розглянемо питання про розв'язність рівняння $Ty - \lambda y = f$, $f \in H$, де T — оператор, описаний в п. 1 (див. (3) – (6)). Для цього введемо позначення

$$v_i = \begin{cases} u_i - \Phi_i, & i = 1,2; \\ u_i, & i = 3,4 \end{cases}$$

(зокрема, $v_i(g) = v_i(g(\cdot, \xi, \lambda))$, $i = 1, \ldots, 4$),

$$Y_j(x, \lambda) = \int_a^b g(x, \xi, \lambda) \varphi_j(\xi)\, d\xi, \quad j = 3, 4.$$

Таким чином (див. (14)),

$$-Y_j'' + p(x) Y_j = \varphi_j(x), \quad j = 3, 4, \tag{25}$$

$$\Delta(\lambda) = \begin{pmatrix} v_1(Y_1) & \ldots & v_1(Y_4) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ v_4(Y_1) & \ldots & v_4(Y_4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{H_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{H_0} \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Лема 1.

$$\dim\ker(T - \lambda 1_H) = \dim\ker\Delta(\lambda). \tag{27}$$

Доведення. З (25) випливає, що

$$c = (c_1, c_2, c_3, c_4) \mapsto \sum_{i=1}^4 Y_i(x, \lambda) c_i = y(x, \lambda) \tag{28}$$

відображає $\ker\Delta(\lambda)$ на $\ker(T - \lambda 1_H)$. При цьому $v_i(y) = -c_i$, $i = 3, 4$. З останніх співвідношень ясно, що якщо $y = 0$, то $c_3 = c_4 = 0$, а отже, й $c_1 = c_2 = 0$. Таким чином, відображення (28) ін'єктивне.

Лемма 2. *Оператори* $T - \lambda 1_H$ *та* $L_1 - \lambda 1_H$ *фредгольмові або ні одночасно. При цьому* $\operatorname{ind}(T - \lambda 1_H) = \operatorname{ind}(L_1 - \lambda 1_H)$ *(нагадаємо, що під* L_1 *розуміємо оператор, визначений згідно з* (7)).

Доведення. Позначимо через L_T звуження максимального оператора L на $D(T)$. Оскільки $\varphi_i(x) \in \mathcal{B}_\infty(H_0)$, а $\int_a^b \| \varphi_i(x) \|^2 dx < \infty$, то оператори Φ_i (див. (4)) компактні. Це доведено в [5]. Звідси випливає, що L_T — замкнений щільно визначений оператор, $D(L_T^*) = D(L_1^*)$, а $L_T^* - L_1^*$ є L_T^*-компактним і L_1^*-компактним, в той час як $T - L_T$ є L_T-компактним і T-компактним оператором (деталі див. в [11], розділ 4). Використовуючи теореми про відносно компактне збурення фредгольмового оператора і про індекси взаємно спряжених операторів [1] (теореми 4. 5. 14, 4. 5. 26), звідси робимо висновок, що

$$\operatorname{ind}(T-\lambda 1_H) = \operatorname{ind}(L_T-\lambda 1_H) = -\operatorname{ind}(L_T^*-\bar{\lambda}1_H) =$$
$$= -\operatorname{ind}(L_1^*-\bar{\lambda}1_H) = \operatorname{ind}(L_1-\lambda 1_H), \tag{29}$$

причому всі оператори, які фігурують в (29), фредгольмові або ні одночасно.

Лема 3. *Нехай $\mathcal{H}$ — гільбертів простір, $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,*

$$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 1_H \end{pmatrix}.$$

C фредгольмів тоді і тільки тоді, коли A фредгольмів. При цьому $\operatorname{ind} C = \operatorname{ind} A$.

Доведення. $\ker C = \{(x, -Bx) : x \in \ker A\}$, $R(C) = R(A) \oplus \mathcal{H}$, тому $\dim\ker C = \dim\ker A$, $\dim\ker C^* = \dim\ker A^*$.

Теорема 3. *Оператори $T-\lambda 1_H$ та $\Delta(\lambda)$ фредгольмові або ні одночасно. При цьому*

$$\operatorname{ind}(T-\lambda 1_H) = \operatorname{ind}\Delta(\lambda). \tag{30}$$

Зокрема, $\lambda \in \rho(T)$ тоді і тільки тоді, коли $\Delta(\lambda)^{-1} \in \mathcal{B}(H_0^4)$ і в цьому випадку

$$(T-\lambda 1_H)^{-1} f(x) = \int_a^b G(x,\xi,\lambda) f(\xi)\, d\xi, \quad f \in H, \tag{31}$$

де

$$G(x,\xi,\lambda) = g(x,\xi,\lambda) - \sum_{j,k=1}^{4} Y_j(x,\lambda)\delta_{jk}(\lambda) v_k(g), \tag{32}$$

$$\Delta(\lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} \delta_{11}(\lambda) & \dots & \delta_{14}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{41}(\lambda) & \dots & \delta_{44}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Доведення. Маємо

$$\Delta(\lambda) = \Delta_u(\lambda) + \Delta_\Phi(\lambda) = \begin{pmatrix} u_1(Y_1) & u_1(Y_2) & 0 & 0 \\ u_2(Y_1) & u_2(Y_2) & 0 & 0 \\ u_3(Y_1) & u_3(Y_2) & 1_{H_0} & 0 \\ u_4(Y_1) & u_4(Y_2) & 0 & 1_{H_0} \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} -\Phi_1 Y_1 & -\Phi_1 Y_2 & v_1(Y_3) & v_1(Y_4) \\ -\Phi_2 Y_1 & -\Phi_2 Y_2 & v_2(Y_3) & v_2(Y_4) \\ 0 & 0 & v_3(Y_3) & v_3(Y_4) \\ 0 & 0 & v_4(Y_3) & v_4(Y_4) \end{pmatrix}.$$

З теореми 2 та лем 2, 3 випливає, що $\operatorname{ind}(T-\lambda 1_H) = \operatorname{ind}(L_1-\lambda 1_H) = \operatorname{ind}\Delta_0(\lambda) = \operatorname{ind}\Delta(\lambda)$, причому усі ці оператори фредгольмові або ні одночасно, а з компактності операторів $\Phi_i\ Y_j$, $j = 1, \dots, 4$, $u_i(Y_j)$, $j = 3, 4$, і теореми 4. 5. 26 з [1] — що фредгольмовість оператора $\Delta(\lambda)$ рівносильна фредгольмовості оператора $\Delta_u(\lambda)$ і в цьому випадку $\operatorname{ind}\Delta_u(\lambda) = \operatorname{ind}\Delta(\lambda)$. Зокрема, якщо $\lambda \in \rho(T)$, то $\operatorname{ind}\Delta(\lambda) = 0$. Крім цього, як випливає з леми 1, у цьому випадку $\ker\Delta(\lambda) = \{0\}$, а отже $\Delta(\lambda)^{-1} \in \mathcal{B}(H_0^4)$. Навпаки, якщо $\Delta(\lambda)^{-1} \in \mathcal{B}(H_0^4)$, то $\operatorname{ind}(T-$

$-\lambda 1_H)=\{0\}$, $\ker(T-\lambda 1_H)=\{0\}$, тобто, $\lambda \in \rho(T)$. При цьому, як легко бачити, розв'язок рівняння $Ty-\lambda y=f$, $f\in H$, має вигляд

$$y = \sum_{i=1}^{4} Y_i(x,\lambda)c_i + \int_a^b g(x,\xi,\lambda)f(\xi)\,d\xi, \tag{33}$$

де

$$u_i(y) = \Phi_i y,\ i=1,2;\quad u_i(y) = -c_i,\ i=3,4. \tag{34}$$

Підставляючи (33) в (34), одержуємо систему рівнянь для знаходження невідомих c_i: $\Delta(\lambda)c=d$, де $c=(c_1,\ldots,c_4)$, $d=(d_1,\ldots,d_4)$, $d_i=-\int_a^b v_i(g)f(\xi)\,d\xi$. Підставляючи розв'язок цієї системи в (33), переконуємось у справедливості формул (31), (32). Теорему доведено.

Зауваження 3. При доведенні основних тверджень роботи важливу роль відігравала оборотність оператора A, визначеного згідно з (2). Однак для встановлення деяких з них, а саме п. а) твердження 2 та леми 1, вона неістотна.

1. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
2. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
3. *Зиатдинов Ф. З.* О линейных дифференциальных операторах второго порядка в гильбертовом пространстве вектор-функций из абстрактного сепарабельного гильбертова пространства // Изв. вузов. Математика. – 1960. – №4. – С. 89 - 100.
4. *Рофе-Бекетов Ф. С.* О самосопряженных расширениях дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1969. – **8**. – С. 3 - 24.
5. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
6. *Brown R. C.* The operator theory of generalized boundary value problems // Can. J. Math. – 1976. – **28**, № 3. – P. 486 - 512.
7. *Coddington E. A.* Self-adjoint subspace extesions of nondensely defined symmetric operator // Adv. Math. – 1974. – **14**, № 3. – P. 309 - 332.
8. *Krall A. M.* Differential-boundary operators // Trans. Amer. Math. Soc. – 1971. – **154**. – P. 429 – 456.
9. *Лянце В. Э.* О некоторых соотношениях между замкнутыми операторами // Докл. АН СССР. – 1972. – **204**, № 3. – С. 542 - 545.
10. *Сторож О. Г.* Некоторые спектральные свойства оператора, родственного дифференциальному // Дифференц. уравнения. – 1975. – **11**, № 6. – С. 1141 - 1143.
11. *Лянце В. Э., Сторож О. Г.* Методы теории неограниченных операторов – Киев: Наук. думка, 1983. – 212 с.
12. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 536 с.
13. *Вайнерман Л. И.* О расширениях замкнутых операторов в гильбертовом пространстве // Мат. заметки. – 1980. – **28**, № 6. – С. 833 - 842.
14. *Кочубей А. Н.* О расширениях положительно определенного симметрического оператора // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1979. – № 3. – С. 168 - 171.
15. *Михайлец В. А.* Спектры операторов и граничные задачи // Спектральный анализ дифференциальных операторов. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. – С. 106 - 131.
16. *Брук В. М.* Об обратимых сужениях замкнутых операторов в банаховых пространствах // Функцион. анализ. – 1988. – **28**. – С. 17 - 22.
17. *Вишик М. И.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1952. – **1**. – С. 187 - 246.
18. *Сторож О. Г.* О разрешимости расширений замкнутого оператора // Методы исследования дифференциальных и интегральных операторов. – Киев: Наук. думка, 1989. – С. 171 - 175.

Одержано 14.05.93