УДК 519.41/47

О. Ю. Дашкова, канд. физ.-мат. наук (Днепропетр. ун-т)

ЛОКАЛЬНО НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ГРУППЫ КОНЕЧНОГО НЕАБЕЛЕВА СЕКЦИОННОГО РАНГА

The definition of non-Abelian sectional rank of a group is introduced. Non-Abelian locally nilpotent groups of finite non-Abelian rank are studied. It ls proved that the (special) rank of these groups is finite.

Введено поняття неабелевого секційного рангу групи. Вивчаються неабелеві локально нільпотентні групи скінченного неабелевого секційного рангу і доводиться, що їх (спеціальний) ранг скінченний.

Д. И. Зайцевым было введено понятие $\mathcal{F}$-ранга группы, где $\mathcal{F}$ — некоторая непустая система ее конечнопорожденных подгрупп [1]. Напомним, что $\mathcal{F}$-рангом группы G называется такое наименьшее число r, что любая подгруппа системы $\mathcal{F}$ может быть порождена не более чем r элементами. В случае, когда такого числа r нет, $\mathcal{F}$-ранг группы G считается бесконечным. Автором в [1, 2] изучались группы конечного $\mathcal{F}$-ранга в случаях, когда $\mathcal{F}$ — система всех неабелевых конечнопорожденных подгрупп группы (группы конечного неабелева ранга) и $\mathcal{F}$ — система всех неабелевых непериодических конечнопорожденных подгрупп (группы конечного неабелева 0-ранга).

В настоящей работе начато исследование неабелевых групп с ограничениями на некоторые системы их конечнопорожденных неабелевых секций. Под секцией группы G всюду будем понимать фактор-группу A/B, где A и B — неединичные подгруппы группы G и подгруппа B нормальна в A.

Будем говорить, что неабелева группа G имееет конечный *неабелев секционный ранг* r, если r является наименьшим числом с тем свойством, что всякая неабелева конечнопорожденная секция группы G может быть порождена не более чем r элементами. Если все секции группы G абелевы, неабелев секционный ранг группы G полагают равным 0. В случае, когда G имеет хотя бы одну неабелеву секцию и число r с указанным свойством не существует, неабелев секционный ранг группы G считается бесконечным.

Неабелев секционный ранг группы G обозначим через $\bar{r}_c(G)$. Символом $r(G)$ обозначается, как известно, специальный ранг группы G.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема. *Неабелева локально нильпотентная группа тогда и только тогда имеет конечный (специальный) ранг, когда ее неабелев секционный ранг конечен.*

Доказательству теоремы предпошлем два вспомогательных утверждения. Символом p всюду обозначено простое число.

Лемма 1. *Пусть G — неабелева конечная p-группа с циклическим центром и для элемента z порядка p из центра группы G фактор-группа $G/\langle z\rangle$ абелева. Тогда для любого элемента g группы G справедливо неравенство*

$$r(\overline{C}) \geq r - 1, \tag{1}$$

где $\overline{C} = C_G(g)/\langle z\rangle$, $C_G(g)$ — централизатор элемента g в группе G, $r = r(G/\langle z\rangle)$.

Доказательство. Если элемент g содержится в центре $Z(G)$ группы G, то $C_G(g) = G$, и поэтому $r(C_G(g)) \geq r$. Рассмотрим случай, когда $g \notin Z(G)$. С учетом строения группы G получаем, что в G найдутся элементы h_1, $h_2, \ldots, h_{r-1}$, для которых

$$r\left(\langle\overline{g}\rangle\times\langle\overline{h}_1\rangle\times\langle\overline{h}_2\rangle\times\ldots\times\langle\overline{h}_{r-1}\rangle\right) = r,$$

где $\overline{g} = g\langle z\rangle$, $\overline{h}_i = h_i\langle z\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, r-1$. Если элементы $h_1, h_2, \ldots, h_{r-1}$ содержатся в централизаторе $C_G(g)$, то неравенство (1) доказано. Пусть теперь $[g, h_i] \neq e$ для некоторого номера $i = 1, 2, \ldots, r-1$. Можно считать, что $[g, h_1] \neq e$. Так как фактор-группа $G/\langle z\rangle$ абелева, то найдутся такие целые $k_1, k_2, \ldots, k_{r-1}$, для которых элементы $b_1 = h_1^{k_1}h_2, b_2 = h_1^{k_2}h_3, \ldots, b_{r-2} = h_1^{k_{r-1}}h_{r-1}$, содержатся в централизаторе $C_G(g)$. Поскольку ранг $(\langle\overline{g}\rangle\times\langle\overline{b}_1\rangle\times\langle\overline{b}_2\rangle\times\ldots\times\langle\overline{b}_{r-2}\rangle) = r-1$, справедливо неравенство (1). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть G — неабелева конечная p-группа с циклическим центром и для элемента z порядка p из центра группы G фактор-группа $G/\langle z\rangle$ абелева. Тогда для любых двух элементов g_1 и g_2 группы G справедливо неравенство*

$$r\left(\overline{C}_1\cap\overline{C}_2\right) \geq r-2, \tag{2}$$

где $\overline{C}_1 = C_G(g_1)/\langle z\rangle$, $\overline{C}_2 = C_G(g_2)/\langle z\rangle$, $r = r(G/\langle z\rangle)$.

Доказательство. Предположим, что $r\left(\overline{C}_1\cap\overline{C}_2\right) < r-2$. В подгруппе $\overline{C}_1$ фактор-группы $\overline{G} = G/\langle z\rangle$ найдется подгруппа $\overline{K}$, для которой

$$r(\overline{C}_1) = r\left((\overline{C}_1\cap\overline{C}_2)\times\overline{K}\right) = r\left(\overline{C}_1\cap\overline{C}_2\right) + r(\overline{K}).$$

Поскольку согласно лемме 1 $r(\overline{C}_1) \geq r-1$, а по предположению $r\left(\overline{C}_1\cap\overline{C}_2\right) < r-2$, получаем $r(\overline{K}) > 1$. Из выбора подгруппы $\overline{K}$ следует $\overline{K}\cap\overline{C}_2 = \overline{E}$, поэтому $\overline{C}_2\cdot\overline{K} = \overline{C}_2\times\overline{K}$. Так как $r(\overline{C}_2) \geq r-1$, а $r(\overline{K}) > 1$, то выполняется неравенство $r\left(\overline{C}_2\times\overline{K}\right) > r$. Противоречие. Отсюда следует неравенство (2). Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Для доказательства теоремы достаточно установить конечность ранга неабелевой локально нильпотентной группы конечного неабелева секционного ранга. Рассмотрим сначала случай неабелевой локально нильпотентной p-группы G конечного неабелева секционного ранга $\overline{r}_c(G)$. Пусть H — произвольная неабелева конечнопорожденная подгруппа группы G. Если фактор-группа $H/Z(H)$ неабелева, то для любого неединичного элемента z_0 из центра $Z(H)$ фактор-группа $H/\langle z_0\rangle$ также неабелева, и поэтому согласно конечности неабелева секционного ранга группы G подгруппа H может быть порождена не более чем $\overline{r}_c(G)+1$ элементами. Если фактор-группа $H/Z(H)$ абелева и центр $Z(H)$ нециклический, то в подгруппе $Z(H)$ можно выбрать элемент z_1 так, чтобы фактор-группа $H/\langle z_1\rangle$ была неабелевой. Отсюда следует, что подгруппа H имеет систему порождающих, содержащую не более чем $\overline{r}_c(G)+1$ элементов.

Пусть теперь фактор-группа $H/Z(H)$ абелева и центр $Z(H)$ циклический. Если для элемента z порядка p из центра $Z(H)$ фактор-группа $H/\langle z\rangle$ неабелева, то H может быть порождена не более чем $\overline{r}_c(G)+1$ элементами. Рассмотрим случай, когда фактор-группа $H/\langle z\rangle$ абелева. Пусть в подгруппе H можно выбрать элемент h, для которого централизатор $C = C_H(h)$ неабелев и $z \notin \langle h\rangle$. Поскольку элемент z не содержится в подгруппе $\langle h\rangle$, фактор-группа $C/\langle h\rangle$ неабелева, и поэтому подгруппа C может быть порождена не более чем $\overline{r}_c(G)+1$ элементами. Отсюда вытекает $r(\overline{C}) \leq \overline{r}_c(G)+1$, где $\overline{C} = C/\langle z\rangle$. С другой стороны, по лемме 1 $r(\overline{C}) \geq r-1$, где $r = r(H/\langle z\rangle)$. Из двух приведенных неравенств следует, что ранг фактор-группы $H/\langle z\rangle$ не превышает числа $\bar{r}_c(G)+2$, и поэтому подгруппа H может быть порождена не более чем $\bar{r}_c(G)+3$ элементами.

В случае, когда элемент h с указанными свойствами не существует, возьмем в H два некоммутирующих элемента h_1 и h_2. Положим $C_1 = C_H(h_1)$ и $C_2 = C_H(h_2)$. Если подгруппа $C_1 \cap C_2$ является циклической, то с учетом неравенства (2) получаем $r \le 3$. Отсюда вытекает, что подгруппа H может быть порождена не более чем 4 элементами. Если пересечение $C_1 \cap C_2$ является абелевой нециклической подгруппой, то в $C_1 \cap C_2$ можно выбрать элемент c так, чтобы $z \notin \langle c\rangle$. Рассмотрим подгруппу $L = \langle C_1 \cap C_2, h_1, h_2\rangle$. Фактор-группа $L/\langle c\rangle$ неабелева, поэтому подгруппа L имеет систему порождающих, содержащую не более чем $\bar{r}_c(G)+1$ элементов. Отсюда вытекает, что $r(\bar{L}) \le \bar{r}_c(G)+1$, где $\bar{L} = L/\langle z\rangle$. Поскольку $\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \le \bar{L}$, то $r\left(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2\right) \le \bar{r}_c(G)+1$. Отсюда с учетом доказанного в лемме 2 неравенства $r\left(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2\right) \ge r-2$ вытекает, что $r \le \bar{r}_c(G)+3$, и поэтому подгруппа H может быть порождена не более чем $\bar{r}_c(G)+4$ элементами.

Рассмотрим теперь случай неабелевой подгруппы $C_1 \cap C_2$. Поскольку элементы h_1 и h_2 не коммутируют, то $r(\langle h_1, h_2\rangle) \ge 2$, и поэтому в подгруппе $\langle h_1, h_2\rangle$ можно выбрать элемент h_3 порядка p такой, что $z \notin \langle h_3\rangle$. Положим $M = \langle C_1 \cap C_2, h_3\rangle$. Из выбора элемента h_3 вытекает, что фактор-группа $M/\langle h_3\rangle$ неабелева, и поэтому подгруппа M может быть порождена не более чем $\bar{r}_c(G)+1$ элементами. Поскольку имеет место включение $\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \le \bar{M}$, где $\bar{M} = M/\langle z\rangle$, справедливо неравенство $r\left(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2\right) \le \bar{r}_c(G)+1$. Отсюда с учетом неравенства $r\left(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2\right) \ge r-2$ вытекает, что $r \le \bar{r}_c(G)+3$. Следовательно, подгруппа H имеет систему порождающих, содержащую не более чем $\bar{r}_c(G)+4$ элементов.

Итак, нами установлено, что неабелев ранг неабелевой p-группы G конечного неабелева секционного ранга не превышает числа $\bar{r}_c(G)+4$. Отсюда по теореме 2 [2] получаем конечность ранга группы G.

Пусть теперь G — произвольная неабелева периодическая локально нильпотентная группа конечного неабелева секционного ранга. Группу G разложим в прямое произведение ее силовских p_i-подгрупп: $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_i \times \ldots$. Можно считать, что p_1-подгруппа G_1 неабелева. В силу доказанного выше ранг $r(G_1)$ конечен. Возьмем в подгруппе $G_2 \times G_3 \times \ldots \times G_i \times \ldots$ произвольную абелеву конечнопорожденную подгруппу A, а в подгруппе G_1 — неабелеву конечнопорожденную подгруппу H_1. Подгруппа $H_1 \times A$ конечнопорождена и неабелева. Фактор-группа $(H_1 \times A)/\langle a\rangle$, где a — произвольный неединичный элемент из подгруппы A, является неабелевой, и поэтому может быть порождена не более чем $\bar{r}_c(G)$ элементами. Следовательно, подгруппа $H_1 \times A$ имеет систему порождающих, содержащую не более чем $\bar{r}_c(G)+1$ элементов. С учетом изоморфизма $(A \times H_1)/H_1 \cong A$ и конечности ранга подгруппы G_1 получаем, что ранг произвольной абелевой подгруппы группы G конечен. Отсюда вытекает конечность ранга группы G [3]. Отметим, что из теоремы 1 [4] следует, что силовские p-подгруппы группы G являются черниковскими, а сама группа удовлетворяет условию примарной минимальности [5] (§8).

Рассмотрим теперь случай непериодической неабелевой локально нильпотентной группы G конечного неабелева секционного ранга. Обозначим через

N произвольную неабелеву конечнопорожденную непериодическую подгруппу группы G. Согласно теореме 5.2.22 [6] центр $Z(N)$ содержит элемент s бесконечного порядка. Если фактор-группа $N/\langle s\rangle$ неабелева, то подгруппа N имеет систему порождающих, содержащую не более чем $\bar{r}_c(G)+1$ элементов. В случае абелевой фактор-группы $N/\langle s\rangle$ найдутся два некоммутирующих элемента d и b из N такие, что $[d,b]=s^k$, $k>0$. Для произвольного натурального $l>1$, которое взаимно просто с k, фактор-группа $N/\langle s^l\rangle$ неабелева, и поэтому подгруппа N может быть порождена не более чем $\bar{r}_c(G)+1$ элементами. Отсюда вытекает, что неабелев 0-ранг группы G конечен и не превышает числа $\bar{r}_c(G)+1$. По теореме 1 [2] ранг группы G конечен. Теорема доказана.

1. *Дашкова О. Ю.* Разрешимые группы конечного неабелева ранга // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, №2. – С.159 – 164.
2. *Дашкова О. Ю.* Локально почти разрешимые группы конечного неабелева ранга // Там же. – №4. – С. 477 – 482.
3. *Горчаков Ю. М.* О существовании абелевых подгрупп бесконечного ранга в локально разрешимых группах // Докл. АН СССР. – 1964. – **156**, №1. – С. 17 – 20.
4. *Мягкова Н. Н.* О группах конечного ранга // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1949.– **13**, №6. – С. 495 – 512.
5. *Черников С. Н.* Условия конечности в общей теории групп // Успехи мат. наук. – 1959. – **14**, №5. – С. 45 – 96.
6. *Robinson D. J. S.* A course in the theory of groups.– New York etc.: Springer, 1982. – 483 p.

Получено 24.12.93