УДК 517.9

В. Ю. Слюсарчук, д-р фіз.-мат. наук (Укр. ін-т інж. вод. господарства, Рівне)

НЕОБХІДНІ І ДОСТАТНІ УМОВИ ОСЦИЛЯЦІЇ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ З МУЛЬТИПЛІКАТИВНО РОЗДІЛЕНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ*

Necessary and sufficient conditions of oscillation of solutions of nonlinear differential equations with fixed moments of pulse influence and a multiplicatively separated right-hand side are established.

Одержані необхідні і достатні умови осциляції розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь з фіксованими моментами імпульсної дії і мультиплікативно розділеною правою частиною.

Проблемі осциляції розв'язків диференціальних рівнянь присвячено багато робіт (див., наприклад, [1–8]). Проте осциляції розв'язків диференціальних рівнянь з імпульсною дією, методи дослідження яких є більш складними, наділено мало уваги. Детальніше для таких динамічних систем вивчені питання періодичності, майже періодичності і обмеженості розв'язків [9–13].

Метою даної статті є одержання умов осциляції і неосциляції розв'язків системи

$$\begin{gathered}
\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -p_1(t)f_1(x(t)), \quad t \in \mathbb{R}_+ \setminus T, \\
\frac{dx(t+0)}{dt} - \frac{dx(t-0)}{dt} = -p_2(t)f_2(x(t)), \quad t \in T, \\
x(t+0) = x(t-0) = x(t), \quad t \in T,
\end{gathered} \tag{1}$$

де

$$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty), \qquad T = \left\{ t_i \in \mathbb{R}_+ : i \in \mathbb{N}, \ t_{k+1} > t_k > 0, \ k \in \mathbb{N}, \ \lim_{k\to\infty} t_k = +\infty \right\},$$

$$p_1 : \mathbb{R}_+ \setminus T \to \mathbb{R}_+, \quad f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad i = \overline{1,2},$$

— неперервні відображення, а $p_2 : T \to \mathbb{R}_+$ — довільне (однозначне) відображення.

Вважається, що для довільних $t_0 \in \mathbb{R}_+ \setminus T$, $x_1 \in \mathbb{R}$ і $x_2 \in \mathbb{R}$ система (1) має єдиний розв'язок $x(t, t_0, x_1, x_2)$, який задовольняє умови $x(t, t_0, x_1, x_2) = x_1$, $dx(t, t_0, x_1, x_2)/dt = x_2$.

1. Достатні умови осциляції розв'язків. Розв'язок $y(t)$ системи (1) називається осцилюючим, якщо

$$\{ t : y(t) > 0, \ t > a \} \neq \varnothing, \quad \{ t : y(t) < 0, \ t > a \} \neq \varnothing$$

для всіх $a > 0$.

Теорема 1. *Нехай:*

1) $$x f_i(x) > 0, \ i = \overline{1,2}, \quad \textit{якщо} \quad x \neq 0;$$

2) $$\inf_{|x|>\varepsilon} \frac{|f_i(x)|}{|x|^\beta} > 0, \quad \sup_{|x|>\varepsilon} \frac{|f_i(x)|}{|x|^\beta} < \infty, \quad i = \overline{1,2},$$

для всіх $\varepsilon > 0$, *де* $\beta > 1$;

* Робота виконана при фінансовій підтримці Державного комітету України з питань науки та технологій.

3) $$\int_0^{+\infty} tp_1(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} t_n p_2(t_n) = +\infty;$$

4) $$|x_1| + |x_2| \neq 0 \quad \text{і} \quad t_0 \in \mathbb{R}_+ \setminus T.$$

Тоді $x(t, t_0, x_1, x_2)$ — *осцилюючий розв'язок системи* (1).

Доведення. З обмежень на систему (1), першої і четвертої умов теореми випливає, що для розв'язку $z(t) = x(t, t_0, x_1, x_2)$ цієї системи не може виконуватися співвідношення $z(t) = 0\ \ \forall\, t \geq a$ ні для будь-якого $a > 0$. Тому або $z(t)$ — осцилюючий розв'язок системи (1), або

$$z(t) > 0 \quad \forall\, t \in [\tau, +\infty) \setminus T_1, \tag{2}$$

або

$$z(t) < 0 \quad \forall\, t \in [\tau, +\infty) \setminus T_1 \tag{3}$$

для деяких числа $\tau > 0$ і зліченної необмеженої множини T_1, для всіх точок s якої $z(s) = 0$.

Нехай виконується співвідношення (2). Оскільки на підставі (1)

$$\frac{dz(s)}{dt} - \frac{dz(t)}{dt} = -\int_t^s p_1(u) f_1(z(u))\,du - \sum_{u \in (t,s) \cap T} p_2(u) f_2(z(u)) \tag{4}$$

для довільних $t \geq \tau$ і $s \geq t$ $(t, s \notin T)$ і

$$\int_t^s p_1(u) f_1(z(u))\,du + \sum_{u \in (t,s) \cap T} p_2(u) f_2(z(u)) \geq 0, \quad s \geq t \geq \tau,$$

на підставі (2), першої і третьої умов теореми і обмежень на $p_i(t)$, $i = \overline{1,2}$, то функція $z(t)$ є угнутою на $[\tau, +\infty)$ [14, с. 17] і існує

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{dz(s+0)}{ds} = c \geq 0, \quad c \neq +\infty.$$

Звідси і з (4) випливає, що невласний інтеграл $\int_t^{+\infty} p_1(u) f_1(z(u))\,du$ і числовий ряд $\sum_{t_n > t} p_2(t_n) f_2(z(t_n))$ збігаються для кожного $t \geq \tau$, що дає змогу ввести в розгляд функції

$$F_1(t) = \int_t^{+\infty} p_1(u) f_1(z(u))\,du, \qquad F_2(t) = \sum_{t_n > t} p_2(t_n) f_2(z(t_n)), \quad t \geq \tau.$$

Справедлива нерівність

$$\frac{dz(t)}{dt} \geq F(t), \quad t \geq \tau,\ t \notin T, \tag{5}$$

де $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$, і функція $z(t)$ на проміжку $[\tau, +\infty)$ є неспадною. Тому в співвідношенні (2) множина T_1 пуста. Отже,

$$z(t) > 0 \quad \forall\, t \geq \tau \quad \text{і} \quad \lim_{t \to +\infty} z(t) > 0. \tag{6}$$

Оскільки функція $F_1(t)$ неперервна на $[\tau, +\infty)$, а функція $F_2(t)$ неперервна на $[\tau, +\infty) \setminus T$, неперервна праворуч на $[\tau, +\infty) \cap T$ і обмежена на $[\tau, +\infty)$, то функція $F(t)$ на $[\tau, t]$ $(t > \tau)$ інтегровна за Ріманом. Тому на підставі (5) і (6)

$$z(t) \geq \int_{\tau}^{t} F(s)\, ds \quad \forall\, t \geq \tau. \tag{7}$$

Враховуючи те, що функція $F(t)$ на $[\tau, +\infty)$ є функцією з обмеженою змінною і виконується нерівність

$$\int_{\tau}^{t} F(s)\, ds \geq \int_{\tau}^{t} (\tau - s)\, dF(s), \quad t > \tau,$$

яка легко встановлюється, на підставі (7) одержуємо $z(t) \geq G(t)$, $t > \tau$, де

$$G(t) = \int_{\tau}^{t} (\tau - s)\, dF(s), \quad t > \tau.$$

Не обмежуючи загальності, можна вважати, що $G\,(t) > 0 \quad \forall\, t > \tau$. Тоді $[z(t)]^{-\beta} \leq [G(t)]^{-\beta}$ $\forall\, t > \tau$ і

$$\int_{a}^{t} (\tau - s)[z(s)]^{-\beta} dF(s) \leq \int_{a}^{t} (\tau - s)[G(s)]^{-\beta} dF(s) \tag{8}$$

для всіх $t > a$, де $a > \tau$ і $a \notin T$.

Ліва і права частини останньої нерівності — відповідно інтеграли Рімана–Стільтьєса і Лебега–Стільтьєса, оскільки функція $(\tau - t)[z(t)]^{-\beta}$ неперервна на $[a, +\infty)$, а функції $(\tau - t)[G(t)]^{-\beta}$ і $F\,(t)$ неперервні на $[a, +\infty) \setminus T$, неперервні праворуч на $[a, +\infty) \cap T$ і в точках множини $[a, +\infty) \cap T$ мають розриви першого роду. Неважко перевірити, що праву частину нерівності (8) можна зобразити у вигляді $\int_a^t [G(s)]^{-\beta} dG(s)$ і

$$\int_{a}^{t} [G(s)]^{-\beta} dG(s) = \frac{1}{1-\beta}\big((G^{1-\beta}(s_1 - 0) - G^{1-\beta}(a)) + (G^{1-\beta}(s_2 - 0) -$$

$$- G^{1-\beta}(s_1)) + \ldots + (G^{1-\beta}(s_n - 0) - G^{1-\beta}(s_{n-1})) + (G^{1-\beta}(t) - G^{1-\beta}(s_n))\big) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} G^{-\beta}(s_k)[G(s_k) - G(s_k - 0)], \tag{9}$$

що випливає з означення інтегралу Лебега–Стільтьєса, де $s_1, s_2, \ldots s_n$, — всі точки множини $[a, t) \cap T$, для яких $s < s_2 < \ldots < s_n$. Оскільки $G(a) > 0$, функція $G(t)$ є неспадною на $[a, +\infty)$ і на підставі теореми Лагранжа про скінченні прирости [15, с. 226]

$$G^{-\beta}(s_k)(G(s_k) - G(s_k - 0)) \leq \frac{1}{\beta - 1}(G^{1-\beta}(s_k - 0) - G^{1-\beta}(s_k)), \quad k = \overline{1, n},$$

то права частина рівності (9) не менша $(1/(\beta - 1))[G^{1-\beta}(a) - G^{1-\beta}(t)]$.

Отже,

$$\int_{a}^{t} [G(s)]^{-\beta} dG(s) \leq \frac{1}{\beta - 1} G^{1-\beta}(a) \quad \forall\, t \geq a.$$

Тому невласний інтеграл Рімана–Стільтьєса

$$\int\limits_a^{+\infty} (\tau - s)\,[z(s)]^{-\beta}\, dF(s)$$

збігається, тобто збігаються невласний інтеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} (s - \tau)\,[z(s)]^{-\beta} p_1(s) f_1(z(s))\, ds$$

і числовий ряд

$$\sum_{t_n > a}^{\infty} (t_n - \tau)[z(t_n)]^{-\beta} p_2(t_n) f_2(z(t_n)).$$

Отже, на підставі другої умови теореми і співвідношення (6) збігаються невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} s p_1(s)\, ds$ і числовий ряд $\sum_{t_n > a} t_n p_2(t_n)$, а це суперечить третій умові теореми.

Таким чином, припущення про те, що виконується співвідношення (2), хибне.

Аналогічним чином встановлюється, що співвідношення (3) також не може виконуватися.

Отже, $x(t, t_0, x_1, x_2)$ — осцилюючий розв'язок системи (1). Теорема 1 доведена.

Теорема 2. *Нехай:*

1) $$x f_i(x) > 0, \ i = \overline{1, 2}, \quad \textit{якщо} \quad x \neq 0;$$

2) $$\inf_{|x| > \varepsilon} \frac{|f_i(x)|}{|x|^\beta} > 0, \quad \sup_{|x| > \varepsilon} \frac{|f_i(x)|}{|x|^\beta} < \infty, \quad i = \overline{1, 2},$$

для всіх $\varepsilon > 0$, *де* $\beta \in (0, 1)$;

3) $$\int\limits_0^{+\infty} t^\beta p_1(t)\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} t_n^\beta p_2(t_n) = +\infty;$$

4) $$|x_1| + |x_2| \neq 0 \quad \text{і} \quad t_0 \in \mathbb{R}_+ \setminus T.$$

Тоді $x(t, t_0, x_1, x_2)$ — *осцилюючий розв'язок системи* (1).

Доведення. Будемо використовувати позначення, введені в доведенні теореми 1.

Нехай виконується співвідношення (2). Повторюючи міркування, проведені на початку доведення теореми 1, переконуємося в тому, що для $z(t)$ виконуються співвідношення (6) і (7). Оскільки $F(t)$ незростаюча на $[\tau, +\infty)$, неперервна на $[\tau, +\infty) \setminus T$ і неперервна праворуч на $[\tau, +\infty) \cap T$ функція, то для кожного $t \in (\tau, +\infty)$ існує границя $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} F(t - \varepsilon)$ і функція $F^*(t)$, визначена рівністю

$$F^*(t) = \lim_{\varepsilon \to +0} F(t - \varepsilon),$$

є неперервною на $(\tau, +\infty) \setminus T$ і неперервною ліворуч у точках множини $(\tau, +\infty) \cap T$. Очевидно,

$$\int\limits_\tau^t F(s)\, ds = \int\limits_\tau^t F^*(s)\, ds \geq (t - \tau) F^*(t) \quad \forall\, t \geq \tau.$$

Тому на підставі (7) $z(t) \geq (t-\tau)F^*(t)$ $\forall\, t > \tau$. З третьої умови теореми випливає, що $F^*(t) > 0$ $\forall\, t > \tau$. Отже,

$$[z(t)]^{-\beta}(t-\tau)^{\beta} \leq [F^*(t)]^{-\beta} \quad \forall\, t > \tau$$

і

$$-\int\limits_a^t [z(t)]^{-\beta}(s-\tau)^{\beta} dF^*(s) \leq -\int\limits_a^t [F^*(s)]^{-\beta} dF^*(s) \quad \forall\, t > a \ \ (t \notin T), \tag{10}$$

де a — довільне число з проміжку $(\tau, +\infty)$. З означення інтегралу Лебега–Стільтьєса одержуємо

$$-\int\limits_a^t [F^*(s)]^{-\beta} dF^*(s) = \frac{1}{1-\beta}[([F^*(a)]^{1-\beta} - [F^*(s_1)]^{1-\beta}) +$$

$$+ ([F^*(s_1+0)]^{1-\beta} - [F^*(s_2)]^{1-\beta}) + \ldots + ([F^*(s_n+0)]^{1-\beta} - [F^*(s_n)]^{1-\beta}) +$$

$$+ ([F^*(s_n+0)]^{1-\beta} - [F^*(t)]^{1-\beta})] + \sum_{k=1}^{n} [F^*(s_k)]^{-\beta}(F^*(s_k) - F^*(s_k+0)), \tag{11}$$

де $s_1, s_2, \ldots s_n$ — всі точки множини $(a, t) \cap T$, для яких $s_1 < s_2 < \ldots < s_n$ і a, $t \notin T$. Оскільки

$$[F^*(s_k)]^{-\beta}(F^*(s_k) - F^*(s_k+0)) \leq$$

$$\leq \frac{1}{1-\beta}([F^*(s_k)]^{1-\beta} - [F^*(s_k+0)]^{1-\beta}), \quad k = \overline{1,n},$$

то права частина рівності (11) не менша за число

$$\frac{1}{1-\beta}([F^*(a)]^{1-\beta} - [F^*(t)]^{1-\beta}).$$

Отже,

$$-\int\limits_a^t [F^*(s)]^{-\beta} dF^*(s) \leq \frac{1}{1-\beta}[F^*(a)]^{1-\beta} \quad \forall\, t > a.$$

Тому згідно з (10) невласний інтеграл Рімана–Стільтьєса

$$\int\limits_a^{+\infty} [z(s)]^{-\beta}(s-\tau)^{\beta} dF^*(s)$$

збігається, тобто збігаються невласний інтеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} [z(s)]^{-\beta}(s-\tau)^{\beta} p_1(s) f_1(z(s))\, ds$$

і числовий ряд

$$\sum_{t_n \geq a} [z(t_n)]^{-\beta}(t_n-\tau)^{\beta} p_2(t_n) f_2(z(t_n)).$$

Отже, на підставі другої умови теореми і співвідношення (6) збігаються невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} s^{\beta} p_1(s)\, ds$ і числовий ряд $\sum_{t_n \geq a} t_n^{\beta} p_2(t_n)$, а це суперечить третій умові теореми.

Таким чином, припущення про те, що виконується співвідношення (2), хибне. Аналогічним чином встановлюється, що співвідношення (3) також не може виконуватися. Отже, $x(t, t_0, x_1, x_2)$ — осцилюючий розв'язок системи (1). Теорема доведена.

У випадку, коли для системи (1) не виконується друга умова теореми 1, для дослідження осциляції розв'язків системи (1) можна використовувати таке твердження.

Теорема 3. *Нехай:*

1) $$x f_i(x) > 0, \ i = \overline{1,2}, \quad \textit{якщо} \quad x \neq 0;$$

2) $$\int\limits_0^{+\infty} p_1(t)dt + \sum_{n=1}^{\infty} p_2(t_n) = +\infty;$$

3) $$|x_1| + |x_2| \neq 0 \quad \text{і} \quad t_0 \in \mathbb{R}_+ \setminus T.$$

Тоді $x(t, t_0, x_1, x_2)$ *— осцилюючий розв'язок системи* (1).

Доведення. Повторюючи міркування, проведені на початку доведення теореми 1, приходимо до висновку, що у випадку припущення про виконання співвідношення (2)

$$\lim_{s \to +0} \frac{dz(s)}{ds} = c \geq 0, \quad c \neq +\infty,$$

функція $z(t)$ не деякому проміжку $[\tau, +\infty)$ є неспадною і

$$\lim_{t \to +\infty} z(t) > 0.$$

Тоді на підставі співвідношеня (4) і другої умови теореми

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{dz(s)}{ds} = -\infty,$$

що суперечить попереднім співвідношенням і вказує на хибність припущення про виконання співвідношення (2).

У випадку припущення про виконання співвідношення (3) одержуємо аналогічну суперечність. Отже, $x(t, t_0, x_1, x_2)$ — осцилюючий розв'язок системи (1). Теорема 3 доведена.

2. Достатні умови існування неосцилюючих розв'язків.

Теорема 4. *Нехай:*

1) $$x f_i(x) > 0, \ i = \overline{1,2}, \quad \textit{якщо} \quad x \neq 0;$$

2) $$\int\limits_0^{+\infty} t p_1(t)dt + \sum_{n=1}^{\infty} t_n p_2(t_n) < \infty.$$

Тоді система (1) *має нескінченну множину неосцилюючих розв'язків* $x(t)$, *для яких*

$$\varliminf_{t \to +0} |x(t)| > 0.$$

Доведення. Розглянемо довільні числа $H > 0$, $\varepsilon > 0$, $a > 0$ і $\tau \in \mathbb{R}_+ \setminus T$, для яких

$$a + \varepsilon \max_{|x| \leq H, \, i = \overline{1,2}} |f_i(x)| \leq H \tag{12}$$

і

$$\int_{\tau}^{t}(u-\tau)p_1(u)\,du+(t-\tau)\int_{t}^{+\infty}p_1(u)\,du+$$
$$+\sum_{u\in(\tau,t)\cap T}(u-\tau)p_2(u)+(t-\tau)\sum_{u\in(t,+\infty)\cap T}p_2(u)\le\varepsilon\quad\forall\,t\ge\tau. \tag{13}$$

Такі числа існують на підставі другої умови теореми і неперервності на $\mathbb{R}$ функцій $f_i(x)$, $i=\overline{1,2}$.

Покажемо, що система (1) має неосцилюючий розв'язок $y(t)$, який задовольняє умову

$$y(\tau)=a. \tag{14}$$

Розглянемо оператор $\mathfrak{A}: C^0([\tau,+\infty),\mathbb{R})\to C^0([\tau,+\infty),\mathbb{R})$, визначений рівністю

$$(\mathfrak{A}y)(t)=a+\int_{\tau}^{t}(u-\tau)p_1(u)f_1(y(u))\,du+(t-\tau)\int_{t}^{+\infty}p_1(u)f_1(y(u))\,du+$$
$$+\sum_{u\in(\tau,t)\cap T}(u-\tau)p_2(u)f_2(y(u))+(t-\tau)\sum_{u\in(t,+\infty)\cap T}p_2(u)f_2(y(u)),\quad t\ge\tau, \tag{15}$$

де $C^0([\tau,+\infty),\mathbb{R})$ — банахів простір неперервних і обмежених на $[\tau,+\infty)$ функцій $x(t)$ зі значеннями в $\mathbb{R}$ і нормою

$$\|x\|_{C^0}=\sup_{t\ge\tau}|x(t)|.$$

Цей оператор є неперевним оператором на підставі другої умови теореми і неперервності функцій $f_i(x)$, $i=\overline{1,2}$, на $\mathbb{R}$. Легко переконатися в тому, що кожний розв'язок $y(t)\in C^0([\tau,+\infty),\mathbb{R})$ рівняння

$$y(t)=(\mathfrak{A}y)(t),\quad t\ge\tau, \tag{16}$$

є розв'язком системи (1) і задовольняє умову (14).

Покажемо, що рівняння (16) має розв'язок $z(t)\in C^0([\tau,+\infty),\mathbb{R})$ і

$$a\le z(t)\le H\quad\forall\,t\ge\tau. \tag{17}$$

Розглянемо функції

$$q_m(t)=\begin{cases}1, & \text{якщо}\quad t\in[\tau,\tau+m),\\ \tau+m+1-t, & \text{якщо}\quad t\in[\tau+m,\tau+m+1),\\ 0, & \text{якщо}\quad t\ge\tau+m+1,\end{cases}\qquad m\in\mathbb{N},$$

множину D всіх функцій $z(t)\in C^0([\tau,+\infty),\mathbb{R})$, які задовольняють співвідношення (17), множину D_1 всіх рівностепенево неперервних на $[\tau,+\infty)$ функцій $z(t)\in D$ і неперервні оператори $\mathfrak{A}_m: C^0([\tau,+\infty),\mathbb{R})\to C^0([\tau,+\infty),\mathbb{R})$, визначені рівностями

$$(\mathfrak{A}_m y)(t)=(\mathfrak{A}q_m y)(t),\quad m\in\mathbb{N},\ t\ge\tau.$$

Оскільки для кожних функції $y(t)\in D$ і $m\in\mathbb{N}$

$$\sup_{t\in[\tau,+\infty)\setminus T}\left|\frac{d(\mathfrak{A}_m y)(t)}{dt}\right|\le\int_{\tau}^{+\infty}p_1(u)f_1(q_m(u)y(u))\,du+$$

$$+ \sum_{u\in(\tau,+\infty)\bigcap T} p_2(u) f_2(q_m(u)y(u)) \le$$

$$\le \left(\int_0^{+\infty} p_1(u)\,du + \sum_{k=1}^{\infty} p_2(t_k) \right) \max_{|x|\le H,\, i=\overline{1,2}} |f_i(x)| < \infty,$$

на підставі співвідношень (12) і (13)

$$\mathfrak{A}_m D \subset D_1 \quad \forall\, m\in\mathbb{N}.$$

Очевидно, D — опукла і замкнена підмножина простору $C^0([\tau,+\infty),\mathbb{R})$. Використовуючи теорему Арцела [16, с. 95] і теорему Шаудера–Тихонова про нерухому точку [17, с. 227], приходимо до висновку, що для кожного $m\in\mathbb{N}$ знайдуться функція $z_m(t)\in D_1$, для якої

$$(\mathfrak{A}_m z_m)(t) = z_m(t) \quad \forall\, t\ge\tau, \tag{18}$$

і функція $z^*(t)\in D$ та послідовність цілих чисел m_k, $k\in\mathbb{N}$, для яких

$$\lim_{k\to\infty} \max_{t\in[\tau,\tau+b]} \left| z^*(t) - z_{m_k}(t) \right| = 0 \quad \forall\, b>0. \tag{19}$$

З рівності (15), означення операторів $\mathfrak{A}_m$, $m\in\mathbb{N}$, другої умови теореми і неперервності на $[\tau,+\infty)$ функцій $f_i(x)$, $i=\overline{1,2}$, випливає

$$\lim_{k\to\infty} \max_{t\in[\tau,\tau+b]} \left| (\mathfrak{A}z^*)(t) - (\mathfrak{A}z_{m_k})(t) \right| = 0 \quad \forall\, b>0 \tag{20}$$

і

$$\lim_{k\to\infty} \max_{t\in[\tau,\tau+b]} \left| (\mathfrak{A}z_{m_k})(t) - (\mathfrak{A}_{m_k} z_{m_k})(t) \right| = 0 \quad \forall\, b>0. \tag{21}$$

Тому на підставі (18)–(21)

$$(\mathfrak{A}z^*)(t) = z^*(t) \quad \forall\, t\ge\tau,$$

тобто функція $z^*(t)$ є розв'язком рівняння (16), а отже, і розв'язком системи (1). Цей розв'язок задовольняє умову (14), що випливає з (15).

Оскільки чисел $a>0$, які задовольняють співвідношення (12), є нескінченно багато, то з урахуванням (14) і неосцилюючих розв'язків $y(t)$, для яких $a\le y(t)\le H$ $\forall\, t\ge\tau$ і, отже,

$$\varliminf_{t\to\infty} |y(t)| > 0,$$

є також нескінченно багато. Теорема 4 доведена.

3. Необхідні і достатні умови осциляції розв'язків.

Теорема 5. *Нехай:*

1) $$x f_i(x) > 0,\ i=\overline{1,2}, \quad \text{якщо} \quad x\ne 0;$$

2) $$\inf_{|x|>\varepsilon} \frac{|f_i(x)|}{|x|^\beta} > 0, \quad \sup_{|x|>\varepsilon} \frac{|f_i(x)|}{|x|^\beta} < \infty, \quad i=\overline{1,2},$$

для всіх $\varepsilon>0$, *де* $\beta>1$.

Тоді кожний розв'язок $x(t,t_0,x_1,x_2)$ *системи* (1), *для якого*

$$|x_1| + |x_2| \ne 0, \quad t_0\in\mathbb{R}_+\setminus T,$$

є осцилюючим тоді і тільки тоді, коли

$$\int_{\tau}^{+\infty} t p_1(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} t_n p_2(t_n) = +\infty.$$

Зформульоване твердження є наслідком теорем 1 і 4.

З теореми 5 та доведень теорем 1 і 4 випливає така теорема.

Теорема 6. *Нехай виконуються умови теореми* 5. *Тоді система* (1) *має неосцилюючі розв'язки* $x(t)$, *для яких*

$$\varliminf_{t\to+\infty} |x(t)| > 0,$$

тоді і тільки тоді, коли

$$\int_{\tau}^{+\infty} t p_1(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} t_n p_2(t_n) < \infty.$$

На закінчення відзначимо, що з доведених тверджень випливають відомі результати робіт [2–5] про осциляцію розв'язків диференціальних рівнянь. Зокрема, з теорем 1, 4 і 5 випливають ознаки Ф. Аткінсона [2] і П. Уілтмена [5], а з теорем 3 і 4 — ознаки Ш. Белогореца [4] і І. Бігарі [3].

1. *Sturm C.* Sur les equations differentielles lineares du second ordre // J. Math. Pure Appl. – 1836. – **1**. – P. 106–186.
2. *Atkinson F. V.* On second order nonlinear oscillations // Pacif. J. Math. – 1955. – **5**, № 1. – P. 643–647.
3. *Bihari I.* Oscillation and monotonicity theorems concerning nonlinear differential equations of the second order // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. – 1958. – **9**, № 1–2. – P. 83–104.
4. *Belohorec Š.* Oscilatorické riešnia istej nelineàrnej diferencialnej rownice druhého radu // Mat.-fyz. časop. – 1961. – **11**. – S. 250–255.
5. *Waltman P.* Oscillation of solutions of a nonlinear equation // SIAM Rev. – 1963. – **5**. – P. 128–130.
6. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси, 1975. – 352 с.
7. *Кондратьев В. А.* О колеблемости решений уравнения $y^{(n)} + p(x)y = 0$ // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1961. – **10**. – С. 419–436.
8. *Шевело В. Н.* Осцилляция решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – Киев: Наук. думка, 1978. – 155 с.
9. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 288 с.
10. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 311 с.
11. *Слюсарчук В. Е.* Ограниченные решения импульсных систем // Дифференц. уравнения. – 1983. – **19**, № 4. – С. 588–596.
12. *Роговченко Ю. В., Трофимчук С. И.* Ограниченные и периодические решения слабо нелинейных импульсных эволюционных систем // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 2. – С. 260–264.
13. *Bainov D. D., Kostadinov S. I., Myshkis A. D.* Bounded and periodic solutions of differential equations with impulse effect in Banach space // Differential and integral equations. – 1988. – **1**, № 2. – P. 223–230.
14. *Ушаков Р. П., Хацет Б. І.* Опуклі функції та нерівності. – Київ: Вища шк., 1986. – 112 с.
15. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука, 1966. – Т. 1. – 608 с.
16. *Колмогоров А. М., Фомін С. В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – Київ: Вища шк., 1974. – 456 с.
17. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1969. – 1072 с.

Получено 25.11.93