УДК 517. 5

В. Ф. Бабенко (Днепропетр. ун-т),
А. А. Лигун, доктора физ.-мат. наук (Днепродзержин. техн. ун-т)

ОБОБЩЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СВОЙСТВ СПЛАЙНОВ

We present some inequalities which are generalizations of the well-known inequalities for the norms of derivatives of periodic splines with minimum defect, perfect splines, and monosplines.

Одержані нерівності, що узагальнюють відомі нерівності для норм похідних періодичних сплайнів з мінімальним дефектом, ідеальних сплайнів та моносплайнів.

Пусть $\mathbb{I}$ обозначает $\mathbb{R}$ или $\mathbb{T}^1 := [0, 2\pi]$, $L_p(\mathbb{I})$ — пространство измеримых на $\mathbb{I}$ функций $f(t)$ с конечной нормой $\|f\|_{L_p(\mathbb{I})}$ и L_p^r $(r = 1, 2, \ldots)$ — множество всех функций f из $L_p(\mathbb{I})$, у которых $(r-1)$-тая производная $f^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна на $\mathbb{I}$ и $f^{(r)} \in L_p(\mathbb{I})$.

В случае $\mathbb{I} = \mathbb{T}^1$ вместо $L_p(\mathbb{I})$, $L_p^r(\mathbb{I})$ и $\|f\|_{L_p(\mathbb{I})}$ будем писать L_p, L_p^r и $\|f\|_p$ соответственно. При $p = \infty$ вместо $\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R})}$ также будем писать $\|f\|_\infty$.

Через $S_{2n,m}$ $(n, m \in \mathbb{Z})$ обозначим множество всех 2π-периодических сплайн-функций порядка m, минимального дефекта с узлами в точках $\mu\pi/n$ $(\mu \in \mathbb{Z})$, а через $\Gamma_{2n,m}$ обозначим множество всех совершенных 2π-периодических сплайнов порядка m с $2n$ узлами, т. е. множество всех функций $\gamma \in L_\infty^m$, для которых $|\gamma^{(m)}(t)| \equiv 1$, таких, что $\nu(\gamma^{(m)}) \le 2m$. Здесь и ниже $\nu(f)$ — число перемен знака функции f на периоде.

В теории приближений и, в частности, в задачах вычисления поперечников классов периодических функций важную роль играют неравенства (см., например, [1, с. 220, 248])

$$\frac{\|s^{(k)}\|_\infty}{\|\varphi_{n,m-k}\|_\infty} \le \frac{\|s\|_\infty}{\|\varphi_{n,m}\|_\infty} \quad (s \in S_{2n,m},\ k = 1, 2, \ldots, m), \tag{1}$$

$$\|\gamma\|_\infty \ge \|\varphi_{n,m}\|_\infty \quad (\gamma \in \Gamma_{2n,m}), \tag{2}$$

где при $\lambda > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ $\varphi_{\lambda,m}(t)$ есть m-й $(2\pi/\lambda)$-периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_{\lambda,0}(t) = \operatorname{sgn}\sin\lambda t$.

Хорошо известно имеющее многочисленные применения неравенство А. Н. Колмогорова [2, 3]: для $f \in L_\infty^m(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$, $k = 1, 2, \ldots, m$,

$$\|f^{(r)}\|_\infty \le \|\varphi_{1,m-k}\|_\infty \|\varphi_{1,m}\|_\infty^{(k/m)-1} \|f\|_\infty^{1-(k/m)} \|f^{(m)}\|_\infty^{k/m}. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть* $f \in L_\infty^m(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$ *и* $\varepsilon \in (0, 1)$,

$$A_\pm^\varepsilon(f) := \left\{ t \in \mathbb{R};\ \pm f^{(m)}(t) \ge \pm(1-\varepsilon)\|f^{(m)}\|_\infty \right\}. \tag{4}$$

Если для любого ε *хотя бы одно из множеств* $A_+^\varepsilon(f)$ *или* $A_-^\varepsilon(f)$ *содержит интервал длины* π/λ, *то*

$$\|f\|_\infty \ge \|\varphi_{\lambda m}\|_\infty \|f^{(m)}\|_\infty \tag{5}$$

и для $k = 1, 2, \ldots, m-1$

$$\|f\|_\infty \geq \|\varphi_{\lambda,m}\|_\infty \|\varphi_{\lambda,m-k}\|_\infty^{-1} \|f^{(k)}\|_\infty. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть (a, b) — интервал, о котором идет речь в условии теоремы. Тогда

$$\|f^{(m)}\|_\infty \leq \frac{1}{1-\varepsilon}\left|\int_a^b f^{(m)}(t)\,dt\right| \leq \frac{2}{1-\varepsilon}\|f^{(m-1)}\|_\infty.$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем $\|f^{(m)}\|_\infty \leq 2\|f^{(m-1)}\|_\infty$. Используя (3) при $k = m-1$, получаем

$$\frac{\pi}{\lambda}\|f^{(m)}\|_\infty \leq 2\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{\|s\|_\infty}{\|\varphi_{1,m}\|_\infty}\right)^{1/m} \|f^{(m)}\|_\infty^{1-1/m},$$

и следовательно,

$$\|f^{(m)}\|_\infty \leq \frac{\lambda^m \|f\|_\infty}{\|\varphi_{1,m}\|_\infty} = \frac{\|f\|_\infty}{\|\varphi_{\lambda,m}\|_\infty}.$$

Неравенство (5) доказано. Сопоставляя неравенства (3) и (5), получаем (6).

Если $s \in S_{2n,m}$, то L_∞-норма $s^{(m)}(t)$ достигается на некотором интервале длины $\geq \pi/n$, и из неравенства (6) мы получаем (1). Если $\gamma \in \Gamma_{2n,m}$, то $\|\gamma^{(m)}\|_\infty = 1$, $\nu(\gamma^{(m)}) \leq 2n$ (и следовательно, при любом $\varepsilon \in (0, 1)$, по крайней мере одно из множеств $A_+^\varepsilon(f)$ или $A_-^\varepsilon(f)$ содержит интервал длины $\geq \pi/n$) и из (5) получаем (2).

Через $S_{2\lambda,m}(\mathbb{R})$ обозначим множество определенных на $\mathbb{R}$ полиномиальных сплайнов порядка m минимального дефекта с узлами в точках x_μ ($\mu \in \mathbb{Z}$), таких, что $x_{\mu+1} - x_\mu \geq \pi/\lambda$ для всех $\mu \in \mathbb{Z}$.

***Следствие* 1.** *Для любого* $s \in S_{2\lambda,m}(\mathbb{R}) \cap L_\infty^m(\mathbb{R})$ *справедливо неулучшаемое неравенство*

$$\frac{\|s^{(k)}\|_\infty}{\|\varphi_{\lambda,m-k}\|_\infty} \leq \frac{\|s\|_\infty}{\|\varphi_{\lambda,m}\|_\infty}.$$

Пусть $\nu(f, [a, b])$ — число перемен знака функции f на отрезке $[a, b]$. Предел $\nu_c(f) = \lim\limits_{T\to\infty}(\pi/T)\nu(f, [-T, T])$, если он существует, будем называть средним числом перемен знака функции $f \in L_\infty(\mathbb{R})$.

Через $\Gamma_{\lambda,m}(\mathbb{R})$ обозначим множество функций $\gamma \in L_\infty^m(\mathbb{R})$ таких, что $|\gamma^{(m)}(t)| \equiv 1$, и $\nu_c(\gamma^{(m)}) \leq \lambda$ (ясно, что $\Gamma_{2n,m} \subset \Gamma_{2n,m}(\mathbb{R})$).

***Следствие* 2.** *Для любого* $\gamma \in \Gamma_{2\lambda,m}(\mathbb{R})$ *справедливо неулучшаемое неравенство* $\|\gamma\|_\infty \geq \|\varphi_{\lambda,m}\|_\infty$.

Из теоремы 1 и неравенств типа Колмогорова, доказанных в работах [4] и [5], нетрудно получить такое следствие.

***Следствие* 3.** *Пусть для функции* $f \in L_\infty^m$ *выполнены условия теоремы* 1 *при* $\lambda = n$. *Тогда*

$$\|f\|_\infty \geq \|\varphi_{n,m}\|_\infty \|\varphi_{n,m-k}\|_p^{-1} \|f^{(k)}\|_p, \quad p \in [1, \infty),$$

и

$$\|f\|_\infty \geq \|\varphi_{n,m}\|_\infty \|\tilde{\varphi}_{n,m-k}\|_1^{-1} \|\tilde{f}^{(k)}\|_1,$$

где $\tilde{f}$ *— функция, тригонометрически сопряженная с* f.

Пусть $\lambda, \alpha, \beta > 0$ и $m \in \mathbb{N}$. Через $\varphi_{\lambda,0}(t; \alpha, \beta)$ обозначим $(2\pi/\lambda)$-периодическую функцию, равную α для $t \in [0, 2\pi\beta/(\lambda(\alpha+\beta)))$ и равную $-\beta$ для $t \in [2\pi\beta/(\lambda(\alpha+\beta)), 2\pi/\lambda]$, а через $\varphi_{\lambda,m}(t; \alpha, \beta)$ — m-й $(2\pi/\lambda)$-периодический интеграл от $\varphi_{\lambda,0}(t; \alpha, \beta)$, имеющий на периоде нулевое среднее значение.

Из неравенства Хермандера [1, с. 58] (обобщающего неравенство Колмогорова (3)) очевидным образом следует

$$E(f^{(k)})_\infty \leq \frac{\left\|\varphi_{1,m-k}\left(\cdot; \|f_+^{(m)}\|_\infty, \|f_-^{(m)}\|_\infty\right)_\pm\right\|_\infty}{E\left(\varphi_{1,m}\left(\cdot; \|f_+^{(m)}\|_\infty, \|f_-^{(m)}\|_\infty\right)\right)_\infty^{1-k/m}} E(f)_\infty^{1-k/m}, \tag{7}$$

где $f_\pm(t) = \max\{\pm f(x), 0\}$ и $E(f)_\infty$ — наилучшее равномерное приближение f константой. Используя (7) при $k = m-1$, получаем

$$\left|\int_a^b f^{(m)}(t)\,dt\right| \leq 2E(f^{(m-1)})_\infty \leq$$

$$\leq 2\left\|\varphi_{1,1}\left(\cdot; \|f_+^{(m)}\|_\infty, \|f_-^{(m)}\|_\infty\right)\right\|_\infty \left(\frac{E(f)_\infty}{E\left(\varphi_{1,m}\left(\cdot; \|f_+^{(m)}\|_\infty, \|f_-^{(m)}\|_\infty\right)\right)_\infty}\right)^{1/m} =$$

$$= \frac{\pi\|f_+^{(m)}\|_\infty \|f_-^{(m)}\|_\infty}{E\left(f^{(m)}\right)_\infty} \left(\frac{E(f)_\infty}{E\left(\varphi_{1,m}\left(\cdot; \|f_+^{(m)}\|_\infty, \|f_-^{(m)}\|_\infty\right)\right)_\infty}\right)^{1/m}.$$

Теперь аналогично теореме 1 доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $f \in L_\infty^m(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$ *и множества* $A_\pm^\varepsilon(f)$ *определены равенствами* (4). *Если для любого* $\varepsilon \in (0, 1)$ *хотя бы одно из множеств* $A_+^\varepsilon(f)$ *или* $A_-^\varepsilon(f)$ *содержит интервал длины* λ_+ *или* λ_- *соответственно, то*

$$E(f)_\infty \geq E\left(\varphi_{1,m}\left(\cdot; \|f_+^{(m)}\|_\infty, \|f_-^{(m)}\|_\infty\right)\right)_\infty, \tag{8}$$

где

$$\lambda = \pi E\left(f^{(m)}\right)_\infty^{-1} \min\left\{\|f_+^{(m)}\|_\infty (\lambda_+)^{-1}, \|f_-^{(m)}\|_\infty (\lambda_-)^{-1}\right\}.$$

Следствие 4. *Если функция* $f \in L_\infty^m$ *такова, что* $\left\|\alpha^{-1} f_+^{(m)} + \beta^{-1} f_-^{(m)}\right\|_\infty \leq$ ≤ 1 *и множество* $\{t : f^{(m)}(t) = \alpha\}$ *содержит интервал длины* $2\pi\lambda/(n(\alpha+\beta))$ *или множество* $\{t : f^{(m)}(t) = -\beta\}$ *содержит интервал длины* $2\pi\lambda/(n(\alpha+$ $+\beta))$, *то* $E(f)_\infty \geq E(\varphi_{n,m}(\cdot; \alpha, \beta))_\infty$.

Через $\Gamma_{\lambda,m}(\alpha, \beta)$ обозначим множество 2π-периодических (α, β)-совершенных сплайнов порядка m с числом узлов $\le 2n$, т. е. множество функций $\gamma \in L_\infty^m$ таких, что $\alpha^{-1}\gamma_+^{(m)} + \beta^{-1}\gamma_-^{(m)} \equiv 1$ и $v(\gamma^{(m)}) \le 2n$. Кроме того, через $\Gamma_{\lambda,m}(\alpha, \beta; \mathbb{R})$ обозначим множество определенных на $\mathbb{R}$ (α, β)-совершенных сплайнов γ, имеющих среднее число перемен знака $\le \lambda$. Справедливо такое следствие.

Следствие 5. *Для любого* $\gamma \in \Gamma_{\lambda,m}(\alpha, \beta; \mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$ *выполняется неулучшаемое неравенство*

$$E(\gamma)_\infty \ge E(\varphi_{\lambda,m}(\cdot\,; \alpha, \beta))_\infty. \tag{9}$$

Для функций $\gamma \in \Gamma_{\lambda,m}(\alpha, \beta)$ неравенство (10) с $\lambda = n$ содержится в следствии 4.

Пусть $D_{n,k}(t)$ — $(k-1)$-й периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от $(2\pi/n)$-периодической функции $D_{n,1}(t)$, равной $t-(\pi/n)$ для $t \in (0, 2\pi/n)$.

Следующее утверждение нетрудно получить из теоремы 2 с помощью предельного перехода при $\beta \to \infty$.

Следствие 6. *Пусть функция* $f \in L_\infty^{m-1}$ *такова, что* $f^{(m-1)}$ *имеет ограниченную вариацию на периоде и для любых* $t_1 < t_2$ $f(t_2) - f(t_1) \le t_2 - t_1$. *Если для некоторой пары точек* t_2 *и* t_1, $t_2 - t_1 = 2\pi/n$ *будет* $f(t_2) - f(t_1) = 2\pi/n$ *или если найдется точка* t_0 *такая, что* $f(t_0 - 0) - f(t_0 + 0) \ge 2\pi/n$, *то*

$$E(f)_\infty \ge E(D_{n,m})_\infty. \tag{10}$$

Любая функция M вида

$$M(t) = \sum_{v=1}^{n} p_v D_{1,m}(t - t_v), \quad \sum_{v=1}^{n} p_v = 1, \tag{11}$$

т. е. любой моносплайн порядка m с неотрицательными коэффициентами удовлетворяет условиям следствия 6.

Один из приемов доказательств оценок снизу колмогоровских поперечников (см., например, [1, с. 265]) соболевских классов W_1^m периодических функций в пространстве L_1 состоит в следующем. Устанавливается, что для любого подпространства $H \subset L_1$ размерности $\le 2n$ найдется совершенный сплайн $\gamma \in \Gamma_{\lambda,m}$ такой, что $\gamma^{(m)} \perp H$, а затем с помощью теоремы двойственности для наилучших L_1-приближений (см., например, [1, с. 16]) и неравенства (2) получают нужную оценку. Что же касается „односторонних" поперечников [6, с. 230], а также естественно возникающих в связи с задачами наилучшего (α, β)-приближения [1, с. 10] „несимметричных" поперечников, то попытки получить для них оценки снизу аналогичным образом не привели и не могли привести к успеху, хотя неравенства типа (2), т. е. неравенство (9) для (α, β)-совершенных сплайнов и неравенство (10) для моносплайнов с неотрицательными коэффициентами имеют место. Дело в том, что существует $(n+1)$-мерное подпространство L_1 (можно считать, что оно состоит из непрерывных функций), на котором не будет точной ни одна квадратурная формула с n узлами [6, с. 28].

Нетрудно также показать, что при $\beta > 1$ и достаточно больших n найдется подпространство $H \subset L_1$ размерности $2n-1$ такое, что для любого $\gamma \in \Gamma_{\lambda,m}(1, \beta)$ ортогональность $\gamma^{(m)} \perp H$ не имеет места.

Множество функций, удовлетворяющих условиям следствия 4, значительно шире, чем $\Gamma_{2n,m}(\alpha, \beta)$, и можно надеяться, что для любого подпространства $H \in L_1$ $(\dim H = 2n-1)$ в нем уже найдется функция, ортогональная H. Это в сочетании со следствием 4 позволило бы получить оценку снизу для „несимметричных" поперечников, совпадающую с известной оценкой сверху [7]. Аналогичные соображения позволяют надеяться на получение оценок снизу „односторонних" поперечников с помощью следствия 6.

В дальнейшем мы считаем, что $\theta = \theta(K) = 1$, если $K \perp 1$, и $\theta = 0$ в противном случае.

Непрерывную на $(0, 2\pi)$ 2π-периодическую функцию $K(t)$ называют ядром, не увеличивающим осцилляцию (CVD-ядром), если для любых $\varphi \perp \theta$ и $a \in \mathbb{R}$ $v(a \cdot \theta + K * \varphi) \le v(\varphi)$, где $K * \varphi$ — свертка функций K и φ.

Теорема 3. *Пусть* $n \in \mathbb{N}, \alpha, \beta > 0$ *и* $K \in CVD$. *Пусть также функция* φ, $\varphi \perp \theta$, *такова, что множество* $\{x: \varphi(x) = \alpha \| \varphi \|_{\infty\, 1/\alpha,\, 1/\beta}\}$ *содержит интервал длины* $2\pi\beta / (n(\alpha + \beta))$ *или множество* $\{x: \varphi(x) = \beta \| \varphi \|_{\infty\, 1/\alpha,\, 1/\beta}\}$ *содержит интервал длины* $2\pi\alpha / (n(\alpha + \beta))$. *Тогда при* $\theta = 0$ *выполняется по крайней мере одно из двух неравенств*

$$\| K * \varphi \|_\infty \ge \| (K * \varphi_{n,0}(\cdot\,; \alpha, \beta))_\pm \|_\infty \| \varphi \|_{\infty\, 1/\alpha,\, 1/\beta},$$

и если $\alpha = \beta = 1$, *то* $\| K * \varphi \|_\infty \ge \| K * \varphi_{n,0} \|_\infty \| \varphi \|_\infty$. *При* $\theta = 1$ *справедливо неравенство*

$$E(K * \varphi)_\infty \ge E(K * \varphi_{n,0}(\cdot\,; \alpha, \beta))_\infty \| \varphi \|_{\infty\, 1/\alpha,\, 1/\beta}.$$

Из теоремы 3 очевидным образом выводятся утверждения, аналогичные следствиям 1–6.

1. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев: Наук. думка, 1992. – 304 с.
2. *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных на бесконечном интервале // Уч. зап. Моск. ун-та. Математика. – 1939. – **30**. – С. 3–16.
3. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976, – 320 с.
4. *Лигун А. А.* О неравенствах между нормами производных периодических функций // Мат. заметки. – 1983. – **33**, № 3. – С. 385–391.
5. *Бабенко В. Ф.* Точные неравенства для норм сопряженных функций и их применение // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 2. – С. 139–144.
6. *Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г.* Аппроксимация с ограничениями. – Киев: Наук. думка, 1982. – 250 с.
7. *Бабенко В. Ф.* Несимметричные приближения в пространствах суммируемых функций // Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 4. – С. 409–416.

Получено 15.02.93