УДК 517. 929. 7

І. І. Антипко, канд. фіз.-мат. наук (Харк. ун-т),
Н. О. Семенова, (Харк. автомоб.-дорож. ін-т)

ПРО КРАЙОВУ ЗАДАЧУ НА НЕСКІНЧЕННОМУ ШАРІ

Necessary and sufficient conditions are found for the nonlocal boundary-value problem for the equation

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u(x+h_1,t)}{\partial t} + Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x+h_2,t) = 0,$$

on an infinite layer, where $P(s)$ and $Q(s)$ are polynomials in $s \in \mathbb{C}^m$ with constant coefficients, to have infinite type and be degenerate.

Встановлюются необхідні і достатні умови того, що нелокальна двоточкова крайова задача в нескінченному шарі для рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u(x+h_1,t)}{\partial t} + Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x+h_2,t) = 0,$$

$P(s)$ і $Q(s)$ — поліноми зі сталими коефіцієнтами відносно $s \in \mathbb{C}^m$, має нескінчений тип і являється виродженою.

Крайовим задачам на нескінченному шарі для лінійних рівнянь з частинними похідними присвячено ряд робіт (див., наприклад, [1–3] та ін.). В цих роботах, зокрема, вивчається питання про єдиність розв'язку відповідних задач. На відміну від задачі Коші, для якої класи єдиності визначаются однією характеристикою — її зведеним порядком, — класи єдиності розв'язку крайової задачі на шарі залежать також від розташування многостатності нулів деякої цілої функції $\Delta(s)$, яка може бути побудована за виглядом рівняння і крайових умов. При цьому, якщо $\Delta(s)$ не має нулів (тоді задача називається крайовою задачею *нескінченного типу*), то розв'язок цієї задачі єдиний в класах функцій, які ростуть на нескінченності з порядком, більшим 1. В другому крайньому випадку, коли $\Delta(s) \equiv 0$, задача називається *виродженою*; в цьому випадку є експоненціально спадні розв'язки однорідної задачі.

В данній роботі вказуються в термінах даних задачі необхідні і достатні умови для того, щоб крайова задача

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u(x+h_1,t)}{\partial t} + Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x+h_2,t) = 0, \tag{1}$$

$$A_1 u_0(x) + A_2 u_T(x) = 0 \tag{2}$$

мала нескінченний тип та була виродженою. Тут $x \in \mathbb{R}^m$, $t \in [0, T]$, $|h_1|^2 + |h_2|^2 > 0$, $P(s)$ і $Q(s)$ — поліноми відносно s зі сталими комплексними коефіцієнтами $u_0(x) = (u(x,0), u_t'(x,0))$, $u_T(x) = (u(x,T), u_t'(x,T))$, A_1 і A_2 — квадратні матриці, ранг матриці $A = (A_1, A_2)$ дорівнює 2. При цьому

$$\Delta(s) = \exp\left\{-\frac{TP(-is)e^{-ish_1}}{2}\right\}\left\{A_{12}\exp\left\{\frac{TP(-is)e^{-ish_1}}{2}\right\} + \right.$$

$$\left. + A_{34}\exp\left\{-\frac{TP(-is)e^{-ish_1}}{2}\right\} + (A_{14} - A_{23})\operatorname{ch}^{TD(-is)/2} + \right.$$

$$+ \left[2A_{24}Q(-is)e^{-ish_2} + 2A_{13} - (A_{23}+A_{14})P(-is)e^{-ish_1}\right] \frac{\operatorname{sh}(TD(-is)/2)}{D(-is)}\Bigg\}, \quad (3)$$

якщо $D(-is) \neq 0$.

$$\Delta(s) = \exp\left\{-\frac{TP(-is)e^{-ish_1}}{2}\right\}\left\{A_{12}\exp\left\{\frac{TP(-is)e^{-ish_1}}{2}\right\} + \right.$$

$$+ A_{34}\exp\left\{-\frac{TP(-is)e^{-ish_1}}{2}\right\} + A_{24}TQ(-is)e^{-ish_2} + A_{14} -$$

$$\left. - A_{23} + A_{13}T - (A_{23}+A_{14})\frac{TP(-is)e^{-ish_1}}{2}\right\}, \quad (3')$$

якщо $D(-is) = 0$, де

$$D(-is) = \sqrt{P^2(-is)e^{-2ish_1} - 4Q(-is)e^{-ish_2}},$$

A_{jk}, $j = 1, 2;$ $k = \overline{1,4}$, — мінори II порядку матриці A.

Виявилось, що вигляд крайових умов (2) для крайових задач нескінченного типу і вироджених крайових задач залежить від співвідношень між $|h_1|$ та $|h_2|$ і від властивостей поліномів $P(s)$ та $Q(s)$.

Теорема 1. *Нехай* $2|h_1| \neq |h_2|$ *і* $Q(s) \not\equiv 0$ *або* $P(s) \not\equiv P$ *при* $h_1 = 0$. *Тоді для того щоб крайова задача* (1), (2) *мала нескінченний тип, необхідно і достатньо, щоб вона була задачею Коші.*

Теорема 2. *Нехай* $2|h_1| = |h_2|$. *Тоді для того щоб крайова задача* (1), (2) *мала нескінченний тип, необхідно і достатньо, щоб вона була задачею Коші або задачею Діріхле.*

Теорема 3. *Нехай виконані умови теорем* 1 *або* 2. *Тоді крайова задача* (1), (2) *не може бути виродженою.*

Теорема 4. *Нехай* $h_1 = 0$, $|h_2| > 0$, $P(s) \equiv \mathrm{const} = P$, $Q(s) \not\equiv \mathrm{const}$. *Тоді крайова задача* (1), (2) *має нескінченний тип тоді і тільки тоді, коли крайові умови зводяться до вигляду**

$$au(x,0) - bu(x,T) = 0,$$

$$aPu(x,0) + a\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} + b\frac{\partial u(x,T)}{\partial t} = 0, \quad a^2 \neq b^2 e^{-TP}.$$

Теорема 5. *Нехай виконані умови теореми* 4. *Тоді крайова задача* (1), (2) *може бути виродженою тоді і тільки тоді, коли крайові умови* (2) *зводяться до вигляду* (4) $a^2 = b^2 e^{-TP}$.

Теорема 6. *Нехай* $Q(s) \equiv 0$, $|h_1| > 0$, $P(s) \not\equiv \mathrm{const}$. *Тоді крайова задача* (1), (2) *має нескінченний тип тоді і тільки тоди, коли крайові умови* (2) *зводяться до вигляду*

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0,$$

$$au(x,0) - bu(x,T) + c\frac{\partial u(x,T)}{\partial t} = 0, \quad a \neq b,$$

або

$$\frac{\partial u(x,T)}{\partial t} = 0,$$

*Крайові умови (2) з матрицею A можуть бути зведені до того ж вигляду з матрицею $B = (B_1, B_2)$, якщо існує невироджена квадратна матриця C така, що $B = CB$.

$$au(x,0) + c\frac{\partial u(x,T)}{\partial t} - bu(x,T) = 0, \quad a \neq b.$$

Теорема 7. *Нехай виконані умови теореми* 6. *Тоді крайова задача* (1), (2) *може бути виродженою тоді і тільки тоді, коли крайові умови* (2) *зводяться до вигляду*

$$a[u(x,0)-u(x,T)] + b\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0,$$

$$c[u(x,0)-u(x,T)] + d\frac{\partial u(x,T)}{\partial t} = 0,$$

$$a^2+b^2 \neq 0, \; c^2+d^2 \neq 0, \; b^2+d^2 \neq 0.$$

Доведення теорем 1, 2, 4, та 6 у випадку $m = 1$ [4] грунтується на використанні фактів теорії цілих функцій цілком регулярного зростання [5, 6], а теорем 3, 5 та 7 [7] — на дослідженні поведінки деяких аналітичних і алгебраїчних функцій при $s \to \infty$.

Перейдемо до випадку $s \in \mathbb{C}^m$. Достатність умов теорем 1, 2, 4–7 зрозуміла, оскільки з крайових умов, наведених у кожній з теорем, випливає, що функція $\Delta(s)$ або не має нулів (теореми 1, 2, 4, 6), або тотожньо дорівнює нулю (теореми 5 та 7).

Для доведення необхідності умов теорем 1, 2, 4–7 і теореми 3 зводимо розгляд до випадку $m = 1$. Фіксуючи $s^0 \in \mathbb{C}^m$ і покладаючи $s = s^0 z$, одержуємо, що при $z \in \mathbb{C}^1$ $\Delta_1(z) = \Delta(s^0 z) \neq 0$ для крайової задачі (1), (2) нескінченного типу і $\Delta_1(z) \equiv 0$ для виродженої крайової задачі. При цьому функція $\Delta_1(z)$, $z \in \mathbb{C}^1$, в силу (3) та (3′) виражається через значення експонент $\exp\{-iz\gamma_1\} \equiv \equiv \exp\{-is^0 z h_1\}$ і $\exp\{-iz\gamma_2\} \equiv \exp\{-is^0 z h_2\}$ та поліномів $P_1(z) \equiv P(s^0 z)$ і $Q_1(z) \equiv Q(s^0 z)$ за тими ж формулами, за якими $\Delta(s)$ виражається через $\exp\{-ish_1\}$, $\exp\{-ish_2\}$, $P(s)$ і $Q(s)$. Покажемо як ми вибираємо s^0. Нехай

$$h_1 = \sum_{j=1}^{m} h_{j,1} e_j, \quad h_2 = \sum_{r=1}^{m} h_{r,1} e_r,$$

$$|h_1| = \max_{1 \le j \le m} |h_{j,1}| = |h_{j_0,1}|, \quad |h_2| = |h_{r_0,2}|,$$

$s^0 = \sigma e_k$, де $\sigma = \max\{|h_{j_0,1}|, |h_{r_0,2}|\}$, а $k = j_0$, якщо $|h_{j_0,1}| \ge |h_{r_0,2}|$, $k = r_0$, якщо $|h_{j_0,1}| \le |h_{r_0,2}|$.

1. *Борок В. М.* Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений // Мат. сб. – 1969. – **79**, № 3. – С. 293–304.
2. *Віленць І. Л.* Класи єдиності розв'язку загальної крайової задачі в шарі для систем лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних // Допов. АН УРСР. – 1974. – Сер. А, №3. – С. 195–197.
3. *Макаров А. А.* Класы корректной разрешимости общей краевой задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений в свертках// Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1979. – Вып. 31. – С. 86–90.
4. *Антыпко И. И, Дягилева Т. И., Зельдес И. И.* Краевые задачи бесконечного типа для некоторых дифференциально-разностных уравнений. – Киев, 1988. – 29 с.— Деп. в УкрНИИНТИ 621 (Ук-88).
5. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций – М: Физматгиз, 1956. – 632 с.
6. *Титчмарш Е.* Теория функций. – М: Наука, 1980. – 463 с
7. *Антыпко И. И, Видлянская Э. О.* Вырожденная нелокальная краевая задача для некоторых дифференциально-разностных уравнений. – М., 1989. – 18 с. – Деп. в ВИНИТИ № 6797–889.

Одержано 26.02.93