УДК 517.53

В. А. Зморович, И. К. Коробкова, А. А. Якубенко

О некоторых свойствах регулярных однолистных звездных в круге функций

В настоящей работе введен новый подкласс ограниченных однолистных звездных в круге функций и получены для него некоторые точные оценки. Кроме того, решена задача о границе α-выпуклости класса $S_\beta^*(m)$ в исключительном случае при $\alpha < 0$ и $\beta < 1/2^{1/2} + 1$.

1. Пусть $0 < \delta < 1$,

$$F(z, \delta) = [1 - (1 - z)^\delta]/\delta, \ K(z, \delta) = z \exp[2^{1-\delta} F(z, \delta)] \tag{1}$$

и положим

$$f(z) = z \exp\left\{2^{1-\delta} \int\limits_0^{2\pi} F[z \exp(-i\varphi), \delta]\, d\mu(\varphi)\right\}, \tag{2}$$

где $\mu(\varphi)$ — неубывающая на $[0, 2\pi]$ функция, нормированная условием $\mu(2\pi) - \mu(0) = 1$. Класс таких функций $\mu(\varphi)$ обозначим через $M[0, 2\pi]$. Когда $\mu(\varphi)$ пробегает класс $M[0, 2\pi]$, функция $f(z)$ пробегает некоторый класс регулярных в круге $|z| < 1$ функций, нормированных условиями $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Этот класс обозначим через Q_δ. Из (2) следует

$$zf'(z)/f(z) = \int\limits_0^{2\pi} S[z \exp(-i\varphi), \delta]\, d\mu(\varphi), \tag{3}$$

где

$$S(z, \delta) = 1 + 2^{1-\delta} z/(1 - z)^{1-\delta}. \tag{4}$$

При $\delta = 0$ функция (4) превращается в ядро известной формулы Рисса—Херглотца для регулярных в $E\ (z : |z| < 1)$ функций $p(z)$ с положительной вещественной частью, нормированных условием $p(0) = 1$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Формула (2) определяет класс Q_δ регулярных в круге E ограниченных звездных функций, нормированных условиями $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Для функций класса Q_δ верны точные оценки* ($r = |z|$)

$$-K(-r, \delta) \leqslant |f(z)| \leqslant K(r, \delta) \leqslant \exp(2^{1-\delta}/\delta) \tag{5}$$

$$K'(-r, \delta) \leqslant |f'(z)| \leqslant K'(r, \delta). \tag{6}$$

Пусть $f(z) = z + \sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k z^k$, $K(z, \delta) = z + \sum\limits_{k=2}^{\infty} A_k z^k$; *тогда*

$$|a_k| \leqslant A_k, \quad k = 2, 3, \ldots. \tag{7}$$

Для доказательства оценок (5) достаточно заметить, что функция $F(z, \delta)$ однолистна и выпукла в круге E, так что $F(-r, \delta) \leqslant \operatorname{Re} F(z, \delta) \leqslant F(r, \delta)$. Затем, полагая $z = r \exp(i\varphi)$, получаем ($\gamma = 1 - \delta$) $\partial/\partial\varphi\, \{\operatorname{Re}[z/(1 - z)^\gamma]\} = -\operatorname{Im}[(1 - \gamma) z/(1 - z)^\gamma + \gamma z/(1 - z)^{1+\gamma}]$. Т. к. $\operatorname{Im}[z/(1 - z)^\lambda] > 0$ при $0 \leqslant \lambda \leqslant 2$, $|z| = r < 1$, $0 < \varphi < \pi$, то $\partial/\partial\varphi\, \{\operatorname{Re}[z/(1 - z)^\gamma]\} < 0$ на интервале $0 < \varphi < \pi$. Следовательно, $-r/(1 + r)^\gamma \leqslant \operatorname{Re}[z/(1 - z)^\gamma] \leqslant r/(1 - r)^\gamma$, $|z| = r$, $0 < r < 1$. Нетрудно показать, что отсюда следует

$$1 - 2^\gamma r/(1 + r)^\gamma \leqslant |S(z, \delta)| \leqslant 1 + 2^\gamma r/(1 - r)^\gamma. \tag{8}$$

Кроме того,

$$1 - 2^\gamma r/(1 + r)^\gamma \leqslant \operatorname{Re} S(z, \delta) \leqslant 1 + 2^\gamma r/(1 - r)^\gamma. \tag{9}$$

Поскольку

$$|f'(z)| = \exp\left\{2^{\gamma}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} F[z\exp(-i\varphi), \delta]\, d\mu(\varphi)\right\}\left|\int_0^{2\pi} S[z\exp(-i\varphi), \delta]\, d\mu(\varphi)\right|, \tag{10}$$

то из (8)—(10) получаем оценку (6).

Оценка (7) — следствие легко доказываемого утверждения: если $1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k = \exp\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ и $1 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k = \exp\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|\, z^k$, то $|a_1| = A_1$, $|a_k| \leqslant A_k$, $k = 2, 3, \ldots$.

Сделаем некоторые замечания относительно ядра $S(z, \delta)$ интегральной формулы

$$p(z) = \int_0^{2\pi} S[z\exp(-i\varphi), \delta]\, d\mu(\varphi),\ \ \mu(\varphi) \in M[0, 2\pi], \tag{11}$$

играющей в данном случае роль формулы Рисса—Херглотца и в пределе при $\delta \to 0$ $(\delta > 0)$ превращающейся в нее.

Функция $W = S(z, \delta)$ при $\delta = 0$ и $\delta = 1$ однолистна и выпукла в E, а при остальных значениях $\delta \in [0, 1]$ однолистна и отображает круг E на звездные (не выпуклые) относительно точки $W = 1$ области W-плоскости. Радиус выпуклости этого отображения определяется формулой $r_0 = [1 + T(\gamma)]^{-1/2}$, где $\gamma = 1 - \delta$, $T(\gamma) = \gamma^{1/2}(2 - 3\gamma + \gamma^2)/2\,[2(1+\gamma)^{1/2} + 3\gamma^{1/2}]$.

Существенным свойством формулы (11) является неограниченность в E некоторых определяемых ею функций $p(z)$, порождающих функции класса Q_δ с неограниченной в E производной. Из [1] известен только один класс ограниченных звездных функций в E с таким же свойством определяющей его простой структурной формулы.

Заметим, что при $0 < \lambda < 1$ формула

$$f(z) = z\exp\left\{2^{1-\delta}\lambda\int_0^{2\pi} F[z\exp(-i\varphi), \delta]\, d\mu(\varphi)\right\},$$

где $\mu(\varphi)$ и $F(z, \delta)$ те же, что в (1) и (2), тоже определяет некоторый класс ограниченных звездных в E функций, в пределе при $\lambda \to 1$ превращающийся в класс Q_δ. Можно считать $\lambda = \lambda(\delta)$, где $\lambda(\delta) \to 1$ при $\delta \to 0$. Тогда получим классы ограниченных звездных в E функций, в пределе при $\delta \to 0$ превращающихся в весь класс S^*.

Можно взять $\delta \sim \delta(\varphi)$, где $0 < \delta \leqslant \delta(\varphi) < 1$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Тогда

$$f(z) = z\exp\left\{\int_0^{2\pi} 2^{1-\delta(\varphi)} F[z\exp(-i\varphi), \delta]\, d\mu(\varphi)\right\}.$$

При $\delta(\varphi) \equiv \delta$ имеем предыдущую структурную формулу (2).

2. Приведем решение задачи о границе α-выпуклости порядка $\gamma < 1$ класса $S_\beta^*(m)$, $0 \leqslant \beta < 1$, целое число $m \geqslant 1$.

Этот случай в работе [2] охарактеризован условиями $\alpha < 0$, $0 \leqslant h < 1/2^{1/2}$, $\theta < 1/(1 + h$, $\gamma < 1$, где $h = \beta/(1 - \beta)$, $\theta = m\,|\alpha|/2$. В остальных случаях эта задача (см. библиографию в [2], [3]) решена.

Предпошлем формулировке окончательных результатов некоторые разъяснения.

Условие $f(z) \in S_\beta^*(m)$ равносильно представлению

$$zf'(z)/f(z) = [p(z) + h]/(1 + h),\ \ f(0) = 0,\ \ f'(0) = 1, \tag{12}$$

где $p(z) \in P(m)$, т. е. классу регулярных в круге $E\ (z : |z| < 1)$ функций, удовлетворяющих там условиям $p(0) = 1$, $\operatorname{Re} p(z) > 0$, $p(\varepsilon z) = p(z)$, где $\varepsilon = \exp(2\pi i/m)$. Вводя обозначение

$$I(f; \alpha) = (1 - \alpha)\, zf'(z)/f(z) + \alpha\,[1 + zf''(z)/f'(z)], \tag{13}$$

положим
$$l(r) = \min \operatorname{Re} I(f; \alpha), \tag{14}$$
когда $f(z)$ пробегает класс $S_\beta^*(m)$, а $r = |z| < 1$ фиксировано. Требуется найти r из уравнения
$$l(r) = \gamma, \tag{15}$$
где γ задано и меньше 1. Поскольку $l(r)$ монотонно убывает от 1 до $-\infty$ при $r \uparrow 1$, то уравнение (15) имеет единственный корень $r_\alpha(\gamma)$ при каждом $\gamma < 1$. Это и есть искомая граница или радиус α-выпуклости порядка γ класса $S_\beta^*(m)$. При $\alpha = 1$ получаем границу обычной выпуклости порядка γ.

Исходя из (12) и применяя теорему 2 из [4], получаем точное неравенство
$$\operatorname{Re} I(f; \alpha) \geqslant F(R, \vartheta) = [(1/(1+h) - \theta) R + \theta (1 - h^2)/R -$$
$$- 2(a + h)\theta] \cos\vartheta + \theta R + \theta(h^2 + 2ah + 1)/R + 2\theta h, \tag{16}$$
рассматриваемое в круге K_r
$$R^2 - 2(a+h) R \cos\vartheta + h^2 + 2ah + 1 \leqslant 0, \tag{17}$$
где R и ϑ — полярные координаты на плоскости с полюсом в начале координат. Здесь $a - \rho + h \leqslant R \leqslant a + \rho + h$, $a = (1 + r^{2m})/(1 - r^{2m})$, $\rho = 2r^m/(1 - r^{2m})$.

Минимум функции $F(R, \vartheta)$ в круге K_r и есть $l(r)$. Из формулы для $F(R, \vartheta)$ нетрудно установить, что $l(r)$ реализуется либо на диаметре круга K_r, лежащем на вещественной оси ($\vartheta = 0$), либо на окружности этого круга. Первый случай назовем нормальным, второй — исключительным. Рассматриваемая задача решена в нормальном случае.

Для исключительного случая удалось уточнить его границы следующим образом:
$$0 \leqslant h < 1/2^{1/2},\ \alpha < 0,\ 2\theta(1 + h) < 1 - h/(1 - h^2)^{1/2},$$
$$h/(1+h) + \theta h < \gamma < 1, \quad \theta = m|\alpha|/2. \tag{18}$$

Эти данные получаются из анализа функции $F(R, \vartheta)$ при $\vartheta = 0$ и при $\vartheta = \vartheta^*$, где $\cos\vartheta^* = (R^2 + h^2 + 2ah + 1)/2(a+h)R$. Задача сводится к отысканию минимального значения $a > 1$, которое удовлетворяет хотя бы одному из уравнений $F(R, 0) = \gamma$, $F(R, \vartheta^*) = \gamma$ при $R > 0$.

Введем обозначения: $A = 1/2\theta_1$, $B = 1 + Ch - h^2$, $C = [h - (1+h)\gamma_1]/2\theta_1$, $h_1 = \theta_1 h(1 - h^2)/\gamma_2$, $\gamma_1 = \gamma - 2\theta h$, $\theta_1 = \theta(1+h)$, $\gamma_2 = \gamma(1+h) - h(1 + \theta_1)$, $A_1 = (1 - \theta_1)/2\gamma_2$, $B_1 = [\theta_1(1 - h^2)^2 + (1 - h^2)h_1 + (1 - \theta_1)h_1^2]/2\gamma_2$, $C_1 = [1 - h^2 + h_1(1 - \theta_1)]/2\gamma_2$. На основании (18) имеем: $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, $0 < \theta_1 < 1/2$, $0 \leqslant h \leqslant 1/2^{1/2}$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть*
$$\sigma = \lambda(R) = AR + B/(R - h) + C, \tag{19}$$
$$\sigma = \mu(R) = A_1R^2 + B_1/(R^2 - h_1) + C_1,\ \Phi(\sigma, R) = (2\sigma - R - h)(R - h), \tag{20}$$
где σ *и* R *— декартовы координаты на плоскости и* $\sigma > 0$, $R > 0$.

Тогда, если $M_1(\sigma_1, R_1)$ *— точка на кривой (19), принадлежащая выпуклой области* Ω, *определяемой неравенством* $\Phi(\sigma, R) \geqslant 1$, *и обладающая наименьшей абсциссой, а* $M_2(\sigma_2, R_2)$ *— аналогичная точка на кривой (20), то при* $\sigma_0 = \min(\sigma_1, \sigma_2)$ *получим, что* $r_\alpha(\gamma) = [(\sigma_0 - 1)]/(\sigma_0 + 1)]^{1/2m}$, *причем* $r_\alpha(\gamma)$ *— искомый радиус* α*-выпуклости порядка* γ *класса* $S_\beta^*(m)$.

Доказательство этой теоремы непосредственно следует из того факта, что кривые (19) и (20) появляются при отыскании наименьших значений параметра $a = (1 + r^{2m})/(1 - r^{2m})$, при которых уравнение $F(r, \vartheta) = \gamma$ удовлетворяется на диаметре круга K_r, лежащем на вещественной оси, и на окружности этого круга. Затем остается отождествить σ с a в области Ω. Точки M_1 и M_2 на кривых (19) и (20) определяются следующим образом. Легко убедиться, что на кривой (20) при указанных условиях всегда, а на кривой (19) — при условии $B > 0$, существует одна и только одна точка, обладающая наименьшей положительной абсциссой. Если координаты этой точки обозначить через σ^* и R^*, то при условии $\Phi(\sigma^*, R^*) \geqslant 1$ эта точка и будет искомой. Если же $\Phi(\sigma^*, R^*) < 1$, то искомая точка определяется пересечением кривой с границей области Ω, т. е. определяется для кривой (19) из системы $\sigma = \lambda(R)$, $\Phi(\sigma, R) = 1$, а для кривой (20) — из системы $\sigma = \mu(R)$, $\Phi(\sigma, R) = 1$. Выпуклость области Ω существенно облегчает вычисления. Окончательных формул не приводим, так как они громоздки.

Таким образом, имеем пример дальнейшего развития метода выпуклой области, а именно — использование двух конкурирующих кривых, из которых одна — гипербола, а вторая — кривая 4-го порядка, напоминающая кое в чем ветвь гиперболы.

1. *Зморович В. А.* О структурных формулах некоторых классов однолистных функций.— Докл. АН СССР, 1950, 72, № 5, с. 833—836.
2. *Зморович В. А., Якубенко А. О.* Про границю α-опуклості порядку γ класу $S_\beta^*(m)$.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1981, № 10, с. 6—8.
3. *Сижук П. И., Черников В. В.* Радиус α-выпуклости порядка β для класса звездных функций порядка γ.— В кн.: Экстремальные задачи теории функций. Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та, 1979, с. 49—58.
4. *Зморович В. А.* Про деякі теореми теорії екстремальних оцінок в спеціальних класах аналітичних функцій.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1965, № 8, с. 980—981.

Киевский
политехнический институт

Поступила в редакцию
30.12.81