УДК 517. 5

Н. А. Давыдов, д-р физ.-мат. наук (Киев. пед. ин-т)

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ, ПРИ КОТОРЫХ ИЗ СУММИРУЕМОСТИ ЧИСЛОВОГО РЯДА СЛЕДУЕТ ЕГО СХОДИМОСТЬ

By using the concepts of a (C)-point and a $(\overline{R}, p)$-point of a sequence of complex numbers, introduced by the author, and the results obtained by him, necessary and sufficient conditions are formulated for summability of a number series by a positive Cesaro method or a Riesz method to imply the convergence of this series. A sufficient condition is given for the summability to imply the convergence of the subsequence of its partial sums.

На основі введених автором раніше понять (C)- і $(\overline{R}, p)$-точки послідовності комплексних чисел і одержаних ним результатів сформульовані необхідні і достатні умови того, щоб із сумовності числового ряду яким-небудь додатним методом Чезаро або методом Ріса випливала збіжність цього ряду, і достатня умова того, щоб із сумовності ряду цими методами випливала збіжність підпослідовності його частинних сум.

1. В работах [1, 2] было введено понятие (C)-точки последовательности комплексных чисел (S_n) и доказана следующая теорема A_1.

Конечный частичный предел B последовательности (S_n), $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, комплексных чисел мы назвали (C)-точкой этой последовательности, если для числа $\varepsilon > 0$ найдутся число $\lambda(\varepsilon) > 1$ и две возрастающие последовательности $(n_k(\varepsilon))$ и $(m_k(\varepsilon))$ натуральных чисел такие, что $|S_n - B| \le \varepsilon$ для $n_k \le n \le m_k < n_{k+1}$, $m_k / n_k \ge \lambda > 1$, $k = 1, 2, \ldots$.

Бесконечно удаленную точку комплексной плоскости мы назвали бесконечно удаленной (C)-точкой последовательности (S_n) комплексных чисел, если существует число $\lambda > 1$, две возрастающие последовательности (n_k) и (m_k) натуральных чисел и последовательность (G_k) замкнутых выпуклых множеств комплексной плоскости, расстояние которых от начала координат стремится к ∞ при $k \to \infty$, такие, что $S_n \in G_k$ для $n_k \le n \le m_k < n_{k+1}$, $m_k / n_k \ge \lambda > 1$, $k = 1, 2, \ldots$.

Теорема A_1. *Если последовательность комплексных чисел* (S_n) *или, что одно и то же, ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{1}$$

с частными суммами $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *суммируется к числу* S *каким-нибудь методом Чезаро порядка* $\alpha > 0$ *(*(C, α)*-методом) и если точка* B *является* (C)*-точкой этой последовательности, то* $S = B$.

Если бесконечно удаленная точка является (C)*-точкой последовательности* (S_n), *то средние Чезаро всех порядков* $\alpha > 0$ *неограничены.*

Приведем следствие из этой теоремы.

***Следствие* 1.** *Если последовательность* (S_n) *имеет две различные* (C)*-точки, то такая последовательность не может суммироваться* (C, α)*-методом при любом* $\alpha > 0$.

В самом деле, последовательность (S_n) не может иметь двух конечных (C)-точек в силу первой части теоремы A_1. Если одна из этих точек конечная, а другая бесконечно удаленная, то в силу второй части теоремы A_1 средние Чезаро любого порядка $\alpha > 0$ не ограничены и, следовательно, последовательность (S_n) не может суммироваться (C, α)-методом при любом $\alpha > 0$.

Из теоремы A_1 вытекает необходимое и достаточное условие для того, чтобы из суммируемости последовательности (S_n) (ряда (1)) каким-нибудь (C, α)-методом $(\alpha > 0)$ следовала ее (его) сходимость.

Теорема 1. *Для того чтобы из суммируемости ограниченной последовательности* (S_n) *каким-нибудь* (C, α)*-методом* $(\alpha > 0)$ *следовала ее сходимость, необходимо и достаточно, чтобы каждый частичный предел ее был ее* (C)*-точкой.*

Доказательство. Пусть из суммируемости последовательности (S_n) каким-нибудь (C, α)-методом $(\alpha > 0)$ следует ее сходимость. Тогда предел S этой последовательности, будучи частичным пределом ее, будет (C)-точкой этой последовательности.

Действительно, для любого числа $\varepsilon > 0$ в качестве числа $\lambda(\varepsilon) > 1$ можно использовать любое число, больше единицы, а в качестве последовательностей натуральных чисел $(n_k(\varepsilon))$ и $(m_k(\varepsilon))$ — любые последовательности, удовлетворяющие условиям

$$n_k(\varepsilon) \to +\infty, \quad n_k(\varepsilon) < m_k(\varepsilon) < n_{k+1}(\varepsilon), \quad \frac{m_k(\varepsilon)}{n_k(\varepsilon)} \geq \lambda(\varepsilon) > 1, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Необходимость доказана. *Достаточность* следует из теоремы A_1. В самом деле, из теоремы A_1 следует, что суммируемая (C, α)-методом $(\alpha > 0)$ ограниченная последовательность (S_n) не может иметь двух различных частичных пределов. Теорема доказана.

Однако заметим, что если последовательность (S_n) не ограничена, то она может иметь один конечный частичный предел, являющийся (C)-точкой этой последовательности, не иметь других конечных частичных пределов и быть суммируемой (C, α)-методом.

Построим пример такой последовательности. Для этой цели построим возрастающую последовательность натуральных чисел $n_0 = 1$, n_k, $k = 1, 2, \ldots$, такую, что

$$\frac{1}{n_{k+1}} \sum_{i=0}^{k} n_i < \frac{2}{k+1}, \quad \frac{n_{k+1} - 1}{n_k + 1} \geq \lambda > 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{2}$$

Числа $n_1 > n_0 = 1$ и $n_{k+1} > n_k$, удовлетворяющие неравенствам (2), найти можно.

Последовательность (S_n) определим равенствами

$$S_n = 0 \text{ для } n \neq n_k \text{ и } S_{n_k} = n_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{3}$$

Ясно, что последовательность (3) имеет только два частичных предела: 0 и $+\infty$. Убедимся в том, что она суммируется к числу нуль $(C, 1)$-методом. В самом деле, если $t_n = (n+1)^{-1} \sum_{k=0}^{n} S_k$, то в силу (2) имеем

$$0 \leq t_{n_{k+1}} = \frac{1}{n_{k+1} + 1} \sum_{\nu=0}^{n_{k+1}} S_\nu < \frac{1}{n_{k+1}} \sum_{i=0}^{k} n_i < \frac{2}{k+1} \to 0, \quad k \to \infty,$$

т. е. $t_{n_{k+1}} \to 0$, $k \to \infty$. Так как $0 \leq t_n \leq t_{n_k}$ для $n_k \leq n \leq n_{k+1} - 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, то $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$. Таким образом, последовательность (3) суммируется $(C, 1)$-методом к нулю.

Покажем, что число нуль является (C)-точкой последовательности (3). Действительно,

$$S_n = 0 \text{ для } n'_k = n_k + 1 \leq n \leq m'_k = n_{k+1} - 1 < n_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots ,$$

$$\frac{m'_k}{n'_k} = \frac{n_{k+1}-1}{n_k+1} \geq \lambda > 1, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Для числа $\varepsilon > 0$ в качестве числа $\lambda(\varepsilon)$ можно взять из рассматриваемого примера число λ, больше единицы, причем будут выполнены соотношения

$$m'_{k-1} = n_k < n'_k = n_k + 1 < m'_k = n_{k+1} - 1 < n'_{k+1}, \quad \frac{m'_k}{n'_k} \geq \lambda(\varepsilon) > 1$$

и $S_n = 0$ для $n'_k \leq n \leq m'_k < n'_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, т. е. число нуль является (C)-точкой последовательности (3).

В силу следствия 1 бесконечно удаленная точка, будучи частичным пределом последовательности (3), не будет ее (C)-точкой. Нужный пример построен.

Замечание 1. Можно построить неограниченную неотрицательную последовательность (V_n), которая будет иметь любое конечное число различных положительных частичных пределов, число нуль будет (C)-точкой этой последовательности, причем эта последовательность будет суммироваться к нулю $(C, 1)$-методом.

Теорема 2. *Для того чтобы из суммируемости последовательности* (S_n) *каким-нибудь* (C, α)*-методом* $(\alpha > 0)$ *следовала ее сходимость, необходимо и достаточно, чтобы каждый частичный предел ее, конечный или бесконечный, был* (C)*-точкой этой последовательности.*

Доказательство. Пусть из суммируемости последовательности (S_n) каким-нибудь (C, α)-методом (> 0) к числу S следует ее сходимость. Тогда число S будет (C)-точкой этой последовательности (см. доказательство теоремы 1). *Необходимость* доказана. *Достаточность* следует из теоремы A_1. В самом деле, последовательность (S_n), суммируемая каким-нибудь (C, α)-методом, должна быть ограниченной. В противном случае она будет иметь бесконечный частичный предел. А так как бесконечный частичный предел, в силу условия теоремы, является (C)-точкой последовательности (S_n), то по теореме A_1 средние Чезаро любого порядка $\alpha > 0$ будут неограничены, что противоречит одному из условий теоремы 2 (ее суммируемости (C, α)-методом).

Для ограниченной последовательности (S_n) справедливость теоремы 2 следует из теоремы 1. Теорема 2 доказана.

Следствие 2. *Пусть дан ряд* (1), *в котором* $a_n = 0$ *для* $n \neq n_k$, $k = 1, 2, \ldots$, *где* (n_k) — *возрастающая последовательность натуральных чисел, причем*

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq \lambda > 1, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Если ряд (1) *суммируется* (C, α)*-методом при каком-нибудь* $\alpha > 0$, *то этот ряд сходится.*

Это следствие интересно тем, что в нем не налагаются ограничения на члены a_{n_k} ряда (1). Они произвольные, ограниченные или неограниченные.

Справедливость следствия вытекает из теоремы 2 по той причине, что при условиях этого следствия каждый частичный предел последовательности $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, конечный или бесконечный, является (C)-точкой последовательности. В этом легко убедиться.

Теорема 3. *Пусть* (n_k) — *произвольная фиксированная возрастающая последовательность натуральных чисел, существенно** *отличная от последо-*

* $(n)\setminus(n_k)$ — бесконечное множество.

вательности всех натуральных чисел. Для того чтобы из суммируемости последовательности (S_n) *каким-нибудь* (C, α)*-методом* $(\alpha > 0)$ *следовала сходимость подпоследовательности* (S_{n_k})*, достаточно, чтобы каждый частичный предел этой подпоследовательности, конечный или бесконечный, был* (C)*-точкой последовательности* (S_n).

Доказательство. При условиях теоремы 3 подпоследовательность (S_{n_k}) должна быть ограниченной, так как в противном случае бесконечно удаленная точка, будучи бесконечным частичным пределом подпоследовательности (S_{n_k}), будет бесконечным частичным пределом последовательности (S_n) и в силу условия теоремы 3 будет (C)-точкой последовательности (S_n), чего, в силу теоремы A_1, быть не может.

Итак, (S_{n_k}) — ограниченная подпоследовательность. В силу следствия 1 подпоследовательность (S_{n_k}) не может иметь двух различных частичных пределов. Теорема 3 доказана.

Следствие 3 (теорема А. Н. Колмогорова – М. А. Евграфова). *Пусть дан ряд* (1), *в котором* $a_n = 0$ *для* $n_k \le n \le m_k < n_{k+1}$, *где* (n_k) *и* (m_k) — *заданные возрастающие последовательности натуральных чисел,*

$$n_k < m_k < n_{k+1}, \quad \frac{m_k}{n_k} \ge \lambda > 1, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Если ряд (1) *суммируется* (C, α)*-методом к числу* S *при каком-нибудь* $\alpha > 0$, *то*

$$S_{n_k} = \sum_{\nu=0}^{n_k} a_\nu \to S, \quad k \to \infty.$$

Справедливость следствия 3 вытекает из теоремы 3, так как при условиях этого следствия каждый частичный предел подпоследовательности (S_{n_k}), конечный или бесконечный, является (C)-точкой последовательности (S_n).

Замечание 2. Теорема A_1 позволяет легко строить ограниченные последовательности (S_n), не суммируемые (C, α)-методами при любом $\alpha > 0$ и не суммируемые методом Пуассона – Абеля.

Действительно, для этого достаточно построить ограниченную последовательность (S_n), имеющую два различных частичных предела, являющихся (C)-точками этой последовательности. Построим такую последовательность. Возьмем число $\lambda > 1$ и две возрастающие последовательности натуральных чисел (n_k) и (m_k) такие, что

$$n_k < m_k < n_{k+1}, \quad \frac{m_k}{n_k} \ge \lambda > 1, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

На последовательность (n_k) наложим еще одно условие

$$\frac{n_{k+1} - 1}{m_k + 1} \ge \lambda > 1, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Это условие можно удовлетворить, так как (n_k) — неограниченная последовательность. Последовательность (S_n) определим следующим образом:

$$S_n = 0 \text{ для } n_k \le n \le m_k, \; S_n = 1 \text{ для } n_k + 1 \le n \le n_{k+1} - 1, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Ясно, что эта последовательность ограничена и она имеет точки 0 и 1 в качестве своих (C)-точек. В силу следствия 1 она не будет суммироваться (C, α)-

методом при любом $\alpha > 0$. Но она не будет суммироваться и методом Пуассона – Абеля, так как ограниченная последовательность, суммируемая методом Пуассона – Абеля, по известной теореме Г. Харди – Литтльвуда [4] будет суммироваться $(C, 1)$-методом, что противоречит изложенному выше.

Все классические тауберовы теоремы для (C, α)-методов суммирования последовательностей (S_n), принадлежащие Г. Харди, Е. Ландау, Р. Шмидту [4], А. Колмогорову и М. Евграфову [5] и другим, являются частными случаями теорем 1–3.

2. В работе [1] (см. также [3]) мы ввели понятие $(\overline{R}, p)$-точки последовательности (S_n) и доказали теорему A_2.

Последовательность комплексных чисел (S_n) суммируется $(\overline{R}, p_n)$-методом к числу S, если последовательность

$$t_n^{(0)} = \frac{1}{\mathcal{P}_n} \sum_{k=0}^{n} P_k S_k \to S$$

при $n \to \infty$, где $P_0 > 0, P_n \geq 0$, $n = 1, 2, \ldots$,

$$\mathcal{P}_n = \sum_{k=0}^{n} P_k \to \infty, \quad n \to \infty.$$

Конечный частичный предел Б последовательности (S_n) комплексных чисел мы назвали $(\overline{R}, p)$-точкой этой последовательности, если для числа $\varepsilon > 0$ найдутся число $\lambda(\varepsilon) > 1$ и две возрастающие последовательности $(n_k(\varepsilon))$ и $(m_k(\varepsilon))$ натуральных чисел такие, что

$$|S_n - Б| \leq \varepsilon \text{ для } n_k \leq n \leq m_k < n_{k+1}, \quad \frac{\mathcal{P}_{m_k}}{\mathcal{P}_{n_k}} \geq \lambda > 1, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Бесконечно удаленную точку комплексной плоскости мы назвали бесконечно удаленной $(\overline{R}, p)$-точкой последовательности (S_n) комплексных чисел, если существуют число $\lambda > 1$, две возрастающие последовательности (n_k) и (m_k) натуральных чисел и последовательность (G_k) замкнутых выпуклых множеств комплексной плоскости, расстояние которых от начала координат стремится к ∞ при $k \to \infty$, такие, что

$$S_n \in G_k \text{ для } n_k \leq n \leq m_k < n_{k+1}, \quad \frac{\mathcal{P}_{m_k}}{\mathcal{P}_{n_k}} \geq \lambda > 1, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Теорема A_2. *Если последовательность (S_n) суммируется к числу S $(\overline{R}, p_n)$-методом и если точка Б является $(\overline{R}, p)$-точкой этой последовательности, то $S =$ Б.*

Если бесконечно удаленная точка комплексной плоскости является $(\overline{R}, p)$-точкой последовательности (S_n), то последовательность

$$t_n^{(0)} = \mathcal{P}_n^{-1} \sum_{k=0}^{n} P_k S_k, \quad n = 0, 1, 2, \ldots ,$$

не ограничена.

Отметим следствия и теоремы, вытекающие из теоремы A_2.

***Следствие* 1′.** *Если последовательность (S_n) суммируется $(\overline{R}, p_n)$-методом, то она не может иметь двух различных $(\overline{R}, p)$-точек.*

Теорема 1′. *Для того чтобы из суммируемости ограниченной последова-*

тельности (S_n) $(\overline{R}, p_n)$*-методом следовала ее сходимость, необходимо и достаточно, чтобы каждый частичный предел этой последовательности был ее* $(\overline{R}, p)$*-точкой.*

Теорема 2′. *Для того чтобы из суммируемости последовательности* (S_n) $(\overline{R}, p_n)$*-методом следовала сходимость этой последовательности, необходимо и достаточно, чтобы каждый частичный ее предел, конечный или бесконечный, был* $(\overline{R}, p)$*-точкой этой последовательности.*

Следствие 2′. *Пусть дан ряд* (1), *в котором* $a_n = 0$ *для* $n \neq n_k$, *где* (n_k) *— возрастающая последовательность натуральных чисел,*

$$\mathcal{P}_{n_{k+1}} / \mathcal{P}_{n_k} \geq \lambda > 1, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $\mathcal{P}_n = \sum_{i=0}^{n} P_i \to +\infty\ (n \to \infty)$, $P_0 > 0$, $P_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots$.

Если ряд (1) *суммируется* $(\overline{R}, p_n)$*-методом, то этот ряд сходится.*

Это следствие, как и следствие 2, интересно тем, что здесь на члены a_{n_k} ряда (1) не налагаются ограничения, они могут быть ограниченными или неограниченными.

Теорема 3′. *Пусть* (n_k) *— возрастающая последовательность натуральных чисел, существенно отличная от множества всех натуральных чисел. Для того чтобы из суммируемости* $(\overline{R}, p_n)$*-методом последовательности* (S_n) *к числу* S *следовала сходимость к этому числу подпоследовательности* (S_{n_k}), *достаточно, чтобы каждый ее частичный предел, конечный или бесконечный, был* $(\overline{R}, p)$*-точкой последовательности* (S_n).

Следствие 3′. *Пусть дан ряд* (1), *в котором* $a_n = 0$ *для* $n_k \leq n \leq m_k$, *где* (n_k) *и* (m_k) *— заданные возрастающие последовательности натуральных чисел,*

$$n_k < m_k < n_{k+1}, \quad \frac{\mathcal{P}_{m_k}}{\mathcal{P}_{n_k}} \geq \lambda > 1, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Если ряд (1) *суммируется* $(\overline{R}, p_n)$*-методом к числу* S, *то*

$$S_{n_k} = \sum_{\nu=0}^{n_k} a_\nu \to S, \quad k \to \infty.$$

Доказательства теорем $1'-3'$ и следствий $1'-3'$ аналогичны доказательствам теорем 1 – 3 и следствий 1 – 3, поэтому мы их опускаем.

Здесь, как и в п. 1, можно построить пример неограниченной последовательности (S_n), $S_n \geq 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, имеющей только одну конечную $(\overline{R}, p)$-точку нуль, суммируемую $(\overline{R}, p_n)$-методом при условии $P_n \cdot \mathcal{P}_n^{-1} = o(1)$ и не имеющей других конечных частичных пределов, отличных от этой $(\overline{R}, p)$-точки нуль.

Построим пример такой последовательности. Для этого возьмем возрастающую последовательность натуральных чисел (n_k) такую, что, выбрав числа $n_1, n_2, \ldots, n_k$ и положив $n_0 = 0$, $\mathcal{P}_{n_{-1}} = 1$, число n_{k+1} найдем при условиях

$$\frac{1}{\mathcal{P}_{n_{k+1}}} \sum_{i=0}^{k} P_{n_i} \mathcal{P}_{n_{i-1}} < \frac{1}{k+1}, \quad \varepsilon_{n_{k+1}} \mathcal{P}_{n_k} < \frac{1}{k+1}, \quad \frac{\mathcal{P}_{n_{k+1}-1}}{\mathcal{P}_{n_k+1}} \geq \lambda > 1, \tag{4}$$

где $\varepsilon_{n_{k+1}} = P_{n_{k+1}} / \mathcal{P}_{n_{k+1}}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Условиям (4) можно удовлетворить, так как

$$P_n \mathcal{P}_n^{-1} = o(1) \text{ и } P_n \to +\infty, \quad n \to \infty.$$

Последовательность (S_n) определим следующим образом:

$$S_n = 0 \text{ для } n \neq n_{k+1} \text{ и } S_n = \mathcal{P}_{n_k} \text{ для } n = n_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{5}$$

Ясно, что последовательность (5) имеет только два частичных предела: 0 и $+\infty$. Убедимся в том, что эта последовательность суммируется $(\overline{R}, p_n)$-методом к нулю и что нуль является ее $(\overline{R}, p)$-точкой.

Действительно, если $t_n^{(0)} = \mathcal{P}_n^{-1} \sum_{i=0}^{n} P_i S_i$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\varepsilon_n = P_n \cdot \mathcal{P}_n^{-1}$, то, используя условия (4), (5), получаем

$$0 \leq t_{n_{k+1}}^{(0)} = \mathcal{P}_{n_{k+1}}^{-1} \sum_{i=0}^{n_{k+1}} P_i S_i = \mathcal{P}_{n_{k+1}}^{-1} \sum_{i=0}^{k+1} P_{n_i} S_{n_i} =$$

$$= \mathcal{P}_{n_{k+1}}^{-1} \left(\sum_{i=0}^{k} P_{n_i} S_{n_i} + P_{n_{k+1}} S_{n_{k+1}} \right) = \mathcal{P}_{n_{k+1}}^{-1} \left(\sum_{i=0}^{k} P_{n_i} \mathcal{P}_{n_{i-1}} + P_{n_{k+1}} \mathcal{P}_{n_k} \right) =$$

$$= \mathcal{P}_{n_{k+1}}^{-1} \left(\sum_{i=0}^{k} P_{n_{i-1}} \mathcal{P}_{n_{i-1}} + P_{n_{k+1}} \mathcal{P}_{n_k} \right) = \mathcal{P}_{n_{k+1}}^{-1} \sum_{i=0}^{k} P_{n_{i-1}} \mathcal{P}_{n_{i-1}} + \frac{P_{n_{k+1}}}{\mathcal{P}_{n_{k+1}}} \mathcal{P}_{n_k} =$$

$$= \mathcal{P}_{n_{k+1}}^{-1} \sum_{i=0}^{k} P_{n_i} \mathcal{P}_{n_{i-1}} + \varepsilon_{n_{k+1}} \mathcal{P}_{n_k} < \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} \to 0, \quad k \to \infty, \tag{6}$$

т. е. $t_{n_{k+1}}^{(0)} \to 0$, $k \to \infty$.

Если $n_k \leq n \leq n_{k+1} - 1$, то в силу (5) и (6)

$$0 \leq t_n^{(0)} \leq t_{n_k}^{(0)} \to 0, \quad k \to \infty,$$

и, следовательно, $\lim\limits_{n \to \infty} t_n^{(0)} = 0$.

Суммируемость последовательности (5) к числу нуль доказана.

Убедимся в том, что нуль является $(\overline{R}, p)$-точкой последовательности (5).

Действительно, $S_n = 0$ для $n_k < n < n_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$. Возьмем $m_k' = n_{k+1} - 1$, $n_k' = n_k + 1$, тогда в силу (4) $\mathcal{P}_{m_k'} / \mathcal{P}_{n_k'} \geq \lambda > 1$, $k = 1, 2, \ldots$, и $S_n = 0$ для $n_k' \leq n \leq m_k'$, $k = 1, 2, \ldots$. Таким образом точка нуль является $(\overline{R}, p)$-точкой последовательности (5). Нужный пример построен.

***Замечания.* 1′.** Можно построить неограниченную неотрицательную последовательность (W_n), которая будет иметь конечное число положительных конечных частичных пределов, число нуль будет $(\overline{R}, p)$-точкой этой последовательности и эта последовательность будет суммироваться к нулю $(\overline{R}, p_n)$-методом.

2′. Теорема A_2' позволяет легко строить ограниченные последовательности (S_n), не суммируемые $(\overline{R}, p_n, \alpha)$-методами $(\alpha = 1, 2, \ldots)$ [3] при условии $P_n \mathcal{P}_n^{-1} = o(1)$.

Для этого достаточно построить ограниченную последовательность, имеющую два различных конечных частичных предела, являющихся $(\overline{R}, p)$-точками этой последовательности при условии $P_n \cdot \mathcal{P}_n^{-1} = o(1)$. Построим такую последовательность. Возьмем число $\lambda > 1$ и две возрастающие последовательности (n_k) и (m_k) натуральных чисел такие, что

$$n_k < m_k < n_{k+1}, \quad \frac{\mathcal{P}_{m_k}}{\mathcal{P}_{n_k}} \geq \lambda > 1, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $\mathcal{P}_n = \sum_{i=0}^{n} P_i$, $P_0 > 0$, $P_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\mathcal{P}_n \to +\infty$, $n \to \infty$, $P_n / \mathcal{P}_n \to 0$, $n \to \infty$. Такие последовательности построить можно, так как $\mathcal{P}_n \to +\infty$, $n \to \infty$, и $n_k \to +\infty$, $k \to \infty$. На последовательность (n_k) наложим еще одно условие

$$\frac{\mathcal{P}_{n_{k+1}-1}}{\mathcal{P}_{m_k+1}} \geq \lambda > 1, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Этому условию можно удовлетворить, так как $\mathcal{P}_n \to +\infty$, $n \to \infty$, и $n_k \to +\infty$, $k \to \infty$.

Последовательность (S_n) определим следующим образом:

$$S_n = 0 \text{ для } n_k \leq n \leq m_k \text{ и } S_n = 1 \text{ для } n_k + 1 \leq n \leq n_{k+1} - 1, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Ясно, что последовательность (S_n) ограничена и имеет точки 0 и 1 в качестве своих $(\overline{R}, p)$-точек. В силу следствия 1′ она не будет суммироваться $(\overline{R}, p_n, \alpha)$-методом при любом $\alpha = 1, 2, \ldots$. Заметим, что эта последовательность (S_n) не будет суммироваться и методом Пуассона – Абеля, так как она не суммируется $(C, 1)$-методом.

1. *Давыдов Н. А.* Об одном свойстве методов Чезаро суммирования рядов // Мат. сб. – 1956. – **38**.. – С. 509-524.
2. *Давыдов Н. А.* (C)-свойство методов Чезаро и Абеля – Пуассона и теоремы тауберова типа // Там же. – 1963. – **60**, № 2. – С. 185-206.
3. *Михалин Г. А., Тесленко Л. С.* Об одном свойстве одного класса $(\overline{R}, p_n)$-методов суммирования рядов и теоремы тауберова типа // Укр. мат. журн. – 1977. – **29**, № 2. – С. 194-203.
4. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – 504 с.
5. *Евграфов М. А.* Об обращении теоремы Абеля для рядов, имеющих пропуски // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1952. – **16**, № 6. – С. 521-524.

Получено 07.12.93