УДК 517.988

В. В. Хлобыстов (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
Т. Н. Поповичева (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко)

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

In the Hilbert space, we construct an interpolation approximation of the Taylor polynomial for differentiable operators. With the help of this approximation, we obtain estimates of the accuracy for analytic operators that strengthen previously known results and operators containing a finite number of Frechet derivatives.

У гільбертовому просторі побудовано інтерполяційне наближення полінома Тейлора для диференційовних операторів. За допомогою цього наближення отримано оцінки точності для аналітичних операторів, які підсилюють відомі раніше результати, та операторів, що мають скінченну кількість похідних Фреше.

Данная статья продолжает направление работ [1 – 8] по построению и исследованию точности интерполяционных операторных приближений в гильбертовых пространствах. Ранее в [4] рассматривались задачи построения операторного полинома типа Лагранжа на специальным образом выбранном множестве узлов $\mathfrak{L}(m)$ и анализа точности интерполирования полиномиальных и целых операторов. В этой статье авторами предлагается интерполяция типа Эрмита, которая, как будет показано далее, эквивалентна лагранжевой интерполяции на множестве узлов $\mathfrak{L}(m)$ для полиномиальных операторов, а в случае бесконечно дифференцируемых неполиномиальных операторов позволяет усилить результаты о сходимости интерполяционных процессов (случай аналитических по Гато операторов) и получить оценки точности приближений (случай конечного числа высших производных Фреше оператора), что невозможно было осуществить прежде с помощью лагранжевой интерполяции.

Пусть X, Y — гильбертовы пространства (X — сепарабельное), $F : X \to Y$ — оператор, аналитический по Гато в пространстве X. Тогда $F(x)$ можно представить в виде

$$F(x) = T_n(x) + R_n(x), \tag{1}$$

$$T_n(x) = F(0) + \frac{1}{1!}F'(0)x + \frac{1}{2!}F''(0)x^2 + ... + \frac{1}{n!}F^{(n)}(0)x^n, \tag{2}$$

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(0)x^{n+1} + \frac{1}{(n+2)!}F^{(n+2)}(0)x^{n+2} + \dots \quad \forall x \in X, \tag{3}$$

где $T_n(x)$ — полином Тейлора n-й степени для оператора $F(x)$, $F^{(k)}(0)x^k$, $k = 0, 1, 2, \dots,$ — дифференциал Гато k-го порядка оператора F в нуле. Пусть $e_1,\ e_2, \dots, e_m$ — первые m элементов ортонормального базиса пространства X, $m \geq n$,

$$F^{(k)}(0)e_{i_k} \dots e_{i_1}, \qquad i_j = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, k}, \quad k = \overline{0, n},$$

— дифференциал Гато k-го порядка для F в нуле по направлениям $e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$. Рассмотрим оператор

$$T_{m,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m} \frac{1}{k!} F^{(k)}(0) e_{i_k} \ldots e_{i_1} (x, e_{i_1}) \ldots (x, e_{i_k}), \tag{4}$$

где $(\cdot,\ \cdot)$ — скалярное произведение в X. Нетрудно видеть, что данный операторный полином удовлетворяет интерполяционным условиям типа Эрмита

$$T_{m,n}^{(k)}(0) e_{i_k} \ldots e_{i_1} = F^{(k)}(0) e_{i_k} \ldots e_{i_1}, \quad k = \overline{0, n}, \tag{5}$$

и является приближением для полинома $T_n(x)$ в (2).

Для последующего изложения введем меру μ на X (гауссову) следующим образом. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ — ортонормальный базис в X, $B : X \to X$ — линейный оператор

$$Bx = \sum_{i=1}^{\infty} q^i (x, e_i) e_i, \quad q \in (0, 1). \tag{6}$$

Можно показать, что B — положительный самосопряженный вполне непрерывный оператор [9], для которого e_i — собственные элементы, q^i — собственные значения, при этом $\operatorname{Tr} B = \sum_{i=1}^{\infty} q^i = \dfrac{q}{1-q}$ и, следовательно, B — ядерный оператор [10]. Известно, что гауссова мера μ однозначно определяется своим средним m_μ и корреляционным оператором B, а $\varphi(x) = \exp\left[-\dfrac{1}{2}(Bx, x)\right]$ является характеристическим функционалом гауссовой меры μ на X с нулевым средним m_μ и корреляционным оператором B. Пусть Y — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\ \cdot)_Y$, H — гильбертово пространство аналитических по Гато операторов $F : X \to Y$ со скалярным произведением [7]

$$(P, Q)_H =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_X \ldots \int\limits_X \left(\frac{1}{k!} P^{(k)}(0) h_k \ldots h_1, \frac{1}{k!} Q^{(k)}(0) h_k \ldots h_1 \right)_Y \mu(dh_k) \ldots \mu(dh_1)$$

и нормой

$$\|P\|_H = (P, P)_H^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_X \ldots \int\limits_X \left\| \frac{1}{k!} P^{(k)}(0) h_k \ldots h_1 \right\|_Y^2 \mu(dh_k) \ldots \mu(dh_1) \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{7}$$

где $P, Q \in H$, $P^{(k)}(0) h_k \ldots h_1$ — дифференциал Гато k-го порядка оператора P в нуле по направлениям $h_1, \ldots, h_k \in X$, μ — гауссова мера на X, которая была введена выше. Исследуем сходимость интерполяционного процесса (4) к оператору $F(x)$ при увеличении числа узлов и степени интерполяции.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $F(x)$ — аналитический по Гато оператор в X. Тогда если последовательность $\left\|F^{(k)}(0)\right\|$, $k = 1, 2, \ldots$, невозрастающая или $\dfrac{\|F^{(k+1)}(0)\|}{\|F^{(k)}(0)\|} = O(k^s)$, $0 \le s < 1$, $k \to \infty$, то*

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \|F - T_{m,n}\|_H = 0, \tag{8}$$

т. е. имеет место сходимость интерполяционного процесса $T_{m,n}$ *к* F *в метрике* H.

Доказательство. В предположении, что

$$\frac{1}{k!}F^{(k)}(0)v_k \ldots v_1 = L_k(v_1, \ldots, v_k), \tag{9}$$

где $L_k(v_1, \ldots, v_k)$ — k-линейная непрерывная симметричная операторная форма (вопросы симметризации рассмотрены в [11]), полином $T_n(x)$ в (2) представим в виде

$$T_n(x) = L_0 + L_1 x + \ldots + L_n x^n.$$

Здесь $L_0 \in Y$, а операторная степень $L_k x^k = L_k(x, \ldots, x) : X \to Y$ получена из $L_k(v_1, \ldots, v_k)$ при $v_1 = \ldots = v_k = x$, $k = \overline{1,n}$. На основании (2), (4) с учетом (9) интерполянт типа Эрмита $T_{m,n}(x)$ можно представить полиномом $T_n(x)$ с заменой аргумента отрезком его ряда Фурье по ортонормальному базису e_i, $i = 1, 2, \ldots$. Действительно,

$$T_{m,n}(x) = L_0 + L_1\left(\sum_{i_1=1}^{m}(x, e_{i_1})e_{i_1}\right) +$$

$$+ L_2\left(\sum_{i_1=1}^{m}(x, e_{i_1})e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{m}(x, e_{i_2})e_{i_2}\right) + \ldots$$

$$\ldots + L_n\left(\sum_{i_1=1}^{m}(x, e_{i_1})e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{m}(x, e_{i_2})e_{i_2}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{m}(x, e_{i_n})e_{i_n}\right) =$$

$$= L_0 + \sum_{i_1=1}^{m}(x, e_{i_1})L_1(e_{i_1}) + \sum_{i_1, i_2=1}^{m}(x, e_{i_1})(x, e_{i_2})L_2(e_{i_1}, e_{i_2}) + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n=1}^{m}(x, e_{i_1})(x, e_{i_2})\ldots(x, e_{i_n})L_n(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n}) =$$

$$= L_0 + \sum_{i_1=1}^{m}(x, e_{i_1})F'(0)e_{i_1} +$$

$$+ \sum_{i_1, i_2=1}^{m}(x, e_{i_1})(x, e_{i_2})\frac{1}{2!}F''(0)e_{i_2}e_{i_1} + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n=1}^{m}(x, e_{i_1})(x, e_{i_2})\ldots(x, e_{i_n})\frac{1}{n!}F^{(n)}(0)e_{i_n}\ldots e_{i_2}e_{i_1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{m}(x, e_{i_1})(x, e_{i_2})\ldots(x, e_{i_k})\frac{1}{k!}F^{(k)}(0)e_{i_k}\ldots e_{i_2}e_{i_1}.$$

Из (1) следует

$$\|F - T_{m,n}\|_H \leq \|T_n - T_{m,n}\|_H + \|R_n\|_H . \tag{10}$$

Применяя преобразования, аналогичные преобразованиям в [3], имеем

$$T_n(x) - T_{m,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[L_k x^k - L_k \left(\sum_{i=1}^{m} (x, e_i) e_i \right)^k \right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left[L_k \left(x - \sum_{i_1=1}^{m} (x, e_{i_1}) e_{i_1}, x, \ldots, x \right) + \right.$$

$$+ L_k \left(\sum_{i_1=1}^{m} (x, e_{i_1}) e_{i_1}, x - \sum_{i_2=1}^{m} (x, e_{i_2}) e_{i_2}, x, \ldots, x \right) + \ldots$$

$$\ldots + L_k \left(\sum_{i_1=1}^{m} (x, e_{i_1}) e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{m} (x, e_{i_2}) e_{i_2}, \ldots \right.$$

$$\left. \left. \ldots, \sum_{i_{k-1}=1}^{m} (x, e_{i_{k-1}}) e_{i_{k-1}}, x - \sum_{i_k=1}^{m} (x, e_{i_k}) e_{i_k} \right) \right]. \tag{11}$$

Исходя из определения нормы в метрике H и равенства (11), а также используя при этом формулу $\int_X \|v_k\|^2 \mu(dv_k) = \operatorname{Tr} B$ [12], получаем

$$\|T_n - T_{m,n}\|_H^2 = \sum_{k=0}^{n} \int_X \ldots \int_X \left\| L_k \left(v_1 - \sum_{i_1=1}^{m} (v_1, e_{i_1}) e_{i_1}, v_2, \ldots, v_k \right) + \right.$$

$$+ L_k \left(\sum_{i_1=1}^{m} (v_1, e_{i_1}) e_{i_1}, v_2 - \sum_{i_2=1}^{m} (v_2, e_{i_2}) e_{i_2}, v_3, \ldots, v_k \right) + \ldots$$

$$\ldots + L_k \left(\sum_{i_1=1}^{m} (v_1, e_{i_1}) e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{m} (v_2, e_{i_2}) e_{i_2}, \ldots \right.$$

$$\left. \ldots, \sum_{i_{k-1}=1}^{m} (v_{k-1}, e_{i_{k-1}}) e_{i_{k-1}}, v_k - \sum_{i_k=1}^{m} (v_k, e_{i_k}) e_{i_k} \right) \Bigg\|_Y^2 \mu(dv_k) \ldots \mu(dv_2) \mu(dv_1) \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} k \int_X \ldots \int_X \left\| L_k \left(v_1 - \sum_{i_1=1}^{m} (v_1, e_{i_1}) e_{i_1}, v_2, \ldots, v_k \right) \right\|_Y^2 +$$

$$+ \left\| L_k \left(\sum_{i_1=1}^{m} (v_1, e_{i_1}) e_{i_1}, v_2 - \sum_{i_2=1}^{m} (v_2, e_{i_2}) e_{i_2}, v_3, \ldots, v_k \right) \right\|_Y^2 + \ldots$$

$$\ldots + \left\| L_k \left(\sum_{i_1=1}^{m} (v_1, e_{i_1}) e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{m} (v_2, e_{i_2}) e_{i_2}, \ldots \right. \right.$$

$$\ldots, \sum_{i_{k-1}=1}^{m} (v_{k-1}, e_{i_{k-1}}) e_{i_{k-1}}, v_k - \sum_{i_k=1}^{m} (v_k, e_{i_k}) e_{i_k} \Bigg) \Bigg\|_Y^2 \mu(dv_k) \ldots \mu(dv_2) \mu(dv_1) <$$

$$< \sum_{k=1}^{n} k^2 \|L_k\|^2 (\operatorname{Tr} B)^{k-1} \sum_{i=m+1}^{\infty} q^i = \sum_{k=1}^{n} k^2 \|L_k\|^2 (\operatorname{Tr} B)^k q^m =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\|F^{(k)}(0)\|}{(k-1)!} \right)^2 (\operatorname{Tr} B)^k q^m, \quad q \in (0,1), \quad 0! = 1.$$

Здесь $\|L_k\| = \dfrac{1}{k!} \left\| F^{(k)}(0) \right\|$ — традиционная норма k-линейного оператора.

Окончательно получаем

$$\|T_n - T_{m,n}\|_H < \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\left\|F^{(k)}(0)\right\|}{(k-1)!} \right)^2 (\operatorname{Tr} B)^k q^m \right]^{\frac{1}{2}}, \quad q \in (0,1). \qquad (12)$$

Далее, учитывая (3), (9), а также (7), имеем

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} F^{(k)}(0) x^k = \sum_{k=n+1}^{\infty} L_k x^k,$$
$$\|R_n\|_H^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \|L_k\|_H^2. \qquad (13)$$

Принимая во внимание, что $\int_X \|v\|^2 \mu(dv) = \operatorname{Tr} B$, оцениваем k-е слагаемое в правой части (13):

$$\|L_k\|_H^2 = \int\limits_X \ldots \int\limits_X \|L_k(v_1, v_2, \ldots, v_k)\|_Y^2 \mu(dv_k) \ldots \mu(dv_2) \mu(dv_1) \leq$$

$$\leq \int\limits_X \ldots \int\limits_X \|L_k\|^2 \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 \ldots \|v_k\|^2 \mu(dv_k) \ldots \mu(dv_2) \mu(dv_1) =$$

$$= \|L_k\|^2 \int\limits_X \|v_1\|^2 \mu(dv_1) \int\limits_X \|v_2\|^2 \mu(dv_2) \ldots \int\limits_X \|v_k\|^2 \mu(dv_k) =$$

$$= \|L_k\|^2 (\operatorname{Tr} B)^k = \left(\frac{\left\|F^{(k)}(0)\right\|}{k!} \right)^2 (\operatorname{Tr} B)^k. \qquad (14)$$

На основании (13), (14) получаем

$$\|R_n\|_H \leq \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{\left\|F^{(k)}(0)\right\|}{k!} \right)^2 (\operatorname{Tr} B)^k \right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (15)$$

Подставляя (12), (15) в (10), приходим к неравенству

$$\|F - T_{m,n}\|_H < \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\|F^{(k)}(0)\|}{(k-1)!}\right)^2 (\operatorname{Tr} B)^k q^m\right]^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{\|F^{(k)}(0)\|}{k!}\right)^2 (\operatorname{Tr} B)^k\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (16)$$

где $q \in (0,1)$, а $\|\cdot\|_H$ вычисляется континуальным интегралом (7) по гауссовой мере μ.

Перейдем в неравенстве (16) к пределу:

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \|F - T_{m,n}\|_H \le$$

$$\le \lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \left(\left[\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\|F^{(k)}(0)\|}{(k-1)!}\right)^2 (\operatorname{Tr} B)^k q^m\right]^{\frac{1}{2}} +\right.$$

$$\left. + \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{\|F^{(k)}(0)\|}{k!}\right)^2 (\operatorname{Tr} B)^k\right]^{\frac{1}{2}}\right), \quad q \in (0,1). \qquad (17)$$

Поскольку в условиях теоремы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\|F^{(k)}(0)\|}{k!}\right)^2 (\operatorname{Tr} B)^k$ сходится, предел правой части неравенства (17), как нетрудно видеть, равен нулю.

Теорема доказана.

Ранее в [4] рассмотрен аналог теоремы 1 о сходимости интерполяционного процесса Лагранжа минимальной нормы к целому оператору на специальным образом выбранной последовательности узлов $\mathfrak{L}(m)$. При этом для обеспечения сходимости интерполяционного процесса требовалось намного жестче условие в сравнении с условием теоремы 1.

Отметим, что $T_n(x)$ — операторный полином n-й степени наилучшего приближения к аналитическому по Гато оператору F на множестве непрерывных операторных полиномов n-й степени в метрике пространства H [7].

***Замечание* 1.** Имеет место сходимость $T_{m,n}$ к T_n в метрике H, т. е.

$$\|T_n - T_{m,n}\|_H \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

что непосредственно следует из оценки (12). Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать метрику H такую, что неравенство

$$\|T_n - T_{m,n}\|_H < \varepsilon$$

выполняется при фиксированном m, т. е. оператор T_n можно приблизить оператором $T_{m,n}$ с заданной точностью в метрике H, выбирая ее соответствующим образом. Действительно, из неравенства (12) следует, что для заданного $\varepsilon > 0$ можно взять такое q из интервала $(0,1)$, при котором $\|T_n - T_{m,n}\|_H < \varepsilon$. Выбрав q, мы тем самым определяем оператор B в (6), соответственно гауссову меру μ и, следовательно, метрику H.

В случае ограниченности норм $\|F^{(k)}(0)\|$, $k = 1, 2, \ldots$, путем несложных преобразований в правой части неравенства (16) приходим к следующему результату.

Теорема 2. *Пусть оператор F — аналитический по Гато в X и $\|F^{(k)}(0)\| \leq \leq M = \mathrm{const}$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда*

$$|F - T_{m,n}\|_H < q^{\frac{m}{2}} M (\mathrm{Tr}\, B)^{\frac{1}{2}} S_n^{\frac{1}{2}} + M r_n^{\frac{1}{2}}, \tag{18}$$

где $q \in (0, 1)$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(\mathrm{Tr}\, B)^{k-1}}{((k-1)!)^2} < e^{\mathrm{Tr}\, B}$, $r_n = \dfrac{(\mathrm{Tr}\, B)^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta\, \mathrm{Tr}\, B}$, $0 < \theta < 1$.

***Замечание* 2.** Нетрудно видеть, что для аналитического по Гато оператора в условиях теоремы 2 имеет место сходимость интерполяционного процесса $T_{m,n}$ к F в метрике H.

Пусть теперь X — сепарабельное гильбертово пространство, Y — линейное нормированное пространство, а $F : X \to Y$ — оператор, $n + 1$ раз дифференцируемый по Фреше в X. Согласно [11] для $F(x)$ имеет место формула Тейлора с остаточным членом $R_n(x)$ в интегральной форме

$$F(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

$$T_n(x) = F(0) + \frac{1}{1!} F'(0)x + \frac{1}{2!} F''(0)x^2 + \ldots + \frac{1}{n!} F^{(n)}(0)x^n,$$

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n F^{(n+1)}(tx) x^{n+1} dt, \quad x \in X, \tag{19}$$

где $F^{(k)}(0)x^k$ — дифференциал Фреше k-го порядка оператора $F(x)$ в нуле. Пусть, как и ранее, e_1, $e_2, \ldots, e_m$ — первые m элементов ортонормального базиса пространства X,

$$F^{(k)}(0) e_{i_k} \ldots e_{i_1}, \qquad i_j = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, k}, \quad k = \overline{0, n},$$

— дифференциал Фреше k-го порядка оператора $F(x)$ в нуле при приращениях $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$, $T_{m,n}(x)$ — приближение к $T_n(x)$, заданное формулой (4) и удовлетворяющее интерполяционным условиям типа Эрмита (5). Приведем оценку точности приближения оператора $F(x)$ полиномом $T_{m,n}(x)$ в метрике пространства Y.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $F(x)$ — оператор, $n+1$ раз дифференцируемый по Фреше в X. Тогда имеет место оценка*

$$\|F(x) - T_{m,n}(x)\|_Y \leq \varepsilon_m(x) S_n(x) + o(\varepsilon_m) + \|R_n(x)\|_Y\,, \tag{20}$$

где

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\|F^{(k)}(0)\|}{(k-1)!} \|x\|^{k-1} < M \exp(\|x\|),$$

$$M = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \left\| F^{(k)}(0) \right\| \right\},$$

$$\varepsilon_m^2(x) = \left\| x - \sum_{i=1}^{m} (x, e_i) e_i \right\|^2 = \sum_{i=m+1}^{\infty} (x, e_i)^2, \quad \|x\|^2 = (x, x),$$

а $R_n(x)$ определяется формулой (19).

Доказательство. Как и прежде, будем считать, что

$$\frac{1}{k!}F^{(k)}(0)v_k\dots v_1 = L_k(v_1,\dots,v_k), \quad k=\overline{1,n}, \tag{21}$$

где $F^{(k)}(0)v_k\dots v_1$ — дифференциал Фреше k-го порядка для оператора F в нуле при приращениях $v_1,\dots,v_k$, а k-линейная непрерывная операторная форма $L_k(v_1,\dots,v_k)$ симметрична. Следовательно, $T_n(x)$ можно представить в виде

$$T_n(x) = L_0 + L_1x + L_2x^2 + \dots + L_nx^n,$$

где $L_0 \in Y$, $L_kx^k = L_k(x,x,\dots,x) : X \to Y$, $k=\overline{1,\ n}$ — k-я операторная степень, полученная из $L_k(v_1,v_2,\dots,v_k) : X^k \to Y$ при $v_1=v_2=\dots=v_k=x$. Аналогично предыдущему случаю на основании интерполяционных условий (5) с учетом (21) можно построить полином $T_{m,n}(x)$, являющийся приближением к $T_n(x)$ в метрике пространства Y. Тогда

$$\|F(x)-T_{m,n}(x)\|_Y \le \|T_n(x)-T_{m,n}(x)\|_Y + \|R_n(x)\|_Y. \tag{22}$$

Согласно [3] находим

$$\|T_n(x)-T_{m,n}(x)\|_Y \le \left\|L_1x - L_1\left(\sum_{i_1=1}^m (x,e_{i_1})e_{i_1}\right)\right\|_Y +$$

$$+\left\|L_2x^2 - L_2\left(\sum_{i_1=1}^m (x,e_{i_1})e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^m (x,e_{i_2})e_{i_2}\right)\right\|_Y + \dots$$

$$\dots+\left\|L_nx^n - L_n\left(\sum_{i_1=1}^m (x,e_{i_1})e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^m (x,e_{i_2})e_{i_2},\dots,\sum_{i_n=1}^m (x,e_{i_n})e_{i_n}\right)\right\|_Y. \tag{23}$$

Далее, используя технику оценивания из работы [3], получаем

$$\left\|L_kx^k - L_k\left(\sum_{i=1}^m (x,e_i)e_i,\dots,\sum_{i=1}^m (x,e_i)e_i\right)\right\|_Y \le$$

$$\le \|L_k\|\left\|x-\sum_{i=1}^m (x,e_i)e_i\right\| \times$$

$$\times\left[\|x\|^{k-1} + \left\|\sum_{i=1}^m (x,e_i)e_i\right\|\|x\|^{k-2} + \dots + \left\|\sum_{i=1}^m (x,e_i)e_i\right\|^{k-1}\right].$$

Принимая во внимание (21), имеем

$$\|L_k\|\left\|x-\sum_{i=1}^m (x,e_i)e_i\right\| \times$$

$$\times\left[\|x\|^{k-1} + \left\|\sum_{i=1}^m (x,e_i)e_i\right\|\|x\|^{k-2} + \dots + \left\|\sum_{i=1}^m (x,e_i)e_i\right\|^{k-1}\right] \le$$

$$\leq \|L_k\|\, \varepsilon_m(x) \left[\|x\|^{k-1} + (\|x\| + \varepsilon_m(x))\, \|x\|^{k-2} + \ldots + (\|x\| + \varepsilon_m(x))^{k-1} \right] =$$

$$= \varepsilon_m(x) \frac{\left\|F^{(k)}(0)\right\|}{(k-1)!} \|x\|^{k-1} + o(\varepsilon_m).$$

Следовательно,

$$\left\| L_k x^k - L_k \left(\sum_{i=1}^{m} (x, e_i) e_i, \ldots, \sum_{i=1}^{m} (x, e_i) e_i \right) \right\|_Y \leq$$

$$\leq \varepsilon_m(x) \frac{\|F^{(k)}(0)\|}{(k-1)!} \|x\|^{k-1} + o(\varepsilon_m). \tag{24}$$

Подставляя (24) в (23), получаем

$$\|T_n(x) - T_{m,n}(x)\|_Y \leq \varepsilon_m(x) \sum_{k=1}^{n} \frac{\|F^{(k)}(0)\|}{(k-1)!} \|x\|^{k-1} + o(\varepsilon_m). \tag{25}$$

На основании (22), (25) приходим к неравенству (20).

Теорема доказана.

***Замечание* 3.** Имеет место сходимость $T_{m,n}$ к T_n, т. е.

$$\|T_n(x) - T_{m,n}(x)\|_Y \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall x \in X.$$

Действительно, поскольку $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ — ортонормальный базис пространства X, то $\varepsilon_m(x) \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0 \; \forall x \in X$, и сходимость $T_{m,n}$ к T_n в метрике пространства Y при $m \to \infty$ непосредственно следует из оценки (25).

Отметим, что по сложности и информативности конструкции интерполяция типа Эрмита (4) занимает промежуточное место между интерполяционными операторными полиномами Лагранжа [3, 7] и Ньютона [6, 7]. Для построения интерполяционной формулы лагранжевого типа необходима информация лишь о значениях оператора в узлах. Построение интерполянта типа Эрмита (4) требует знания производных высших порядков оператора по направлениям ортонормального базиса, а конструкция операторного интерполянта Ньютона содержит разделенные разности высших порядков, которые могут быть заданы в виде кратных интегралов от операторных дифференциалов соответствующих порядков по направлениям, определяемым линейным оператором, зависящим от скалярного аргумента [6, 7]. С другой стороны, интерполяционная формула типа Ньютона имеет свойство сохранения полинома той же степени, тогда как в случае лагранжевой [4] и эрмитовой (4) интерполяции данное свойство имеет место лишь в асимптотике. Кроме того, в отличие от интерполяции Лагранжа, в случае интерполяции типа Эрмита (4) можно получить оценку точности интерполяционного процесса для операторов, имеющих конечное число высших производных Фреше.

В заключение отметим эквивалентность интерполяционной лагранжевой информации на множестве $\mathfrak{L}(m)$ в [4] и типа Эрмита (5) в случае, когда интерполируемый оператор является полиномом. Известно [4], что тогда значения операторных форм этого полинома

$$L_k(e_1, e_2, \ldots, e_k) = \frac{1}{k!} F^{(k)}(0) e_k \ldots e_2 e_1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

однозначно определяются через значения оператора в узлах множества $\mathfrak{L}(m)$ линейным преобразованием. Следовательно, матрица перехода от значений оператора на множестве $\mathfrak{L}(m)$ к значениям $L_k(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ невырождена, а значит, и обратное утверждение также имеет место. Кроме того, из результатов этой работы следует, что в конечномерных пространствах приближение будет точным на полиномах соответствующей степени, а в бесконечномерных — асимптотически точным.

1. *Макаров В. Л., Демків І. І., Михальчук Б. Р.* Інтегральний ланцюговий дріб — аналог формули Тейлора // Допов. НАН України. – 2004. – № 11. – С. 25 – 31.
2. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В.* Эрмитова интерполяция операторов в гильбертовых пространствах // Докл. РАН. – 1992. – **327**, № 2. – С. 183 – 186.
3. *Хлобыстов В. В., Кашпур Е. Ф.* К задаче интерполирования полиномиальных операторов // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – № 3. – С. 106 – 108.
4. *Хлобыстов В. В.* К вопросу о сходимости интерполяционных процессов в гильбертовом пространстве // Там же. – 2000. – № 6. – С. 166 – 172.
5. *Хлобыстов В. В., Кашпур Е. Ф.* Анализ точности интерполирования целых операторов в гильбертовом пространстве при возмущенных узловых значениях // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 7. – С. 953 – 960.
6. *Егоров А. Д., Соболевский П. Н., Янович Л. А.* Приближенные методы вычисления континуальных интегралов. – Минск: Наука и техника, 1985. – 310 с.
7. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В., Янович Л. А.* Интерполирование операторов. – Киев: Наук. думка, 2000. – 407 с.
8. *Filipsson L.* Kergin interpolation in Banach spaces // J. Approxim. Theory. – 2004. – **127**. – P. 108 – 123.
9. *Хлобистов В. В., Поповічєва Т. М.* Про двосторонні оцінки норми операторного полінома в гільбертовому просторі // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. наук. – 2004. – № 2. – С. 356 – 361.
10. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966. – 543 с.
11. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 495 с.
12. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3 т. – М.: Наука, 1971. – Т. 1. – 664 с.

Получено 28.01.2005