КОРОТКІ ПОВІДОМЛЕННЯ

УДК 517.51

О. О. Карлова, В. В. Михайлюк (Чернівец. нац. ун-т)

ФУНКЦІЇ ПЕРШОГО КЛАСУ БЕРА ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ В МЕТРИЗОВНИХ ПРОСТОРАХ

We show that every mapping of the first functional Lebesgue class acting from a topological space into an arcwise connected and locally arcwise connected separable metric space belongs to the first Baire class. We prove that the uniform limit of functions of the first Baire class $f_n : X \to Y$ belongs to the first Baire class if X is a topological space and Y is an arcwise connected and locally arcwise connected metric space.

Показано, що кожне відображення першого функціонального класу Лебега, яке діє з топологічного простору в лінійно зв'язний і локально лінійно зв'язний сепарабельний метризовний простір, належить до першого класу Бера. Встановлено, що рівномірна границя функцій першого класу Бера $f_n : X \to Y$ належить до першого класу Бера, якщо X — топологічний простір, Y — лінійно зв'язний і локально лінійно зв'язний метричний простір.

1. Для топологічних просторів X і Y через $B_1(X, Y)$ позначимо клас усіх відображень $f : X \to Y$ *першого класу Бера,* тобто поточкових границь послідовностей неперервних відображень $f_n : X \to Y$, а через $H_1^*(X, Y)$ — сукупність відображень $f : X \to Y$ *першого функціонального класу Лебега,* тобто таких, для яких прообраз $f^{-1}(G)$ відкритої в Y множини G подається у вигляді зліченного об'єднання функціонально замкнених у X множин. Для досконало нормального простору X клас $H_1^*(X, Y)$ збігається з класом $H_1(X, Y)$ усіх відображень $f : X \to Y$ *першого класу Лебега,* тобто таких, для яких прообраз $f^{-1}(G)$ відкритої в Y множини G подається у вигляді зліченного об'єднання замкнених у X множин.

Нагадаємо [1], що сім'я $\mathcal{B}$ підмножин простору X називається *базою для відображення* $f : X \to Y$, якщо прообраз $f^{-1}(G)$ довільної відкритої в Y множини G можна подати у вигляді об'єднання множин із $\mathcal{B}$. Якщо сім'я $\mathcal{B}$ є σ-дискретною, то називаємо її *σ-дискретною базою для* f і говоримо, що відображення f є *σ-дискретним.* Клас усіх σ-дискретних відображень $f : X \to Y$ будемо позначати $\Sigma(X, Y)$. Зауважимо, що кожне неперервне відображення, яке діє з метризовного простору, а також довільне відображення зі значеннями у просторі з другою аксіомою зліченності будуть σ-дискретними. Встановлено [2], що клас σ-дискретних відображень замкнений відносно поточкових границь.

Згідно з класичною теоремою Лебега – Хаусдорфа [3, с. 402], включення $H_1(X, Y) \subseteq B_1(X, Y)$ має місце у випадку, коли X — метризовний простір, а $Y = [0, 1]^n$, де $n \leq \aleph_0$.

У роботі [4] показано, що включення $H_1^*(X, Y) \subseteq B_1(X, Y)$ виконується, якщо X — топологічний простір, Y — метризовний сепарабельний топологічний векторний простір. Р. Ганселл [5] довів, що кожне відображення $f\colon X \to Y$ першого класу Лебега належить до першого класу Бера, якщо X — нормальний хаусдорфовий простір, а Y — повний сепарабельний метричний простір, який є абсолютним ретрактом. У статті [6] включення $H_1^*(X, Y) \subseteq B_1(X, Y)$ встановлено для топологічного простору X і зв'язної локально стягуваної множини $Y \subseteq \mathbb{R}^n$.

Зауважимо, що у згаданих вище результатах включення $H_1^* \subseteq B_1$ доводиться за класичною схемою: спочатку функція f першого класу Лебега подається у вигляді рівномірної границі простих функцій першого класу Бера, за допомогою яких потім, із використанням діагонального процесу, будується поточково збіжна до f послідовність неперервних функцій.

М. Фосгерау [7] запропонував інший підхід до встановлення включення $H_1^*(X, Y) \subseteq B_1(X, Y)$, який базується на понятті σ-дискретного відображення і якісно використовує метризовність просторів X і Y. Він показав, що кожне σ-дискретне відображення $f\colon X \to Y$ першого класу Лебега належить до першого класу Бера, якщо X — метризовний простір, а Y — лінійно зв'язний і локально лінійно зв'язний метризовний простір. Крім того, він встановив наступний факт.

Теорема (Фосгерау). *Нехай Y — повний метризовний простір. Тоді наступні умови є рівносильними*:

i) *Y зв'язний і локально зв'язний*;

ii) $B_1([0, 1], Y) = H_1([0, 1], Y)$;

iii) $B_1(X, Y) = H_1(X, Y) \cap \Sigma(X, Y)$ *для довільного метризовного простору X.*

Зокрема, у випадку, коли простір X метризовний, а Y — лінійно зв'язний і локально лінійно зв'язний сепарабельний метризовний простір, $B_1(X, Y) = H_1(X, Y)$.

У зв'язку з цим природно виникає питання про рівність $B_1(X, Y) = H_1^*(X, Y)$, коли X — довільний топологічний простір, а Y — сепарабельний лінійно зв'язний і локально лінійно зв'язний метричний простір. Крім того, на підставі новизни методу, запропонованого в [7], постає задача про належність до першого класу Бера рівномірної границі відображень першого класу Бера зі значеннями в метричному просторі.

У даній роботі, використовуючи теорему Фосгерау, ми спочатку даємо позитивну відповідь на перше з питань, а потім доводимо, що для довільного топологічного простору X і лінійно зв'язного і локально лінійно зв'язного метризовного простору Y множина $B_1(X, Y)$ замкнена відносно взяття рівномірної границі. На завершення наводимо приклад повного лінійно зв'язного метричного простору Y і відображення $f\colon [0, 1] \to Y$, яке є рівномірною границею відображень першого класу Бера, причому $f \notin B_1([0, 1], Y)$.

2. Наступний допоміжний результат дає можливість при вивченні відображень $f \in H_1^*(X, Y)$ переходити до метризовного простору X.

Твердження 1. *Нехай X — топологічний простір, Y — T_1-простір з другою аксіомою зліченності і $f \in H_1^*(X, Y)$. Тоді існують метризовний простір Z, неперервне відображення $\varphi\colon X \to Z$ і відображення $g \in H_1(Z, Y)$ такі, що $f(x) = g(\varphi(x))$ для кожного $x \in X$.*

Доведення. Нехай $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ — зліченна база у просторі Y. Оскільки $f \in H_1^*(X, Y)$, то $E_n = f^{-1}(V_n)$ є функціональними F_σ-множинами в X, тобто $E_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{nk}$, де $E_{nk} = \varphi_{nk}^{-1}(0)$ і $\varphi_{nk}\colon X \to [0, 1]$ — неперервні відображення.

Для довільних $n, k \in \mathbb{N}$ покладемо $Z_{nk} = [0, 1]$ і розглянемо неперервне відображення $\varphi: X \to \prod_{n,k=1}^{\infty} Z_{nk}$, $\varphi(x) = (\varphi_{nk}(x))_{n,k=1}^{\infty}$. Позначимо $Z = \varphi(X)$. Зрозуміло, що простір Z є метризовним.

Нехай $x_1, x_2 \in X$ такі, що $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$. Покажемо, що $f(x_1) = f(x_2)$. Припустимо, що $f(x_1) \neq f(x_2)$. Тоді існує $n \in \mathbb{N}$ таке, що $f(x_1) \in V_n$ і $f(x_2) \notin V_n$, тобто $x_1 \in E_n$ і $x_2 \notin E_n$. Виберемо $k \in \mathbb{N}$ так, що $x_1 \in E_{nk}$. Тоді $\varphi_{nk}(x_1) = 0$ і $x_2 \notin E_{nk}$, тобто $\varphi_{nk}(x_2) > 0$. Тому $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$. Таким чином, відображення $g: Z \to Y$, $g(z) = f(x)$, якщо $z = \varphi(x)$, визначене коректно.

Залишилось перевірити, що $g \in H_1(Z, Y)$. Для цього досить довести, що $F_n = g^{-1}(V_n)$ є F_σ-множиною в Z для кожного $n \in \mathbb{N}$. Для довільних $n, k \in \mathbb{N}$ покладемо $F_{nk} = \left\{ z = (z_{ij})_{i,j=1}^{\infty} \in Z: z_{nk} = 0 \right\}$ і покажемо, що $F_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_{nk}$.

Нехай $z = (z_{ij})_{i,j=1}^{\infty} \in F_n$. Візьмемо $x \in X$ таке, що $\varphi(x) = z$. Оскільки $f(x) = g(z) \in V_n$, то $x \in E_n$. Тому існує $k \in \mathbb{N}$ таке, що $x \in E_{nk}$. Тоді $\varphi_{nk}(x) = 0$, тобто $z_{nk} = 0$, отже, $z \in F_{nk}$.

Тепер нехай $z = (z_{ij})_{i,j=1}^{\infty} \in F_{nk}$ для деяких $n, k \in \mathbb{N}$. Вибравши $x \in X$ так, що $\varphi(x) = z$, одержимо $\varphi_{nk}(x) = 0$. Тому $x \in E_{nk} \subseteq E_n$ і $g(z) = f(x) \in V_n$, тобто $z \in F_n$.

Оскільки всі множини F_{nk} замкнені, то F_n є F_σ-множиною.

Теорема 1. *Нехай X — топологічний простір, Y — лінійно зв'язний і локально лінійно зв'язний метризовний простір, $f: X \to Y$ — відображення першого функціонального класу Лебега таке, що множина $f(X)$ сепарабельна. Тоді $f \in B_1(Z, Y)$.*

Доведення. Згідно з твердженням 1, існують метризовний простір Z, неперервне відображення $\varphi: X \to Z$ і відображення $g \in H_1(Z, Y)$ такі, що $f(x) = g(\varphi(x))$ для кожного $x \in X$. Відображення g є σ-дискретним, адже множина $g(Z) = f(X)$ сепарабельна, отже, з другою аксіомою зліченності. Тому з теореми Фосгерау випливає, що $g \in B_1(Z, Y)$, тобто існує послідовність неперервних відображень $g_n: Z \to Y$, яка поточково збігається до відображення g на Z. Покладаючи $f_n(x) = g_n(\varphi(x))$, одержуємо послідовність неперервних відображень $f_n: X \to Y$. Тоді $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(\varphi(x)) = g(\varphi(x)) = f(x)$ для довільного $x \in X$.

Теорему 1 доведено.

3. Тепер перейдемо до встановлення належності до першого класу Бера рівномірної границі функцій першого класу Бера.

Теорема 2. *Нехай X — топологічний простір, Y — лінійно зв'язний і локально лінійно зв'язний метризовний простір, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ — рівномірно збіжна до відображення $f: X \to Y$ послідовність відображень $f_n \in B_1(X, Y)$. Тоді $f \in B_1(X, Y)$.*

Доведення. Відображення $f_n: X \to Y$ належить до першого класу Бера, тому для кожного n існує така послідовність неперервних відображень $g_{nm}: X \to Y$, що $\lim_{m\to\infty} g_{nm}(x) = f_n(x)$ для кожного $x \in X$. Позначимо $\mathcal{F} = \{ g_{nm}: n, m \in \mathbb{N} \}$ і розглянемо відображення $\varphi: X \to Y^{\mathcal{F}}$, $\varphi(x)(g) = g(x)$. Оскільки всі відображення $g \in \mathcal{F}$ є неперервними, то φ також неперервне. Покладемо $Z = \varphi(X)$. Оскільки множина $\mathcal{F}$ не більш ніж зліченна, то простір $Y^{\mathcal{F}}$ є метризовним, тому і простір $Z \subseteq Y^{\mathcal{F}}$ — метризовний. Зауважимо, що для кожного $g \in \mathcal{F}$ відображення $\pi_g : Z \to Y$, $\pi_g(z) = z(g)$, також неперервне. Для кожного $n, m \in \mathbb{N}$ покладемо $h_{nm} = \pi_{g_{nm}}$.

Нехай $x \in X$, $z \in Z$ і $z = \varphi(x)$. Тоді $h_{nm}(z) = z(g_{nm}) = \varphi(x)(g_{nm}) = g_{nm}(x)$ і для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо $h_n(z) = \lim_{m\to\infty} h_{nm}(z) = \lim_{m\to\infty} g_{nm}(x) = f_n(x)$ і $h(z) = \lim_{n\to\infty} h_n(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Зрозуміло, що всі h_n є функціями першого класу Бера і послідовність h_n рівномірно збігається до h. Тоді функції $h_n : Z \to Y$ належать до першого класу Лебега і є σ-дискретними. Тому такою ж буде і функція h. Згідно з теоремою Фосгерау, $h \in B_1(Z, Y)$. Тому існує послідовність неперервних функцій $\tilde{h}_n : Z \to Y$ така, що $h(z) = \lim_{n\to\infty} \tilde{h}_n(z)$ для всіх $z \in Z$. Покладемо $\tilde{f}_n : X \to Y$, $\tilde{f}_n(x) = \tilde{h}_n(\varphi(x))$. Зрозуміло, що всі $\tilde{f}_n$ неперервні і $\lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n(x) = \lim_{n\to\infty} \tilde{h}_n(\varphi(x)) = h(\varphi(x)) = f(x)$. Отже, $f \in B_1(X, Y)$.

Теорему 2 доведено.

4. На завершення наведемо приклад, який вказує на істотність умови локальної лінійної зв'язності простору Y в теоремі 2.

Зауважимо спочатку, що, згідно з теоремою Фосгерау, для довільного сепарабельного лінійно зв'язного повного метричного простору Y, який не є локально лінійно зв'язним, $B_1([0, 1], Y) \neq H_1([0, 1], Y)$. Враховуючи, що $B_1([0, 1], Y) \subseteq H_1([0, 1], Y)$, одержуємо, що існує функція $f \in H_1 \setminus B_1$. Тоді, оскільки Y сепарабельний, f є рівномірною границею простих функцій $f_n \in H_1([0, 1], Y)$, тобто таких, що $|f_n([0, 1])| \leq \aleph_0$. З лінійної зв'язності простору Y випливає, що $f_n \in B_1([0, 1], Y)$.

Наведемо приклад такого простору Y і відображення f.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо $\varphi_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}$, $p_n = (\cos\varphi_n, \sin\varphi_n)$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. Позначимо

$$Y = \bigcup_{n=0}^{\infty} [0, p_n], \qquad Y_n = \bigcup_{k=1}^{n} [0, p_k].$$

Тоді простір Y є повним, сепарабельним, лінійно зв'язним, але не є локально лінійно зв'язним, а всі простори Y_n є повними лінійно зв'язними і локально лінійно зв'язними.

Занумеруємо множину раціональних чисел $\mathbb{Q}$ з відрізка $[0, 1]$ у послідовність $\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ і для кожного $t \in [0, 1]$ покладемо

$$f(t) = \begin{cases} p_n, & x = r_n, \\ p_0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ розглянемо відображення $f_n : [0, 1] \to Y_n$,

$$f_n(t) = \begin{cases} p_k, & x = r_k, \quad 1 \leq k < n, \\ p_n, & x \in [0,1] \setminus \{ r_1, \ldots, r_{n-1} \}. \end{cases}$$

Відображення f_n належать до першого класу Лебега. Оскільки всі Y_n лінійно зв'язні і локально лінійно зв'язні, то $f_n \in B_1(X, Y_n)$. Зрозуміло, що послідовність (f_n) рівномірно збігається до f.

Покажемо, що $f \notin B_1([0, 1], Y)$. Припустимо, що існує така послідовність неперервних функцій $g_n: [0, 1] \to Y$, що $f(t) = \lim_{n\to\infty} g_n(t)$ для кожного $t \in [0, 1]$. Згідно з теоремою Осгуда [8], існують відкритий непорожній інтервал $U \subseteq [0, 1]$ і $n_0 \in \mathbb{N}$ такі, що $\left| f(t) - g_n(t) \right| < 1/4$ для всіх $t \in U$ і $n \geq n_0$. Нехай $t_0 \in U \setminus \mathbb{Q}$ і $r_m \in U$, $t_0 < r_m$. Виберемо околи V_1 і V_2 точок p_0 і p_m в Y так, щоб $\{ n > 0: V_1 \cap [0, p_n] \neq \varnothing \} = \varnothing$ і $\{ n \geq 0: V_2 \cap [0, p_n] \neq \varnothing$ і $n \neq m \} = \varnothing$. Оскільки $\lim_{n\to\infty} g_n(t_0) = p_0$ і $\lim_{n\to\infty} g_n(r_m) = p_m$, то існує такий номер $k \geq n_0$, що $g_k(t_0) \in V_1$ і $g_k(r_m) \in V_2$.

Покажемо, що існує $t_1 \in [t_0, r_m]$ таке, що $g_k(t_1) = 0$. Нехай це не так, тобто $g_k([t_0, r_m]) \subseteq Y \setminus \{0\}$. Виберемо $i \in \mathbb{N}$ так, що $g_k(r_m) \in (0, p_i]$. Позначимо $G_1 = (0, p_i]$ і $G_2 = \bigcup_{j \neq i} (0, p_j]$. Тоді $g_k(t_0) \in G_2$. Множини G_1 і G_2 відкриті в Y, тому множини $g_k^{-1}(G_1)$ і $g_k^{-1}(G_2)$ теж відкриті в $[0, 1]$, причому $[t_0, r_m] = g_k^{-1}(G_1) \coprod g_k^{-1}(G_2)$, що суперечить зв'язності відрізка $[t_0, r_m]$.

Отже, існує таке $t_1 \in U$, що $g_k(t_1) = 0$. Але тоді $\left| f(t_1) \right| < 1/4$, що неможливо, згідно з означенням функції f. Таким чином, $f \notin B_1([0, 1], Y)$.

1. *Hansell R. W.* Borel measurable mappings for nonseparable metric spaces // Trans. Amer. Math. Soc. – 1971. – **161**. – P. 145–169.
2. *Hansell R. W.* Extended Bochner measurable selectors // Math. Ann. – 1987. – **277**. – P. 79–94.
3. *Куратовский К.* Топология: В 2 т. – М.: Мир, 1966. – Т. 1. – 594 с.
4. *Карлова О. О.* Перший функціональний лебегівський клас і берівська класифікація нарізно неперервних відображень // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2004. – Вип. 191–192. – С. 52–60.
5. *Hansell R. W.* Lebesgue's theorem on Baire class 1 functions // Topology with Appl., Szekszard (Hungary). – 1993. – P. 251–257.
6. *Карлова О. О.* Берівська класифікація відображень зі значеннями у підмножинах скінченновимірних просторів // Наук. вісн. Чернівец. ун-ту. Математика. – 2005. – Вип. 239. – С. 59–65.
7. *Fosgerau M.* When are Borel functions Baire functions? // Fund. Math. – 1993. – **143**. – P. 137–152.
8. *Osgood W. F.* Über die ungleichmässige Convergenz und die gliedweise Integration der Reihen // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. – 1896. – S. 288–291.

Одержано 28.06.2005