УДК 517.5

В. В. Савчук (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЗОБРАЖЕННЯ ГОЛОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ ІНТЕГРАЛАМИ ТИПУ КОШІ – СТІЛЬТЬЄСА

We consider functions of several complex variables which are holomorphic in the polydisk or upper polyhalf plane. We give necessary and sufficient conditions to ensure that the holomorphic function is a Cauchy – Stieltjes-type integral of a complex signed measure. We show some applications of this criterion to integral representations of certain classes of holomorphic functions.

Розглядаються функції багатьох комплексних змінних, які є голоморфними в полікрузі або у верхній поліпівплощині. Наведено необхідні і достатні умови того, що голоморфна функція є інтегралом типу Коші – Стільтьєса комплексного заряду. Показано декілька застосувань цього критерію до інтегральних зображень деяких класів голоморфних функцій.

Вступ. У даній роботі наведено результати досліджень, які мотивовані двома класичними теоремами, авторство котрих присвоюють Р. Неванліні, Ф. Ріссу і Ґ. Герґлотцу.

Теорема A. *Для того щоб голоморфну у верхній півплощині* $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ *функцію* f *можна було зобразити у вигляді*

$$f(z) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(x)}{x - z}, \quad z \in \mathbb{H}, \tag{1}$$

де μ *— неспадна функція обмеженої варіації на* $\mathbb{R}$, *необхідно і достатньо, щоб*

$$\operatorname{Im} f \geq 0 \quad i \quad \sup_{0<y<\infty} |yf(iy)| < \infty.$$

Теорема B. *Для того щоб голоморфну в крузі* $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ *функцію* g *можна було зобразити у вигляді*

$$g(z) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\nu(t)}{1 - e^{-it}z} - \overline{g(0)}, \quad z \in \mathbb{D},$$

де ν *— неспадна на* $[0, 2\pi]$ *функція, необхідно і достатньо, щоб* $\operatorname{Re} g \geq 0$.

Ці твердження є лише фрагментом великої серії теорем про інтегральні зображення (інтегралами типу Коші – Стільтьєса) класів голоморфних функцій у верхній півплощині або в одиничному крузі комплексної площини. У монографіях [1; 2, с. 219 – 226; 3, с. 519 – 530], [4] (гл. XI, § 9), [5, 6] (лекція 14) можна знайти огляд частини із таких результатів, що мають безпосереднє застосування в теоріях, котрим присвячено ці книги.

У багатовимірному випадку нам відомо про аналоги теорем A і B, які отримано в [7 – 10], а також у роботах, згаданих в огляді [11] (гл. 4, § 4).

Зазначимо, що теорема B вкладається у схему, за якою в [12] отримано наступну теорему про опис множини голоморфних у розширеній комплексній площині з розрізом вздовж одиничного кола функцій, що допускають інтегральне зображення інтегралами типу Коші – Стільтьєса.

Теорема C. *Для того щоб голоморфну в* $\Omega := \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |z| \neq 1\}$ *функцію* f *можна було зобразити у вигляді*

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{d\mu(t)}{1 - e^{-it}z}, \quad z \in \Omega,$$

де μ — деяка комплекснозначна функція обмеженої варіації на $[0, 2\pi]$, необхідно і достатньо, щоб

$$f(\infty) = 0 \quad i \quad \sup_{0 \le \varrho < 1} \int_0^{2\pi} |f(\varrho e^{it}) - f(\varrho^{-1} e^{it})| dt < \infty. \tag{2}$$

Ідея доведення цього твердження базується на тому факті, що за умов (2) функція $z \mapsto f(z) - f(1/\overline{z})$ є гармонічною функцією класу h_1 в одиничному крузі, а відтак може бути зображена інтегралом Пуассона (див., наприклад, [4, с. 374; 13, с. 2])

$$f(\varrho e^{it}) - f(\varrho^{-1} e^{it}) = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \varrho^2}{1 - 2\varrho \cos(t - \theta) + \varrho^2} d\mu(\theta),$$

в якому $d\mu$ є слабкою границею при $r \to 1$ сім'ї комплексних зарядів $\big(f(re^{i\theta}) - -f(r^{-1}e^{i\theta})\big)d\theta$, $0 \le r < 1$.

Неважко помітити, що ця ідея є дієвою і для доведення аналога теореми С стосовно функцій, голоморфних у розширеній комплексній площині з розрізом вздовж дійсної осі (див. теорему 2).

Основною метою даної роботи є подальший розвиток такої ідеї з намаганням отримати аналоги теореми С для функцій багатьох змінних.

Побічною метою було показати певний зв'язок основних результатів з твердженнями, що є аналогами в багатовимірному випадку класичних теорем теорії функцій, таких як теореми А, В і теорема братів Ріссів.

Звісно, в математичній літературі досить повно висвітлені різноманітні аналоги цих тверджень стосовно функцій багатьох змінних (див. коментарі до теореми 5), тому ми не стільки претендуємо на авторство, як прагнемо дати нові доведення з єдиної методичної точки зору.

Позначення. Нехай n — довільне натуральне число, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Z}^n$ і $\mathbb{N}^n$ — множини всіх упорядкованих наборів $\mathbf{z} := (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ відповідно з n комплексних, дійсних, цілих і натуральних чисел. Будемо розглядати $\mathbb{C}^n$ з топологічної точки зору, тобто як евклідів простір виміру $2n$.

Розширений простір позначимо як $\widehat{\mathbb{C}}^n := \mathbb{C} \cup \{\infty\} \times \ldots \times \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, зокрема, $\widehat{\mathbb{C}}^n$ можемо ототожнювати з декартовим добутком n сфер Рімана.

Одиничний полікруг в $\mathbb{C}^n$, його кістяк і верхній півпростір у $\widehat{\mathbb{C}}^n$ будемо позначати відповідно через $\mathbb{D}^n$, $\mathbb{T}^n$ і $\mathbb{H}^n$, тобто

$$\mathbb{D}^n := \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n : \max_{1 \le j \le n} |z_j| < 1 \right\},$$

$$\mathbb{T}^n := \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n : |z_j| = 1, \ j = \overline{1, n} \right\},$$

$$\mathbb{H}^n := \left\{ \mathbf{z} \in \widehat{\mathbb{C}}^n : \operatorname{Im} z_j > 0, \ j = \overline{1, n} \right\}.$$

Зрозуміло, що простір $\mathbb{R}^n$ є кістяком для $\mathbb{H}^n$.

У випадку, коли $n = 1$, верхнім індексом у цих та похідних позначеннях будемо нехтувати.

Нехай $\mathbb{X} = \mathbb{T}^n \vee \mathbb{R}^n$, $\mathfrak{B}(\mathbb{X})$ — борелівська σ-алгебра підмножин $\mathbb{X}$. *Скінченну комплексну σ-адитивну функцію μ, визначену на $\mathfrak{B}(\mathbb{X})$, таку, що $\mu(\varnothing) = 0$, будемо називати зарядом.* Заряд μ, який можна зобразити як $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, де $0 \leq \mu_i(E) < < \infty$, $i = 1, 2$, для будь-якого $E \in \mathfrak{B}(\mathbb{X})$, будемо називати комплексною борелівською мірою, і якщо $\mu_2 \equiv 0$, то просто борелівською.

Скрізь далі, стверджуючи, що μ — заряд на $\mathbb{X}$, будемо розуміти під цим заряд μ, визначений на $\mathfrak{B}(\mathbb{X})$.

Через σ_n позначимо нормовану міру Лебега на $\mathbb{T}^n$, а для міри Лебега на $\mathbb{R}^n$ використаємо позначення m_n.

Нехай E — компактна підмножина $\mathbb{X}$, тоді $C(E)$ — банахів простір неперервних комплекснозначних функцій f на E з нормою $\|f\|_{C(E)} := \max\limits_{\mathbf{z}\in E} |f(\mathbf{z})|$.

Носієм функції f, визначеної на підмножині $E \subset \mathbb{R}^n$, називається замикання в $\mathbb{R}^n$ множини тих точок $\mathbf{x} \in E$, для яких $f(\mathbf{x}) \neq 0$. Нехай $C^0(E)$ — банахів простір із нормою $\|\cdot\|_{C(E)}$ неперервних на E функцій, носії яких є компактними.

Через $|\mu|(E)$ позначимо варіацію заряду μ на $E \in \mathfrak{B}(\mathbb{X})$ і будемо під цим розуміти норму лінійного функціонала

$$f \mapsto F_\mu(f) := \int\limits_E f d\mu, \quad f \in C(E).$$

Якщо $E = \mathbb{R}^n$, то під варіацією $|\mu|(\mathbb{R}^n)$ розуміємо границю в сенсі Прингсгейма

$$|\mu|(\mathbb{R}^n) := \lim_{\mathbf{q}\to\infty} |\mu|(B_{\mathbf{q}}),$$

де $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$, $q_j > 0$ і $B_{\mathbf{q}} := \prod_{j=1}^n [-q_j, q_j]$.

Якщо μ — дійсний заряд, то норма функціонала F_μ — повна варіація заряду μ у звичайному розумінні, тобто $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$, де μ^+ і μ^- — верхня і нижня варіації заряду μ.

Нехай μ — деякий заряд на $\mathbb{X}$, тоді

$$\widehat{d\mu}(\mathbf{t}) := (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{X}} e^{-i(\mathbf{w},\mathbf{t})} d\mu(\mathbf{w}), \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n, \quad (\mathbf{w}, \mathbf{t}) := w_1 t_1 + \ldots + w_n t_n,$$

— перетворення Фур'є, якщо $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$, і коефіцієнт Фур'є заряду μ, якщо $\mathbb{X} = \mathbb{T}^n$.

Покладемо

$$C(\mathbf{z}, \mathbf{w}) := \prod_{j=1}^n (1 - z_j \overline{w_j})^{-1}, \qquad \mathcal{C}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) := \prod_{j=1}^n (w_j - z_j)^{-1},$$

$$P(\mathbf{z}, \mathbf{w}) := \frac{|C(\mathbf{z}, \mathbf{w})|^2}{C(\mathbf{z}, \mathbf{z})}, \qquad \mathcal{P}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) := (2i)^{-n} \frac{|\mathcal{C}(\mathbf{z}, \mathbf{w})|^2}{\mathcal{C}(\overline{\mathbf{z}}, \mathbf{z})},$$

$$K(d\mu)(\mathbf{z}) := \int\limits_{\mathbb{T}^n} C(\mathbf{z}, \mathbf{w}) d\mu(\mathbf{w}), \qquad \mathcal{K}(d\mu)(\mathbf{z}) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{C}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) d\mu(\mathbf{w}),$$

$$P(d\mu)(\mathbf{z}) := \int\limits_{\mathbb{T}^n} P(\mathbf{z}, \mathbf{w}) d\mu(\mathbf{w}), \qquad \mathcal{P}(d\mu)(\mathbf{z}) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{P}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) d\mu(\mathbf{w}).$$

Функції $\mathbf{z} \mapsto K(d\mu)(\mathbf{z})$ і $\mathbf{z} \mapsto \mathcal{K}(d\mu)(\mathbf{z})$ є голоморфними відповідно в областях

$$\Omega^n := \widehat{\mathbb{C}}^n \setminus \mathbb{T}^n \quad \text{i} \quad \Delta^n := \widehat{\mathbb{C}}^n \setminus \mathbb{R}^n.$$

Будемо називати їх інтегралами типу Коші – Стільтьєса заряду μ на $\mathbb{T}^n$ і $\mathbb{R}^n$ відповідно.

Функції $\mathbf{z} \mapsto P(d\mu)(\mathbf{z})$ і $\mathbf{z} \mapsto \mathcal{P}(d\mu)(\mathbf{z})$ є n-гармонічними в $\mathbb{D}^n$ та $\mathbb{H}^n$ відповідно і називаються інтегралами Пуассона заряду μ в зазначених областях. Як завжди, під висловом „голоморфна і n-гармонічна" будемо розуміти голоморфність і гармонічність по кожній змінній окремо.

Якщо G — область в $\widehat{\mathbb{C}}^n$, то через $\mathrm{Hol}(G)$ будемо позначати множину всіх функцій, голоморфних в G.

Нехай $\mathcal{N} := \{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathfrak{N}$ — множина всіх підмножин множини $\mathcal{N}$, α — елемент (впорядкована підмножина) $\mathfrak{N}$, $\#\alpha$ — потужність множини α і $\overline{\alpha}$ — доповнення множини α до множини $\mathcal{N}$. Крім того, нехай $\alpha \in \mathfrak{N}$, $\mathbf{z} \in \widehat{\mathbb{C}}^n$ і $\varrho_1,\ \varrho_2 \in \mathbb{C}$. Покладемо

$$(\varrho_1 \mathbf{z}_\alpha, \varrho_2 \mathbf{z}_{\overline{\alpha}}) := (w_1, \ldots, w_n),$$

де

$$w_j = \begin{cases} \varrho_1 z_j, & j \in \alpha, \\ \varrho_2 z_j, & j \in \overline{\alpha}. \end{cases}$$

Якщо $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, а $\alpha \in \mathfrak{N}$, то покладаємо

$$(\mathbf{x}_\alpha + iy, \mathbf{x}_{\overline{\alpha}} - iy) := (w_1, \ldots, w_n),$$

де

$$w_j = \begin{cases} x_j + iy, & j \in \alpha, \\ x_j - iy, & j \in \overline{\alpha}. \end{cases}$$

Якщо ж в наборі $\mathbf{z}_\alpha$ всі компоненти є такими, що $z_{j_1} = \ldots = z_{j_{\#\alpha}} = \infty$, то такий набір будемо позначати символом ∞_α.

Основні результати будуть сформульовані в термінах перетворення $f \mapsto \mathfrak{f}_\varrho$, яке діє за правилом

$$\mathfrak{f}_\varrho(\mathbf{z}) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{N}} (-1)^{n-\#\alpha} f(\varrho \mathbf{z}_\alpha, \varrho^{-1} \mathbf{z}_{\overline{\alpha}}), \qquad \mathbf{z} \in \mathbb{T}^n, \quad \varrho \geq 0,$$

якщо $f \in \mathrm{Hol}(\Omega^n)$, і

$$\mathfrak{f}_\varrho(\mathbf{x}) = (2i)^{-n} \sum_{\alpha \in \mathfrak{N}} (-1)^{n-\#\alpha} f(\mathbf{x}_\alpha + i\varrho, \mathbf{x}_{\overline{\alpha}} - i\varrho), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \varrho > 0, \tag{3}$$

якщо $f \in \mathrm{Hol}(\Delta^n)$. Скрізь далі такі перетворення функцій, позначених латинськими літерами, будемо позначати відповідними малими готичними літерами.

Основні результати. Насамперед зазначимо, що всі твердження стосовно функцій, голоморфних у Ω^n, подаються з детальними доведеннями. Після доведення кожного такого твердження, за винятком теорем 7 – 9, формулюється його аналог для функцій, голоморфних у Δ^n. При цьому доведення даються схематично, оскільки вони, як правило, повторюють міркування доведень попередніх тверджень.

Теорема 1. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathrm{Hol}(\Omega^n)$. *Функцію* f *можна зобразити у вигляді* $f = K(d\mu)$, *де* μ — *деякий заряд на* $\mathbb{T}^n$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$f(\infty_\alpha, \mathbf{z}_{\overline{\alpha}}) = 0 \quad \forall\, \mathbf{z}_{\overline{\alpha}} \in \mathbb{C}^{\#\overline{\alpha}} \setminus \mathbb{T}^{\#\overline{\alpha}} \quad \forall\, \alpha \in \mathfrak{N} \setminus \varnothing \tag{4}$$

і

$$\sup_{0 \le \varrho < 1} \int\limits_{\mathbb{T}^n} |\mathfrak{f}_\varrho| d\sigma_n < \infty. \tag{5}$$

Умови (4) *і* (5) *визначають заряд* μ *однозначно.*

***Доведення теореми* 1.** *Необхідність.* Нехай $f = K(d\mu)$. Виконання умов (4) є очевидним. Для доведення (5) зауважимо, що

$$P(\varrho\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1 - \varrho_j^2}{|1 - \varrho_j z_j \overline{w_j}|^2} =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \Big(C(\varrho z_j, w_j) - C(\varrho^{-1} z_j, w_j) \Big) \quad \forall\, \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{T}^n, \quad 0 \le \varrho < 1.$$

Звідси випливає

$$P(\varrho\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{N}} (-1)^{n - \#\alpha} \left(\prod_{j \in \alpha} C(\varrho z_j, w_j) \prod_{i \in \overline{\alpha}} C(\varrho^{-1} z_i, w_i) \right) =$$

$$= \sum_{\alpha \in \mathfrak{N}} (-1)^{n - \#\alpha} C\big((\varrho\mathbf{z}_\alpha, \varrho^{-1}\mathbf{z}_{\overline{\alpha}}), \mathbf{w}\big) \quad \forall\, \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{T}^n, \quad 0 \le \varrho < 1.$$

Отже, для будь-якого $\varrho \in [0, 1)$

$$\mathfrak{f}_\varrho(\mathbf{z}) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{N}} (-1)^{n - \#\alpha} f(\varrho\mathbf{z}_\alpha, \varrho^{-1}\mathbf{z}_{\overline{\alpha}}) =$$

$$= \sum_{\alpha \in \mathfrak{N}} (-1)^{n - \#\alpha} K(d\mu)(\varrho\mathbf{z}_\alpha, \varrho^{-1}\mathbf{z}_{\overline{\alpha}}) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{T}^n} \left(\sum_{\alpha \in \mathfrak{N}} (-1)^{n - \#\alpha} C\big((\varrho\mathbf{z}_\alpha, \varrho^{-1}\mathbf{z}_{\overline{\alpha}}), \mathbf{w}\big) \right) d\mu(\mathbf{w}) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{T}^n} P(\varrho\mathbf{z}, \mathbf{w}) d\mu(\mathbf{w}) = P(d\mu)(\varrho\mathbf{z}) \quad \forall\, z \in \mathbb{T}^n, \tag{6}$$

звідки

$$|\mathfrak{f}_\varrho(\mathbf{z})| \le \int\limits_{\mathbb{T}^n} P(\varrho\mathbf{z}, \mathbf{w}) d|\mu|(\mathbf{w}) \quad \forall\, \mathbf{z} \in \mathbb{T}^n, \quad 0 \le \varrho < 1, \tag{7}$$

де $|\mu|$ — варіація заряду μ, яка відіграє тут роль борелівської міри.

Інтегруючи за мірою Лебега σ_n по $\mathbb{T}^n$ обидві частини нерівності (7) і змінюючи порядок інтегрування в повторному інтегралі (це можна зробити за теоремою Фубіні (див., наприклад, [14, с. 116]), одержуємо

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n} |\mathfrak{f}_\varrho| d\sigma_n \le \int\limits_{\mathbb{T}^n} d|\mu| = |\mu|(\mathbb{T}^n) < \infty, \quad 0 \le \varrho < 1.$$

Останнє співвідношення доводить необхідність умов теореми.

Достатність. Нехай виконуються умови (4) і (5). Тоді сім'я функцій $\{\mathfrak{f}_\varrho\}_{0\le\varrho<1}$, визначених на $\mathbb{T}^n$, є обмеженою в $L_1(\mathbb{T}^n)$, тобто

$$\|\mathfrak{f}_\varrho\|_{L_1(\mathbb{T}^n)} := \int\limits_{\mathbb{T}^n} |\mathfrak{f}_\varrho| d\sigma_n \le K < \infty, \quad 0 \le \varrho < 1,$$

а тому сім'я $\{\mu_\varrho\}_{0\le\varrho<1}$ абсолютно неперервних відносно міри σ_n зарядів μ_ϱ на $\mathbb{T}^n$ зі щільностями $\mathfrak{f}_\varrho$, тобто таких, що $\mu_\varrho(E) = \int_E \mathfrak{f}_\varrho d\sigma_n$, $E \in \mathfrak{B}(\mathbb{T}^n)$, є обмеженою за варіацією :

$$|\mu_\varrho|(\mathbb{T}^n) \le \|\mathfrak{f}_\varrho\|_{L_1(\mathbb{T}^n)} \le K < \infty, \quad 0 \le \varrho < 1. \tag{8}$$

Будемо розглядати заряди μ_ϱ як елементи спряженого до $C(\mathbb{T}^n)$ простору $C^*(\mathbb{T}^n)$ (це коректно згідно з теоремою Ф. Рісса (див., наприклад, [14, с. 112]) про загальний вигляд неперервного лінійного функціонала в $C(\mathbb{T}^n)$).

У такому розумінні згідно з умовами (8) сім'я функціоналів $\{\mu_\varrho\}_{0\le\varrho<1}$ належить кулі радіуса K простору $C^*(\mathbb{T}^n)$, і оскільки ця куля є компактом у слабкій топології $C^*(\mathbb{T}^n)$ (див., наприклад, [14, с. 223], [15], гл. V), то можна вказати послідовність $\{\varrho_j\}_{j=1}^\infty$, $\varrho_j \to 1-$, $j \to \infty$, таку, що послідовність функціоналів $\{\mu_{\varrho_j}\}_{j=1}^\infty$ буде слабко збігатися до деякого функціонала μ, тобто $\mu_{\varrho_j} \to \mu$, $j \to \infty$. У термінах зарядів, знову ж таки на підставі теореми Ф. Рісса, останнє означає, що

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\mathbb{T}^n} g\mathfrak{f}_{\varrho_j} d\sigma_n = \int\limits_{\mathbb{T}^n} g d\mu \quad \forall\, g \in C(\mathbb{T}^n).$$

Зокрема, для кожного $\mathbf{z} \in \Omega^n$, згідно з умовою (4), маємо рівності

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n} C(\mathbf{z},\mathbf{w}) d\mu(\mathbf{w}) = \lim_{j\to\infty} \int\limits_{\mathbb{T}^n} C(\mathbf{z},\mathbf{w}) \mathfrak{f}_{\varrho_j}(\mathbf{w}) d\sigma_n(\mathbf{w}) =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \int\limits_{\mathbb{T}^n} C(\mathbf{z},\mathbf{w}) \sum_{\alpha\in\mathfrak{N}} (-1)^{n-\#\alpha} f(\varrho_j \mathbf{w}_\alpha, \varrho_j^{-1}\mathbf{w}_{\overline{\alpha}}) d\sigma_n(\mathbf{w}) =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \sum_{\alpha\in\mathfrak{N}} (-1)^{n-\#\alpha} \int\limits_{\mathbb{T}^n} f(\varrho_j \mathbf{w}_\alpha, \varrho_j^{-1}\mathbf{w}_{\overline{\alpha}}) C(\mathbf{z},\mathbf{w}) d\sigma_n(\mathbf{w}) =$$

$$= \lim_{j\to\infty} f(\varrho_j \mathbf{z}) = f(\mathbf{z}). \tag{9}$$

Якщо μ_1 і μ_2 — два заряди на $\mathbb{T}^n$ такі, що $f = K(d\mu_1) = K(d\mu_2)$, то згідно з (6) $0 = P(d\lambda)$, $\lambda = \mu_1 - \mu_2$. Звідси (див., наприклад, [16], виноска на с. 22) випливає, що $\lambda \equiv 0$.

Теорему доведено.

Теорема 2. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathrm{Hol}(\Delta^n)$. Функцію f можна зобразити у вигляді $f = \mathcal{K}(d\mu)$, де μ — деякий заряд на $\mathbb{R}^n$ такий, що $|\mu|(\mathbb{R}^n) < \infty$, тоді і тільки тоді, коли*

$$\forall\, \delta > 0 \quad \forall\, \alpha \in \mathfrak{N} \setminus \varnothing : \quad \lim_{\substack{\mathbf{z}_\alpha \to \infty_\alpha \\ |\operatorname{Im} \mathbf{z}_\alpha| \ge \delta}} f(\mathbf{z}_\alpha, \mathbf{z}_{\overline{\alpha}}) = 0 \tag{10}$$

i

$$\sup_{0<y<\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\mathfrak{f}_y|\, dm_n < \infty. \tag{11}$$

Під границею в (10) розуміємо границю (за Прингсгеймом), коли кожна координата точки $\mathbf{z} \in \widehat{\mathbb{C}}^n$, індекс якої належить множині α, прямує до нескінченно віддаленої точки в $\widehat{\mathbb{C}}$ вздовж будь-якої кривої, що лежить поза смугою $\{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |\operatorname{Im} z| < \delta\}$.

***Доведення теореми* 2.** *Необхідність* умов (10) доводиться у відомий спосіб [17] (див. також [13, с. 190]). Маємо

$$|f(\mathbf{z})| \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{C}(\mathbf{z}, \mathbf{w})| d|\mu|(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{z} \in \Delta^n. \tag{12}$$

Нехай $\varepsilon > 0$. Виберемо вектор $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$, так, щоб

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\mathbf{q}}} d|\mu| < \varepsilon,$$

де $B_{\mathbf{q}} = \prod_{j=1}^n (-q_j, q_j)$.

Тоді для кожного $\alpha \in \mathfrak{N} \setminus \varnothing$, продовжуючи оцінку (12), отримуємо

$$|f(\mathbf{z})| \le \int\limits_{\overline{B_{\mathbf{q}}}} |\mathcal{C}(\mathbf{z}, \mathbf{w})| d|\mu|(\mathbf{w}) + \frac{\varepsilon}{\operatorname{Im} z_1 \ldots \operatorname{Im} z_n} =$$

$$= \prod_{j \in \overline{\alpha}} \frac{1}{\operatorname{Im} z_j} \left(O\left(\prod_{j \in \alpha} \frac{1}{|z_j|} \right) + \frac{\varepsilon}{\delta^{\#\alpha}} \right) \quad (\mathbf{z}_\alpha \to \infty_\alpha,\ |\operatorname{Im} \mathbf{z}_\alpha| > \delta),$$

звідки і випливає (10).

Далі, рівність

$$\mathfrak{f}_y(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{P}(\mathbf{x} + iy, \mathbf{w}) d\mu(\mathbf{w}) \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad y > 0, \tag{13}$$

доводиться дослівним повторенням міркувань із доведення нерівності (7) із формальною заміною $\mathbb{T}^n$ на $\mathbb{R}^n$, $C(\varrho \mathbf{z}, \mathbf{w})$ на $\mathcal{C}(\mathbf{x} + iy, \mathbf{w})$ і $P(\varrho \mathbf{z}, \mathbf{w})$ на $\mathcal{P}(\mathbf{x} + iy, \mathbf{w})$ відповідно.

Зрозуміло, що з (13) випливає $|\mathfrak{f}_y(\mathbf{x})| \le \mathcal{P}(d|\mu|)(\mathbf{x} + iy)$. Отже, інтегруючи по $\mathbb{R}^n$ обидві частини цієї нерівності і змінюючи порядок інтегрування в повторному інтегралі, переконуємось у необхідності умови (11).

Достатність. Згідно з (11) сім'я $\{\mathfrak{f}_y\}_{0<y<\infty}$ є обмеженою в $L_1(\mathbb{R}^n)$, тобто

$$\|\mathfrak{f}_y\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\mathfrak{f}_y| dm_n \le K < \infty \quad \forall\, y > 0.$$

Якщо розуміти заряди $\mu_y(E) = \int_E \mathfrak{f}_y dm_n$ на $\mathbb{R}^n$ як функціонали в $C^0(\mathbb{R}^n)$ (див., наприклад, [14], теорема 3.4), то останнє означає, що сім'я функціоналів $\{\mu_y\}_{0<y<\infty}$ належить кулі радіуса K, і оскільки ця куля є компактом у слабкій топології, то існують дискретна множина значень y і заряд μ на $\mathbb{R}^n$ такі, що

$$\lim_{j\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n} g\,d\mu_{y_j} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g\,d\mu \quad \forall\, g \in C^0(\mathbb{R}^n) \quad (y_j \to 0,\ j \to \infty).$$

Далі, за g слід взяти функцію $g(\cdot) = \mathcal{C}(\mathbf{z},\cdot)$ і скористатися формулою Коші, яку доцільно подати у такому вигляді.

Лема 1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$ і функція $f \in \mathrm{Hol}(\overline{\mathbb{H}}^n)$. Якщо f задовольняє умову* (10), *то*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{w})\mathcal{C}(\mathbf{z},\mathbf{w})\,dm_n(\mathbf{w}) = \begin{cases} (2\pi i)^n f(\mathbf{z}), & \mathbf{z} \in \mathbb{H}^n, \\ 0, & \mathbf{z} \in \widehat{\mathbb{C}}^n \setminus \overline{\mathbb{H}}^n, \end{cases} \tag{14}$$

і внаслідок цього

$$f(\mathbf{z}) = (\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{w})\mathcal{P}(\mathbf{z},\mathbf{w})\,dm_n(\mathbf{w}) \quad \forall\, \mathbf{z} \in \mathbb{H}^n. \tag{15}$$

***Зауваження* 1.** Формули (14) і (15) мають місце і при інших обмеженнях на функцію f (вони з'являться в доведенні теореми 6). А саме, n-кратним застосуванням леми 2.3 з роботи [17] можна показати таке.

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$. Якщо функція $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{H}^n)$ має граничні значення на $\mathbb{R}^n$, які утворюють функцію $f^*(\mathbf{x}) := \lim_{y\to 0} f(\mathbf{x}+iy)$, причому $|f^*|^p \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то виконуються (14) *і* (15).

***Доведення леми* 1** проводиться n-кратним застосуванням до функції

$$\mathbf{w} \mapsto \begin{cases} (f(\mathbf{w}) - f(\mathbf{z}))\mathcal{C}(\mathbf{z},\mathbf{w}), & \mathbf{z} \in \mathbb{H}^n, \\ f(\mathbf{w})\mathcal{C}(\mathbf{z},\mathbf{w}), & \mathbf{z} \in \widehat{\mathbb{C}}^n \setminus \overline{\mathbb{H}}^n, \end{cases}$$

„одновимірної" формули Коші для необмежених областей (див., наприклад, [18], теорема 2.4).

Якщо має місце (14), то, поклавши $h := (2\pi i)^{-n}\mathcal{K}(f\,dm_n)$, отримаємо

$$\sum_{\alpha\in\mathfrak{N}} (-1)^{n-\#\alpha} h(\mathbf{z}_\alpha, \overline{\mathbf{z}}_{\overline{\alpha}}) = f(\mathbf{z}) \quad \forall\, \mathbf{z} \in \mathbb{H}^n,$$

з одного боку, а з іншого, згідно з (13),

$$\sum_{\alpha\in\mathfrak{N}} (-1)^{n-\#\alpha} h(\mathbf{z}_\alpha, \overline{\mathbf{z}}_{\overline{\alpha}}) = \pi^{-n}\mathcal{P}(f\,dm_n)(\mathbf{z}) \quad \forall\, \mathbf{z} \in \mathbb{H}^n.$$

Отже, з (14) випливає (15).

Лему і теорему доведено.

У наступному твердженні вказано умови, за яких голоморфну в Ω^n функцію можна зобразити інтегралом типу Коші – Стільтьєса борелівської міри на $\mathbb{T}^n$.

Теорема 3. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathrm{Hol}(\Omega^n)$. Функцію f можна зобразити у вигляді $f = K(d\mu)$, де μ — борелівська міра на $\mathbb{T}^n$ тоді і тільки тоді, коли виконується умова* (4) *і*

$$\mathfrak{f}_\varrho(\mathbf{z}) \ge 0 \quad \forall\, \varrho \in [0,1) \quad \forall\, \mathbf{z} \in \mathbb{T}^n. \tag{16}$$

***Зауваження* 2.** Нехай $n \in \mathbb{N}$, функція $f \in \mathrm{Hol}(\Omega^n)$ і задовольняє (4). Тоді:

1) якщо $\mathfrak{f}_\varrho(\mathbf{z}) = 0\ \forall \varrho \in [0,1)\ \forall \mathbf{z} \in \mathbb{T}^n$, то $f \equiv 0$ і, отже, $f = K(d\mu)$, де $\mu \equiv 0$;

2) якщо виконується (16) і $\lim\limits_{\varrho\to 1-} \mathfrak{f}_\varrho(\mathbf{z}) = 0$ майже скрізь (відносно міри Лебега σ_n) на $\mathbb{T}^n$, то $f = K(d\mu)$, де μ — невід'ємна міра, сингулярна відносно σ_n.

***Доведення теореми* 3.** *Необхідність.* Нехай $f = K(d\mu)$, де μ — борелівська міра на $\mathbb{T}^n$. Тоді, очевидно, виконується (4) і згідно з (6)

$$\mathfrak{f}_\varrho(\mathbf{z}) = \int\limits_{\mathbb{T}^n} P(\varrho\mathbf{z}, \mathbf{w})d\mu(\mathbf{w}) \quad \forall\, \mathbf{z} \in \mathbb{T}^n, \quad 0 \le \varrho < 1. \tag{17}$$

Оскільки $P(\varrho\mathbf{z}, \mathbf{w}) > 0$ для будь-яких $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{T}^n$, $\varrho \in [0, 1)$, то величини в обох частинах рівності (17) є або додатними, або ж, якщо $\mu \equiv 0$, рівними нулю.

Достатність. Нехай виконуються умови (4) і (16). Тоді сім'я функцій $\{\mathfrak{f}_\varrho\}_{0\le\varrho<1}$, визначених на $\mathbb{T}^n$, є невід'ємною і тому, внаслідок голоморфності функції f і умови (4), обмеженою в $L_1(\mathbb{T}^n)$:

$$\|\mathfrak{f}_\varrho\|_{L_1(\mathbb{T}^n)} = \int\limits_{\mathbb{T}^n} \mathfrak{f}_\varrho d\sigma_n = f(\mathbf{0}) < +\infty, \quad 0 \le \varrho < 1,$$

де $\mathbf{0} := \Bigg(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}\Bigg)$.

Далі, повторюючи дослівно доведення достатності умов теореми 1, з сім'ї $\{\mu_\varrho\}_{0\le\varrho<1}$ абсолютно неперервних відносно міри σ_n борелівських мір μ_ϱ, $\mu_\varrho(E) = \int\limits_E \mathfrak{f}_\varrho d\sigma_n$, на $\mathbb{T}^n$ можна вибрати підпослідовність $\{\mu_{\varrho_j}\}_{j=1}^\infty$, яка буде слабко збігатися при $\varrho \to 1-$ до деякої борелівської міри μ і (див. (9))

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n} C(\mathbf{z}, \mathbf{w})d\mu(\mathbf{w}) = \lim_{j\to\infty} \int\limits_{\mathbb{T}^n} C(\mathbf{z}, \mathbf{w})\mathfrak{f}_{\varrho_j}(\mathbf{w})d\sigma_n(\mathbf{w}) = f(\mathbf{z}) \quad \forall\, \mathbf{z} \in \Omega^n.$$

Зокрема, якщо в (16) має місце рівність, то $\mu_\varrho \equiv 0$ і, отже,

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n} P(\mathbf{z}, \mathbf{w})d\mu(\mathbf{w}) = 0 \quad \forall\, \mathbf{z} \in \mathbb{D}^n, \tag{18}$$

тобто $\mu \equiv 0$.

Теорему доведено.

Теорема 4. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathrm{Hol}(\Delta^n)$. Функцію f можна зобразити у вигляді $f = \mathcal{K}(d\mu)$, де μ — борелівська міра на $\mathbb{R}^n$ така, що $|\mu|(\mathbb{R}^n) < \infty$, тоді і тільки тоді, коли виконуються умови* (10), (11) *і*

$$\mathfrak{f}_y(\mathbf{x}) \ge 0 \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\ \forall\, y > 0. \tag{19}$$

***Зауваження* 3.** Нехай $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathrm{Hol}(\Delta^n)$ і f задовольняє (10). Якщо:

1) $\mathfrak{f}_y(\mathbf{x}) = 0\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\ \forall y > 0$, то $f \equiv 0$ і, отже, $f = \mathcal{K}(d\mu)$, де $\mu \equiv 0$;

2) якщо виконується (19) і $\lim\limits_{y\to 0+} \mathfrak{f}_y(\mathbf{x}) = 0$ майже скрізь (відносно міри Лебега m_n) на $\mathbb{R}^n$, то $f = \mathcal{K}(d\mu)$, де μ — невід'ємна міра на $\mathbb{R}^n$, сингулярна відносно m_n.

***Доведення теореми* 4.** *Необхідність* умови (10) випливає з теореми 2. Далі, згідно з (13)

$$\mathfrak{f}_y(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{P}(\mathbf{x} + iy, \mathbf{w})d\mu(\mathbf{w}) \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad \forall\, y > 0.$$

Міра і підінтегральна функція є невід'ємними, тому $\mathfrak{f}_y(\mathbf{x}) > 0$, або ж $\mathfrak{f}_y \equiv 0$, якщо $\mu \equiv 0$.

З іншого боку, згідно з теоремою 2

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathfrak{f}_y dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} |\mathfrak{f}_y| dm_n < \infty \quad \forall\, y > 0.$$

Достатність. Сім'я функцій $\{\mathfrak{f}_y\}_{0<y<\infty}$ є невід'ємною і обмеженою в $L_1(\mathbb{R}^n)$. Тому заряди $\mu_y(E) = \int_E \mathfrak{f}_y dm_n$ на $\mathbb{R}^n$ є борелівськими мірами. Вибравши збіжну (в слабкій топології) підпослідовність мір μ_y, одержимо $f = \mathcal{K}(d\mu) = \lim\limits_{j\to\infty} \mathcal{K}(d\mu_{y_j})$.

Теорему доведено.

Якщо ж тепер розглянути тільки абсолютно неперервні відносно міри Лебега заряди на $\mathbb{T}^n$, то, як відомо (див., наприклад, [16, с. 49]), голоморфну в $\mathbb{D}^n$ функцію f можна зобразити інтегралом типу Пуассона – Стільтьєса такого заряду на $\mathbb{T}^n$ тоді і тільки тоді, коли $f \in H_1(\mathbb{D}^n)$, тобто коли

$$\sup_{0\le\varrho<1} \int_{\mathbb{T}^n} |f(\varrho\mathbf{z})| d\sigma_n(\mathbf{z}) < \infty.$$

При цьому $f = K(d\mu) = P(d\mu)$, де $d\mu = f^* d\sigma_n$ і $L_1(\mathbb{T}^n) \ni f^*(\mathbf{z}) := \lim\limits_{\varrho\to 1} f(\varrho\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in \mathbb{T}^n$.

Використавши цей факт і теорему 1, наведемо достатню умову, за якої заряд на $\mathbb{T}^n$ є абсолютно неперервним відносно міри Лебега.

Теорема 5. *Нехай $n \in \mathbb{N}$ і μ — заряд на $\mathbb{T}^n$. Якщо*

$$\max_{\alpha\in\mathfrak{N}} \sup_{0\le\varrho<1} \int_{\mathbb{T}^n} |K(d\mu)(\varrho\mathbf{z}_\alpha, \varrho^{-1}\mathbf{z}_{\overline{\alpha}})| d\sigma_n(\mathbf{z}) < \infty,$$

то заряд μ є абсолютно неперервним відносно міри Лебега σ_n.

***Наслідок* 1.** *Нехай $n \in \mathbb{N}$ і μ — заряд на $\mathbb{T}^n$ такий, що $\widehat{\mu}(\mathbf{k}) = 0$ для всіх $\mathbf{k} \notin \mathbb{Z}^n_+ := \{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n : m_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}\}$. Тоді заряд μ є абсолютно неперервним відносно міри Лебега σ_n.*

Справді, згідно з (6) і (7)

$$\int_{\mathbb{T}^n} |K(d\mu)(\varrho\mathbf{z})| d\sigma_n(\mathbf{z}) = \int_{\mathbb{T}^n} \left| \sum_{\alpha\in\mathfrak{N}} (-1)^{n-\#\alpha} K(d\mu)(\varrho\mathbf{z}_\alpha, \varrho^{-1}\mathbf{z}_{\overline{\alpha}}) \right| d\sigma_n(\mathbf{z}) =$$

$$= \int_{\mathbb{T}^n} |P(d\mu)(\varrho\mathbf{z})| d\sigma_n(\mathbf{z}) \le |\mu|(\mathbb{T}^n) < \infty \quad \forall\, \varrho \in [0,1).$$

Наслідок 1 є аналогом теореми братів Ріссів, про яку згадано у вступі до даної роботи. Різні „багатовимірні” аналоги цієї теореми можна знайти в [16], [5] (гл. 4, п. 17), [19 – 21]. Зокрема, наслідок 1 можна отримати з результатів робіт [19, 20].

***Доведення теореми* 5.** Розглянемо набір функцій $g_\alpha, \alpha \in \mathfrak{N}$, визначених відповідно в областях $\mathbb{D}^n_\alpha$,

$$\mathbb{D}^n_\alpha := \{\mathbf{z} \in \widehat{\mathbb{C}}^n : |z_j| < 1,\ j \in \alpha\ \wedge\ |z_i| > 1,\ i \in \overline{\alpha}\}, \tag{20}$$

як звуження інтеграла типу Коші – Стільтьєса заряду μ на області $\mathbb{D}^n_\alpha$, тобто $g_\alpha = K(d\mu)|_{\mathbb{D}^n_\alpha}$.

Згідно з умовами теореми $g_\alpha \in H_1(\mathbb{D}^n_\alpha)$, $\alpha \in \mathfrak{N}$, а тому g_α можна зобразити у вигляді $g_\alpha(\mathbf{z}) = K(d\mu_\alpha)(\mathbf{z}) = P(d\mu_\alpha)(\mathbf{z})$, де $\mu_\alpha(E) = \int\limits_E g^*_\alpha d\sigma_n$, $E \in \mathfrak{B}(\mathbb{T}^n)$, і $L_1(\mathbb{T}^n) \ni g^*_\alpha(\mathbf{z}) = \lim\limits_{\varrho\to 1} g^*_\alpha(\varrho\mathbf{z}_\alpha, \varrho^{-1}\mathbf{z}_\alpha)$, $\mathbf{z} \in \mathbb{T}^n$.

Отже,

$$\sum_{\alpha\in\mathfrak{N}} (-1)^{n-\#\alpha} g_\alpha(\varrho\mathbf{z}_\alpha, \varrho^{-1}\mathbf{z}_{\overline{\alpha}}) = P\left(\sum_{\alpha\in\mathfrak{N}} (-1)^{n-\#\alpha}\mu_\alpha\right)(\varrho\mathbf{z}) \quad \forall\, \mathbf{z} \in \mathbb{T}^n.$$

З іншого боку,

$$\sum_{\alpha\in\mathfrak{N}} (-1)^{n-\#\alpha} g_\alpha(\varrho\mathbf{z}_\alpha, \varrho^{-1}\mathbf{z}_{\overline{\alpha}}) = \sum_{\alpha\in\mathfrak{N}} (-1)^{n-\#\alpha} K(d\mu)(\varrho\mathbf{z}_\alpha, \varrho^{-1}\mathbf{z}_{\overline{\alpha}}) =$$

$$= (\text{згідно з } (6)) = P(d\mu)(\varrho\mathbf{z}) \quad \forall\, \mathbf{z} \in \mathbb{T}^n.$$

Віднявши ці дві рівності, одержимо (див. пояснення до рівності (18))

$$\mu - \sum_{\alpha\in\mathfrak{N}} (-1)^{n-\#\alpha}\mu_\alpha \equiv 0,$$

звідки

$$\mu(E) = \int\limits_E \left(\sum_{\alpha\in\mathfrak{N}} (-1)^{n-\#\alpha} g^*_\alpha\right) d\sigma_n, \quad E \in \mathfrak{B}(\mathbb{T}^n).$$

Теорему доведено.

Теорема 6. *Нехай $n \in \mathbb{N}$ і μ — заряд на $\mathbb{R}^n$. Якщо*

$$\max_{\alpha\in\mathfrak{N}} \sup_{0<y<\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{K}(d\mu)(\mathbf{x}_\alpha + iy, \mathbf{x}_{\overline{\alpha}} - iy)| dm_n(\mathbf{x}) < \infty,$$

то заряд μ є абсолютно неперервним відносно міри Лебега m_n і $|\mu|(\mathbb{R}^n) < \infty$.

***Наслідок* 2.** *Нехай $m \in \mathbb{N}$ і μ — заряд на $\mathbb{R}^n$ такий, що $|\mu|(\mathbb{R}^n) < \infty$ і $\widehat{\mu}(\mathbf{x}) = 0$ для всіх $\mathbf{x} \notin \mathbb{R}^n_+ := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : y_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}\}$. Тоді заряд μ є абсолютно неперервним відносно міри Лебега m_n.*

***Доведення теореми* 6.** Нехай

$$\mathbb{H}^n_\alpha := \{\mathbf{z} \in \widehat{\mathbb{C}}^n : \operatorname{Im} z_j > 0,\ j \in \alpha\ \wedge\ \operatorname{Im} z_j < 0,\ j \in \overline{\alpha}\}$$

і $g_\alpha = \mathcal{K}(d\mu)|_{\mathbb{H}^n_\alpha}$. Функції g_α, $\alpha \in \mathfrak{N}$, належать простору $\mathfrak{H}_1(\mathbb{H}^n_\alpha)$, тобто вони є голоморфними в $\mathbb{H}^n_\alpha$ і

$$\sup_{0<y<\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |g_\alpha(\mathbf{x}_\alpha + iy, \mathbf{x}_{\overline{\alpha}} - iy)| dm_n(\mathbf{x}) < \infty.$$

Отже, існують граничні значення g^*_α, причому $g^*_\alpha \in L_1(\mathbb{R}^n)$. За лемою 1 $g_\alpha = \mathcal{K}(d\mu_\alpha) = \mathcal{P}(d\mu_\alpha)$, де $\mu_\alpha(E) = \int\limits_E g^*_\alpha dm_n$, $E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$.

Далі доведення проводиться дослівним повторенням міркувань із доведення теореми 5.

Теорему доведено.

Зауважимо, що область Ω^n можна подати у вигляді

$$\Omega^n = \bigcup_{\alpha\in\mathfrak{N}} \mathbb{D}^n_\alpha,$$

де $\mathbb{D}^n_\alpha$ визначається в (20), і з огляду на це поставимо питання про те, якими є необхідні і достатні умови для того, щоб голоморфну функцію, визначену тільки в одній з областей $\mathbb{D}^n_\alpha$, $\alpha\in\mathfrak{N}$, можна було зобразити інтегралом типу Коші–Стільтьєса.

Базуючись на міркуваннях, подібних до міркувань при доведенні теореми 1, такий критерій можна отримати в наступному вигляді.

Позначимо

$$\mathbf{k} = (k_1,\ldots,k_n), \quad \mathbf{z}^{\mathbf{k}} := z_1^{k_1}\ldots z_n^{k_n}, \quad |\mathbf{k}| := \max_{1\le j\le m}|k_j|$$

і

$$\mathbb{Z}^n_\alpha := \{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n : k_j\ge 0, j\in\alpha,\ k_i<0, i\in\overline{\alpha}\}.$$

Теорема 7. *Нехай $n\in\mathbb{N}$, $\beta\in\mathfrak{N}$, $f\in\mathrm{Hol}(\mathbb{D}^n_\beta)$. Функцію f можна зобразити у вигляді $f = K(d\mu)\big|_{\mathbb{D}^n_\beta}$, де μ — деякий заряд на $\mathbb{T}^n$, тоді і тільки тоді, коли знайдеться послідовність функцій $\{T_m\}_{m=0}^\infty$ вигляду*

$$T_m(\mathbf{z}) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\alpha\in\mathfrak{N}\setminus\beta}\ \sum_{\substack{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n_\alpha:\\ |\mathbf{k}|\le N}} c_{\mathbf{k},\alpha}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}, & \mathbf{z}\notin\mathbb{D}^n_\beta,\\ 0, & \mathbf{z}\in\mathbb{D}^n_\beta,\end{cases} \qquad N = N(m), \tag{21}$$

така, що

$$\varlimsup_{m\to\infty}\int\limits_{\mathbb{T}^n}\Big|f(\varrho_m\mathbf{z}_\beta, \varrho_m^{-1}\mathbf{z}_{\overline{\beta}}) + T_m(\mathbf{z})\Big|d\sigma_n(\mathbf{z}) < \infty, \tag{22}$$

де $0<\varrho_m<1$ *і* $\lim\limits_{m\to\infty}\varrho_m = 1$.

Це твердження є поширенням на багатовимірний випадок теореми 2 з роботи [12].

***Доведення теореми* 7.** *Необхідність.* Для спрощення викладок будемо вважати, що $\beta=\mathcal{N}$ і, отже, $\mathbb{D}^n_\beta = \mathbb{D}^n$. Нехай $f = K(d\mu)\big|_{\mathbb{D}^n}$, тоді за теоремою 1 для будь-якої послідовності $\{\varrho_m\}_{m=0}^\infty$, $\varrho_m\to 1-$, $m\to\infty$,

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n}\Big|f(\varrho_m\mathbf{z}) + \sum_{\alpha\in\mathfrak{N}\setminus\mathcal{N}} g_\alpha(\varrho_m\mathbf{z}_\alpha, \varrho_m^{-1}\mathbf{z}_{\overline{\alpha}})\Big|d\sigma_n(\mathbf{z}) \le K < \infty \quad \forall\, m\in\mathbb{N}, \tag{23}$$

де

$$g_\alpha(\mathbf{z}) := \begin{cases}(-1)^{n-\#\alpha}K(d\mu)(\mathbf{z}), & \mathbf{z}\in\mathbb{D}^n_\alpha,\\ 0, & \mathbf{z}\in\Omega^n\setminus\mathbb{D}^n_\alpha.\end{cases}$$

Зрозуміло, що функції g_α є голоморфними в області $\mathbb{D}^n_\alpha$. Тому g_α можна зобразити в цій області у вигляді суми степеневого ряду

$$g_\alpha(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n_\alpha}\widehat{g}_\alpha(\mathbf{k})\mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \tag{24}$$

збіжного абсолютно і рівномірно на кожній компактній підмножині області $\mathbb{D}^n_\alpha$, де $\widehat{g}_\alpha(\mathbf{k})$ — коефіцієнти Тейлора функції $g_{_\alpha}$, які визначаються за відомим правилом.

За T_m візьмемо функції вигляду

$$T_m(\mathbf{z}) = \sum_{\alpha\in\mathfrak{N}\setminus\mathcal{N}} S^{\square}_N(g_{_\alpha})(\varrho_m\mathbf{z}_\alpha, \varrho_m^{-1}\mathbf{z}_{\overline{\alpha}}), \quad m=\overline{0,\infty}, \tag{25}$$

де $N=N(m)$ — натуральне число, певними чином залежне від n і

$$S^{\square}_N(g_{_\alpha})(\mathbf{z}) := \sum_{\substack{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n_\alpha:\\ |\mathbf{k}|\le N}} \widehat{g}_{_\alpha}(\mathbf{k})\mathbf{z}^{\mathbf{k}}$$

— квадратні частинні суми порядку N ряду (24).

Зрозуміло, що функції T_m мають вигляд (21). Тоді згідно з (23) для довільного $m\in\mathbb{N}$

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n}\Big|f(\varrho_m\mathbf{z})+T_m(\mathbf{z})\Big|d\sigma_n(\mathbf{z}) \le$$

$$\le \int\limits_{\mathbb{T}^n}\Big|f(\varrho_m\mathbf{z})+\sum_{\alpha\in\mathfrak{N}\setminus\mathcal{N}} g_{_\alpha}(\varrho_m\mathbf{z}_\alpha, \varrho_m^{-1}\mathbf{z}_{\overline{\alpha}})\Big|d\sigma_n(\mathbf{z})+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{T}^n}\Big|\sum_{\alpha\in\mathfrak{N}\setminus\mathcal{N}} g_{_\alpha}(\varrho_m\mathbf{z}_\alpha, \varrho_m^{-1}\mathbf{z}_{\overline{\alpha}})-T_m(\mathbf{z})\Big|d\sigma_n(\mathbf{z}) \le$$

$$\le \int\limits_{\mathbb{T}^n}\Big|\sum_{\alpha\in\mathfrak{N}\setminus\mathcal{N}} g_{_\alpha}(\varrho_m\mathbf{z}_\alpha, \varrho_m^{-1}\mathbf{z}_{\overline{\alpha}})-T_m(\mathbf{z})\Big|d\sigma_n(\mathbf{z})+K=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{T}^n}\Big|\sum_{\alpha\in\mathfrak{N}\setminus\mathcal{N}}\Big(g_{_\alpha}(\varrho_m\mathbf{z}_\alpha, \varrho_m^{-1}\mathbf{z}_{\overline{\alpha}})-S^{\square}_N(g_{_\alpha})(\varrho_m\mathbf{z}_\alpha, \varrho^{-1}\mathbf{z}_{\overline{\alpha}})\Big)\Big|d\sigma_n(\mathbf{z})+K\le$$

$$\le \sum_{\alpha\in\mathfrak{N}\setminus\mathcal{N}}\int\limits_{\mathbb{T}^n}\Big|g_{_\alpha}(\varrho_m\mathbf{z}_\alpha, \varrho_m^{-1}\mathbf{z}_{\overline{\alpha}})-S^{\square}_N(g_{_\alpha})(\varrho_m\mathbf{z}_\alpha, \varrho^{-1}\mathbf{z}_{\overline{\alpha}})\Big|d\sigma_n(\mathbf{z})+K. \tag{26}$$

Виберемо довільне число $\varepsilon>0$ і покажемо, що для будь-якого $\varrho_m\in(0,1)$ можна підібрати таке число $N=N(m)$, що

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n}\Big|g_{_\alpha}(\varrho_m\mathbf{z}_\alpha, \varrho_m^{-1}\mathbf{z}_{\overline{\alpha}})-S^{\square}_N(g_{_\alpha})(\varrho_m\mathbf{z}_\alpha, \varrho^{-1}\mathbf{z}_{\overline{\alpha}})\Big|d\sigma_n(\mathbf{z})\le\varepsilon \quad \forall\,\alpha\in\mathfrak{N}\setminus\mathcal{N}.$$

Для цього зафіксуємо $\alpha\in\mathfrak{N}\setminus\mathcal{N}$ і окремо розглянемо звуження функції $g_{_\alpha}$ на область $\mathbb{D}^n_\alpha$. Нашою найближчою метою є знаходження ефективної формули для відхилення $g_{_\alpha}-S^{\square}_N(g_{_\alpha})$ в $\mathbb{D}^n_\alpha$.

Нехай $\gamma\in\mathfrak{N}\setminus\varnothing$. Розглянемо оператори $S_{\gamma,N}$, $R_{\gamma,N}$, визначені на $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}^n_\alpha)$, які діють за правилами

$$S_{\gamma,N}(g_\alpha)(\mathbf{z}) := \sum_{\substack{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n_\alpha:\\ |k_j|\le N,\ j\in\gamma}} \widehat{g}_{_\alpha}(\mathbf{k})\mathbf{z}^{\mathbf{k}},$$

$$R_{\gamma,N}(g_\alpha)(\mathbf{z}) := \sum_{\substack{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n_\alpha:\\ |k_j|\geq N+1,\ j\in\gamma}} \widehat{g}_\alpha(\mathbf{k})\mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \qquad \mathbf{z}\in\mathbb{D}^n_\alpha, \quad N\in\mathbb{N}. \tag{27}$$

Легко бачити, що

$$S^{\square}_N := \prod_{j=1}^n S_{\{j\},N} = \prod_{j=1}^n (I - R_{\{j\},N}) =$$

$$= I - \sum_{\gamma\in\mathfrak{N}\setminus\varnothing} (-1)^{\#\gamma} I^{n-\#\gamma} \prod_{j\in\gamma} R_{\{j\},N} = I - \sum_{\gamma\in\mathfrak{N}\setminus\varnothing} (-1)^{\#\gamma} R_{\gamma,N}, \tag{28}$$

де I — тотожний оператор, а під добутком розуміємо операторний добуток.

Подіявши тепер на функцію g_α оператором $S^{\square}_N$, на основі рівності (28) одержимо

$$g_\alpha - S^{\square}_N(g_\alpha) = \sum_{\gamma\in\mathfrak{N}\setminus\varnothing} (-1)^{\#\gamma+1} R_{\gamma,N}(g_\alpha). \tag{29}$$

Далі, подамо функцію $R_{\gamma,N}(g_\alpha)$ для кожного $\gamma\in\mathfrak{N}\setminus\varnothing$ в інтегральному вигляді, а саме, у вигляді інтеграла типу Коші – Стільтьєса. Для цього позначимо

$$P_{\gamma,\alpha,N}(\mathbf{z}) := \prod_{j\in\gamma\cap\alpha} z_j^{-N-1} \prod_{i\in\gamma\setminus\alpha} z_i^{N+1}.$$

Тоді

$$R_{\gamma,N}(g_\alpha)(\mathbf{z}) = (-1)^{\#\overline{\alpha}} P^{-1}_{\gamma,\alpha,N}(\mathbf{z}) K(P_{\gamma,\alpha,N}\,d\mu)(\mathbf{z}) \quad \forall\, \mathbf{z}\in\mathbb{D}^n_\alpha. \tag{30}$$

У цьому легко переконатися з огляду на (27) і те, що для будь-яких $\mathbf{z}\in\mathbb{D}^n_\alpha$ і $\mathbf{w}\in\mathbb{T}^n$

$$P_{\gamma,\alpha,N}(\mathbf{w}) C(\mathbf{z},\mathbf{w}) = (-1)^{\#\overline{\alpha}} \prod_{j\in\gamma\cap\alpha} w_j^{-N-1} \prod_{i\in\gamma\setminus\alpha} w_i^{N+1} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n_\alpha} (\mathbf{z}\overline{\mathbf{w}})^{\mathbf{k}} =$$

$$= (-1)^{\#\overline{\alpha}} \prod_{j\in\gamma\cap\alpha} \left(w_j^{-N-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} z_j^{\nu}\overline{w}_j^{\nu} \right) \prod_{i\in\gamma\setminus\alpha} \left(w_i^{N+1} \sum_{\nu=1}^{\infty} z_i^{-\nu}\overline{w}_i^{\nu} \right) \times$$

$$\times \prod_{k\in\mathcal{N}\setminus(\gamma\cup\alpha)} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} z_k^{-\nu} w_k^{\nu} \right) \prod_{l\in\alpha\setminus\gamma} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} z_l^{\nu}\overline{w}_l^{\nu} \right).$$

Зазначимо, що поява множника $(-1)^{\#\overline{\alpha}}$ обумовлена числом змінних z_j, для яких $|z_j| > 1$.

Підставляючи (30) в (29), одержуємо зручну формулу

$$g_\alpha(\mathbf{z}) - S^{\square}_N(g_\alpha)(\mathbf{z}) =$$

$$= \sum_{\gamma\in\mathfrak{N}\setminus\varnothing} (-1)^{\#\gamma-\#\alpha+n+1} P^{-1}_{\gamma,\alpha,N}(\mathbf{z}) K(P_{\gamma,\alpha,N}\,d\mu)(\mathbf{z}) \quad \forall\, \mathbf{z}\in\mathbb{D}^n_\alpha.$$

На основі цієї формули з урахуванням того, що $|P_{\gamma,\alpha,N}(\mathbf{w})| = 1$ для всіх $\mathbf{w}\in\mathbb{T}^n$, маємо оцінку

$$\left| g_\alpha(\mathbf{z}) - S^{\square}_N(g_\alpha)(\mathbf{z}) \right| \leq \sum_{\gamma\in\mathfrak{N}\setminus\varnothing} \left| P^{-1}_{\gamma,\alpha,N}(\mathbf{z}) K(P_{\gamma,\alpha,N}\,d\mu)(\mathbf{z}) \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{\mathbb{T}^n} |C(\mathbf{z},\mathbf{w})| d|\mu|(\mathbf{w}) \sum_{\gamma\in\mathfrak{N}\setminus\varnothing} |P^{-1}_{\gamma,\alpha,N}(\mathbf{z})| \leq$$

$$\leq |\mu|(\mathbb{T}^n) \max_{\mathbf{w}\in\mathbb{T}^n} |C(\mathbf{z},\mathbf{w})| \sum_{\gamma\in\mathfrak{N}\setminus\varnothing} |P^{-1}_{\gamma,\alpha,N}(\mathbf{z})| \leq$$

$$\leq |\mu|(\mathbb{T}^n) \prod_{j=1}^{n} |1-|z_j||^{-1} \sum_{\gamma\in\mathfrak{N}\setminus\varnothing} \left(\prod_{j\in\gamma\cap\alpha} |z_j|^{N+1} \prod_{i\in\gamma\setminus\alpha} |z_i|^{-N-1} \right), \qquad (31)$$

яка виконується для всіх $\mathbf{z} \in \mathbb{D}^n_\alpha$. Звідси випливає така оцінка:

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n} \left| g_\alpha(\varrho_m \mathbf{z}_\alpha, \varrho_m^{-1}\mathbf{z}_{\overline{\alpha}}) - S^{\square}_N(g_\alpha)(\varrho_m \mathbf{z}_\alpha, \varrho_m^{-1}\mathbf{z}_{\overline{\alpha}}) \right| d\sigma_n(\mathbf{z}) \leq$$

$$\leq |\mu|(\mathbb{T}^n)(1-\varrho_m)^{-n} \textstyle\sum_{\gamma\in\mathfrak{N}\setminus\varnothing} \varrho_m^{\#\gamma\cdot(N+1)} \leq 2^n |\mu|(\mathbb{T}^n) \frac{\varrho_m^{N+1}}{(1-\varrho_m)^n}. \qquad (32)$$

Тепер для довільного фіксованого $\varepsilon > 0$ і довільної фіксованої послідовності $\{\varrho_m\}_{m=0}^\infty$, $\dfrac{1}{2} < \varrho_m < 1$, $\lim\limits_{m\to\infty} \varrho_m = 1$, можна підібрати послідовність чисел $N = N(m)$ так, щоб

$$2^n |\mu|(\mathbb{T}^n) \frac{\varrho_m^{N+1}}{(1-\varrho_m)^n} \leq \varepsilon \quad \forall\, m \in \mathbb{N}. \qquad (33)$$

Отже, послідовність функцій T_m, вибраних за правилом (25), на підставі співвідношень (26), (32) і (33) є такою, що задовольняє співвідношення (22).

Достатність. Покладемо

$$u_m(\mathbf{z}) := f(\varrho_m \mathbf{z}) - T_m(\mathbf{z}).$$

Оскільки згідно з (22) послідовність функцій $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ є обмеженою в $L_1(\mathbb{T}^n)$, то послідовність зарядів $\{\mu_m\}_{m=1}^\infty$, $\mu_m(E) = \displaystyle\int_E u_m d\sigma_n$, на $\mathbb{T}^n$ є обмеженою за варіацією, а тому можна вказати таку підпослідовність $\{\mu_{m_k}\}_{k=1}^\infty$, а отже і підпослідовність $\{u_{m_k}\}_{k=1}^\infty$, що μ_{m_k} слабко збігається до деякого заряду μ, тобто

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{T}^n} g(\mathbf{w}) u_{m_k}(\mathbf{w}) d\sigma_n(\mathbf{w}) = \int\limits_{\mathbb{T}^n} g(\mathbf{w}) d\mu(\mathbf{w})$$

для будь-якої функції $g \in C(\mathbb{T}^n)$.

Зокрема, згідно з (21)

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n} C(\mathbf{z},\mathbf{w}) d\mu(\mathbf{w}) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{T}^n} C(\mathbf{z},\mathbf{w}) u_{m_k}(\mathbf{w}) d\sigma_n(\mathbf{w}) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} f(\varrho_{n_k}\mathbf{z}) = f(\mathbf{z}) \quad \forall\, \mathbf{z} \in \mathbb{D}^n.$$

Теорему доведено.

Зауважимо, що при доведенні необхідності умов теореми 3, а саме, співвідношення (31), доведено одне твердження, яке є цікавим у задачах наближення інтегралів типу Коші – Стільтьєса в багатовимірному випадку прямокутними частинними сумами кратних рядів Тейлора. Для формулювання цього твердження введемо такі позначення.

Нехай $\mathbf{m}$ — мультиіндекс, $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n)$, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_0^n := \underbrace{\mathbb{N}_0 \times \ldots \mathbb{N}_0}_{n}$ (згідно з попередніми позначеннями $\mathbb{N}_0^n = \mathbb{Z}_{\mathcal{N}}^n$) і

$$S_{\mathbf{m}}^{\square}(f)(\mathbf{z}) = \begin{cases} 0, & \min\limits_{1 \le j \le n} m_j = -1, \\ \sum\limits_{k_1=0}^{m_1} \ldots \sum\limits_{k_n=0}^{m_n} \widehat{f}(k_1, \ldots, k_n) z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}, & \mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^n. \end{cases}$$

Нехай, далі, $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, n}$, і $\mathbb{T}_{\mathbf{r}}^n := \{\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n : |w_1| = r_1, \ldots, |w_n| = r_n\}$. Через $C(\mathbb{T}_{\mathbf{r}}^n)$ позначимо простір неперервних на $\mathbb{T}_{\mathbf{r}}^n$ функцій з нормою

$$\|f\|_{C(\mathbb{T}_{\mathbf{r}}^n)} := \max_{\mathbf{w} \in \mathbb{T}_{\mathbf{r}}^n} |f(\mathbf{w})|.$$

Теорема 8. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ і $r_j \in [0, 1)$, $j = \overline{1, n}$. Тоді*

$$\sup_{\substack{f = K(d\mu), \\ |\mu|(\mathbb{T}^n) \le 1}} \|f - S_{\mathbf{m}}^{\square}(f)\|_{C(\mathbb{T}_{\mathbf{r}}^n)} = \begin{cases} \prod\limits_{j=1}^{n} (1 - r_j)^{-1}, & \min\limits_{1 \le j \le n} m_j = -1, \\ \Theta(\mathbf{r}, n) \sum\limits_{\gamma \in \mathfrak{N} \setminus \varnothing} \prod\limits_{j \in \gamma} r_j^{m_j + 1}, & \mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^n, \end{cases} \tag{34}$$

де $\Theta(\mathbf{r}, n)$ — константа, залежна тільки від параметрів $\mathbf{r}$ та n так, що

$$\prod_{j=1}^{n} (1 + r_j)^{-1} \le \Theta(\mathbf{r}, n) \le \prod_{j=1}^{n} (1 - r_j)^{-1}.$$

***Доведення теореми* 8.** Оцінка зверху величини, що знаходиться в лівій частині (34), в першому випадку випливає із співвідношення

$$|f(\mathbf{z})| = |K(d\mu)(\mathbf{z})| \le \int\limits_{\mathbb{T}^n} |C(\mathbf{z}, \mathbf{w})| d|\mu|(\mathbf{w}) \le |\mu|(\mathbb{T}^n) \max_{\mathbf{w} \in \mathbb{T}^n} |C(\mathbf{z}, \mathbf{w})| \quad \forall\, \mathbf{z} \in \mathbb{D}^n.$$

У другому випадку верхня оцінка доводиться так, як співвідношення (31), із формальною заміною z_j^{N+1} на $z_j^{m_j+1}$.

Для оцінки знизу розглянемо функцію

$$f_*(\mathbf{z}) := C(\mathbf{z}, \mathbf{1}) = \prod_{j=1}^{n} (1 - z_j)^{-1}, \qquad \mathbf{1} := \Big(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}\Big),$$

яка зображується інтегралом типу Коші – Стільтьєса $K(d\delta_n)$, в якому $\delta_n = \underbrace{\delta \times \ldots \times \delta}_{n}$ — добуток одновимірних дельта-мір Дірака на $\mathbb{T}$, зосереджених в точці $w = 1$.

У першому випадку співвідношень (34) оцінка знизу є очевидною. У другому випадку згідно з (29)

$$f_*(\mathbf{z}) - S_{\mathbf{m}}^{\square}(f_*)(\mathbf{z}) = \prod_{j=1}^{n} (1 - z_j)^{-1} \sum_{\gamma \in \mathfrak{N} \setminus \varnothing} (-1)^{\#\gamma + 1} \prod_{j \in \gamma} z_j^{m_j + 1} \quad \forall\, \mathbf{z} \in \mathbb{D}^n.$$

Отже, для даного мультиіндексу $\mathbf{m}$, вибравши точку $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{D}^n$ так, щоб $\zeta_j^{m_j+1} = -r_j^{m_j+1}$, одержимо

$$\|f_* - S^{\square}_{\mathbf{m}}(f_*)\|_{C(\mathbb{T}^n_{\mathbf{r}})} \geq \prod_{j=1}^{n} |1-\zeta_j|^{-1} \left| \sum_{\gamma\in\mathfrak{N}\setminus\varnothing} (-1)^{\#\gamma+1} \prod_{j\in\gamma} \zeta_j^{m_j+1} \right| \geq$$

$$\geq \prod_{j=1}^{n} (1+r_j)^{-1} \sum_{\gamma\in\mathfrak{N}\setminus\varnothing} \prod_{j\in\gamma} r_j^{m_j+1}.$$

Теорему доведено.

У контексті теореми 7 наведемо деякі достатні умови для можливості зображення голоморфних функцій, визначених тільки в одній з областей $\mathbb{D}^n_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{N}$, інтегралами типу Коші – Стільтьєса.

Позначимо через $\{\chi_j\}_{j=1}^n$ набір функцій $\chi_j : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, які діють за правилом

$$\chi_j(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = (w_1, \ldots, w_{j-1}, z_j, w_{j+1}, \ldots, w_n).$$

Теорема 9. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathfrak{N}$, $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}^n_\beta)$. Функцію f можна зобразити у вигляді $f = K(d\mu)$, де μ — деякий заряд на $\mathbb{T}^n$, якщо знайдеться функція g, визначена в області Ω^n, така, що*:

1) $g(\infty_\alpha, \mathbf{z}_{\overline{\alpha}}) = 0 \ \forall\ \mathbf{z}_{\overline{\alpha}} \in \mathbb{C}^{\#\overline{\alpha}} \setminus \mathbb{T}^{\#\overline{\alpha}} \ \forall\ \alpha \in \mathfrak{N} \setminus \varnothing$ *і* $g|_{\mathbb{D}^n_\beta} = 0$;

2) *функція g є голоморфною принаймні за однією змінною*;

3) *для деякого індексу $j \in \gamma$, де γ — множина індексів тих змінних, за якими функція g є голоморфною,* $g(\chi_j(\mathbf{w}, \mathbf{z})) = 0 \ \forall\ \mathbf{w} \in \Omega^n \ \forall\ \mathbf{z} \in \mathbb{D}^n_\beta$;

4) $\sup\limits_{0\leq\varrho<1} \int\limits_{\mathbb{T}^n} \left| f(\varrho\mathbf{z}_\beta, \varrho^{-1}\mathbf{z}_{\overline{\beta}}) + \sum\limits_{\alpha\in\mathfrak{N}\setminus\beta} (-1)^{\#\beta-\#\alpha} g(\varrho\mathbf{z}_\alpha, \varrho^{-1}\mathbf{z}_{\overline{\alpha}}) \right| d\sigma_n(\mathbf{z}) < \infty.$

Умови, наведені у цьому твердженні, на думку автора, є дещо простішими з точки зору перевірки їх виконання, ніж умови, наведені в теоремі 7. Йдеться, насамперед, про умови 2 і 3, оскільки умови 1 та 4 послабити не можна — згідно з теоремою 1 вони є необхідними. Зауважимо також, що у випадку, коли функція g є голоморфною за всіма змінними, умова 3 є несуттєвою і нею можна знехтувати.

***Доведення теореми* 9.** Для спрощення викладок будемо вважати, що $\beta = \mathcal{N}$ і, отже, $\mathbb{D}^n_\beta = \mathbb{D}^n$. Нехай g — функція, яка задовольняє всі умови теореми. Покладемо

$$u_\varrho(\mathbf{z}) := f(\varrho\mathbf{z}) + \sum_{\alpha\in\mathfrak{N}\setminus\mathcal{N}} (-1)^{n-\#\alpha} g(\varrho\mathbf{z}_\alpha, \varrho^{-1}\mathbf{z}_{\overline{\alpha}}).$$

Оскільки згідно з умовою 4 сім'я $\{u_\varrho\}_{0\leq\varrho<1}$ є обмеженою в $L_1(\mathbb{T}^n)$, то сім'я абсолютно неперервних на $\mathbb{T}^n$ зарядів $\{\mu_\varrho\}_{0\leq\varrho<1}$, $\mu_\varrho(E) = \int\limits_E u_\varrho d\sigma_n$, є обмеженою за варіацією, а тому (див. доведення достатності теореми 1) можна вказати таку послідовність $\{\varrho_j\}_{j=1}^\infty$, $\varrho_j \to 1-$, $j \to \infty$, що μ_{ϱ_j} при $j \to \infty$ буде слабко збігатися до деякого заряду μ, тобто

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\mathbb{T}^n} h u_{\varrho_j} d\sigma_n = \int\limits_{\mathbb{T}^n} h d\mu$$

для будь-якої функції $h \in C(\mathbb{T}^n)$.

Зокрема,

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n} C(\mathbf{z}, \mathbf{w}) d\mu(\mathbf{w}) = \lim_{j\to\infty} \int\limits_{\mathbb{T}^n} C(\mathbf{z}, \mathbf{w}) u_{\varrho_j}(\mathbf{w}) d\sigma_n(\mathbf{w}) =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{T}^n} C(\mathbf{z},\mathbf{w}) f(\varrho_j \mathbf{w}) d\sigma_n(\mathbf{w}) +$$

$$+ \sum_{\alpha\in\mathfrak{N}\setminus\mathcal{N}} (-1)^{n-\#\alpha} \int\limits_{\mathbb{T}^n} C(\mathbf{z},\mathbf{w}) g(\varrho_j \mathbf{w}_\alpha, \varrho_j^{-1}\mathbf{w}_{\overline{\alpha}}) d\sigma_n(\mathbf{w}) \Bigg) =$$

$$= \lim_{j\to\infty} f(\varrho_j \mathbf{z}) = f(\mathbf{z}) \quad \forall\, \mathbf{z}\in\mathbb{D}^n. \tag{35}$$

Справді, оскільки

$$C(\mathbf{z},\mathbf{w}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}_0^n} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \overline{\mathbf{w}}^{\mathbf{k}} \quad \forall\, \mathbf{z}\in\mathbb{D}^n \quad \forall\, \mathbf{w}\in\mathbb{T}^n,$$

то

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n} C(\mathbf{z},\mathbf{w}) g(\varrho\mathbf{w}_\alpha, \varrho^{-1}\mathbf{w}_{\overline{\alpha}}) d\sigma_n(\mathbf{w}) =$$

$$= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}_0^n} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \int\limits_{\mathbb{T}^n} \overline{\mathbf{w}}^{\mathbf{k}} g(\varrho\mathbf{w}_\alpha, \varrho^{-1}\mathbf{w}_{\overline{\alpha}}) d\sigma_n(\mathbf{w}). \tag{36}$$

Далі, припускаючи, що функція g є голоморфною за j-ю змінною, згідно з умовою 3 для даного $\alpha\in\mathfrak{N}\setminus\mathcal{N}$ будемо мати рівність

$$g(\varrho\mathbf{w}_\alpha, \varrho^{-1}\mathbf{w}_{\overline{\alpha}}) = \begin{cases} 0, & \alpha \ni j, \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(\alpha,\varrho,\mathbf{w}')\varrho^k w_j^{-k}, & \alpha \not\ni j, \end{cases} \quad \forall\, \mathbf{w}\in\mathbb{T}^n,$$

в якій $\mathbf{w}' = (w_1,\ldots,w_{j-1},w_{j+1},\ldots,w_n)$, $a_k(\alpha,\varrho,\mathbf{w}')$ — коефіцієнти, залежні від α, ϱ і $\mathbf{w}'$.

На основі цієї рівності

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n} \overline{\mathbf{w}}^{\mathbf{k}} g(\varrho\mathbf{w}_\alpha, \varrho^{-1}\mathbf{w}_{\overline{\alpha}}) d\sigma_n(\mathbf{w}) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{T}^n} \overline{\mathbf{w}}^{\mathbf{k}} \left(\sum_{l=1}^{\infty} a_l(\alpha,\varrho,\mathbf{w}')\varrho^l w_j^{-l} \right) d\sigma_n(\mathbf{w}) =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \varrho^l \int\limits_{\mathbb{T}^n} a_l(\alpha,\varrho,\mathbf{w}') \overline{\mathbf{w}}^{\mathbf{k}} w_j^{-l} d\sigma_n(\mathbf{w}) = 0 \quad \forall\, \mathbf{k}\in\mathbb{N}_0^n \quad \forall\, \alpha\in\mathfrak{N}\setminus\mathcal{N}.$$

Підставляючи знайдене значення інтеграла в (36), одержуємо рівність (35).

Теорему доведено.

Деякі застосування. У зв'язку з теоремою 3 наведемо умови, за яких функцію, голоморфну в Ω^n або в Δ^n, можна зобразити інтегралом типу Коші – Стільтьєса борелівської міри класу $RP(\Omega^n)$ або $RP(\Delta^n)$ відповідно. Цей клас мір відіграє важливу роль у комплексному аналізі і, зокрема, в теорії голоморфних функцій багатьох змінних (див., наприклад, [11, 16]).

Означення 1. *Нехай* $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{X} = \mathbb{T}^n \vee \mathbb{R}^n$, $\mathbb{Y} := \mathbb{Z}_+^n \cup (-\mathbb{Z}_+^n) \vee \mathbb{R}_+^n \cup (-\mathbb{R}_+^n)$. *Борелівська міра* μ *на* $\mathbb{X}$ *належить класові* $RP(\mathbb{X})$, *якщо* $|\mu|(\mathbb{X}) < \infty$ *і* $\widehat{\mu}(\mathbf{x}) = 0$ *для всіх* $\mathbf{x}\notin\mathbb{Y}$.

Теорема D. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$ *і* $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}^n)$. *Наступні твердження є рівносильними*:

1) $f = K(d\mu) - \overline{f(\mathbf{0})}$, *де* μ — *борелівська міра класу* $RP(\mathbb{T}^n)$;

2) $\mathrm{Re}\, f \geq 0$.

Доведення цього твердження можна провести, зокрема, за схемою доведення теореми 3, однак ця методика в даному випадку виявляється недосконалою — доведення видається надто громіздким. Мабуть, найкращий варіант доведення теореми D, напрочуд простого та елегантного, належить авторам роботи [7].

Наша методика виявляється дієвішою в застосуваннях до функцій, голоморфних в Δ^n. А саме, при доведенні наступного твердження, яке не є цілковитим аналогом теореми D, оскільки виявляє залежність характеризації множини інтегралів типу Коші – Стільтьєса мір класу $RP(\mathbb{R}^n)$ від виміру n.

Теорема 10. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$ *і* $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{H}^n)$. *Наступні твердження є рівносильними*:

1) $f = \mathcal{K}(d\mu)$, *де* μ — *борелівська міра класу* $RP(\mathbb{R}^n)$;

2) $\mathrm{Re}((-i)^n f) \geq 0$ *і виконується* (10).

***Доведення теореми* 10.** 1) $\Rightarrow$ 2). Очевидно, якщо $f(\mathbf{z}) = \mathcal{K}(d\mu)(\mathbf{z})$, то $\overline{f(\mathbf{z})} = \mathcal{K}(d\mu)(\overline{\mathbf{z}})$.

Крім цього, для будь-якого $\alpha \in \mathfrak{N} \setminus (\varnothing \cup \mathcal{N})$

$$\mathcal{K}(d\mu)(\mathbf{z}) = 0 \quad \forall\, \mathbf{z} \in \mathbb{H}^n_\alpha,$$

де

$$\mathbb{H}^n_\alpha := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n : \mathrm{Im}\, z_j > 0,\ j \in \alpha\ \wedge\ \mathrm{Im}\, z_j < 0,\ j \in \overline{\alpha}\}.$$

Справді, оскільки для будь-якого $\alpha \in \mathfrak{N} \setminus (\varnothing \cup \mathcal{N})$

$$\mathcal{C}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = (-1)^{n - \#\alpha}\ i^n \int\limits_{\mathbb{R}^n_\alpha} e^{i(\mathbf{z},\mathbf{t})} e^{-i(\mathbf{w},\mathbf{t})} dm_n(\mathbf{t}) \quad \forall\, \mathbf{z} \in \mathbb{H}^n_\alpha \quad \forall\, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n,$$

де

$$\mathbb{R}^n_\alpha := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_j > 0,\ j \in \alpha\ \wedge\ x_j < 0,\ j \in \overline{\alpha}\},$$

то для будь-якого $\alpha \in \mathfrak{N} \setminus (\varnothing \cup \mathcal{N})$

$$\mathcal{K}(d\mu)(\mathbf{z}) = (-1)^{n - \#\alpha}\ i^n \int\limits_{\mathbb{R}^n_\alpha} e^{i(\mathbf{z},\mathbf{t})} \widehat{d\mu}(\mathbf{t}) dm_n(\mathbf{t}) = 0 \quad \forall\, \mathbf{z} \in \mathbb{H}^n_\alpha. \tag{37}$$

Отже, згідно з (13) і (37)

$$2^{-n+1}\, \mathrm{Re}\left((-i)^n f(\mathbf{z})\right) = (2i)^{-n} \left(f(\mathbf{z}) + (-1)^n \overline{f(\mathbf{z})}\right) =$$

$$= (2i)^{-n} \left(\mathcal{K}(d\mu)(\mathbf{z}) + (-1)^n \mathcal{K}(d\mu)(\overline{\mathbf{z}})\right) =$$

$$= (2i)^{-n} \left(\sum_{\alpha \in \mathfrak{N}} (-1)^{n - \#\alpha} \mathcal{K}(d\mu)(\mathbf{z}_\alpha, \overline{\mathbf{z}}_{\overline{\alpha}})\right) = \mathcal{P}(d\mu)(\mathbf{z}) \geq 0 \quad \forall\, \mathbf{z} \in \mathbb{H}^n.$$

Виконання умови (10) є зрозумілим (див. доведення теореми 2).

2) $\Rightarrow$ 1). Розглянемо функцію g, визначену в Δ^n за правилом

$$g(\mathbf{z}) := \begin{cases} f(\mathbf{z}), & \mathbf{z} \in \mathbb{H}^n, \\ \overline{f(\overline{\mathbf{z}})}, & \mathbf{z} \in \mathbb{H}^n_{\varnothing}, \\ 0, & \mathbf{z} \in \mathbb{H}^n_\alpha, \ \alpha \in \mathfrak{N} \setminus (\varnothing \cup \mathcal{N}). \end{cases}$$

Зрозуміло, що функція g є голоморфною в Δ^n і задовольняє умову (10). Далі (див. позначення (3)),

$$\mathfrak{g}_y(\mathbf{x}) = (2i)^{-n} \left(g(\mathbf{x} + iy) + (-1)^n g(\mathbf{x} - iy) \right) =$$

$$= (2i)^{-n} \left(f(\mathbf{x} + iy) + (-1)^n \overline{f(\mathbf{x} + iy)} \right) =$$

$$= 2^{-n+1} \operatorname{Re} \left((-i)^n f(\mathbf{x} + iy) \right) \geq 0 \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad \forall\, y > 0.$$

Отже, за теоремою 4 $g = \mathcal{K}(d\mu)$ в Δ^n, де μ — деяка борелівська міра на $\mathbb{R}^n$, така, що $|\mu|(\mathbb{R}^n) < \infty$.

Переконаємось у тому, що $\mu \in RP(\mathbb{R}^n)$. Справді, $0 = g(\mathbf{z}) = \mathcal{K}(d\mu)(\mathbf{z})$ для всіх $\mathbf{z} \in \mathbb{H}^n_\alpha, \ \alpha \in \mathfrak{N} \setminus (\varnothing \cup \mathcal{N})$, тому згідно з (37) і означенням функції g для таких $\mathbf{z}$

$$0 = \int\limits_{\mathbb{R}^n_\alpha} e^{i(\mathbf{z},\mathbf{t})} \widehat{d\mu}(\mathbf{t}) dm_n(\mathbf{t}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_\alpha} e^{i(\mathbf{x},\mathbf{t})} e^{-(\mathbf{y},\mathbf{t})} \widehat{d\mu}(\mathbf{t}) dm_n(\mathbf{t}),$$

де $\mathbf{x} = (\operatorname{Re} z_1, \ldots, \operatorname{Re} z_n)$, $\mathbf{y} = (\operatorname{Im} z_1, \ldots, \operatorname{Im} z_n)$.

Інтегруючи останню рівність по мірі $\overline{\mu}$ на $\mathbb{R}^n$ і змінюючи порядок інтегрування в повторному інтегралі, отримуємо

$$0 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} 0 \cdot d\overline{\mu} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_\alpha} e^{i(\mathbf{x},\mathbf{t})} e^{-(\mathbf{y},\mathbf{t})} \widehat{d\mu}(\mathbf{t}) dm_n(\mathbf{t}) \right) d\overline{\mu}(\mathbf{x}) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n_\alpha} e^{-(\mathbf{y},\mathbf{t})} \widehat{d\mu}(\mathbf{t}) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{x},\mathbf{t})} d\overline{\mu}(\mathbf{x}) \right) dm_n(\mathbf{t}) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n_\alpha} e^{-(\mathbf{y},\mathbf{t})} |\widehat{d\mu}(\mathbf{t})|^2 dm_n(\mathbf{t}) \quad \forall\, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_\alpha \quad \forall\, \alpha \in \mathfrak{N} \setminus (\varnothing \cup \mathcal{N}),$$

звідки випливає, що $\widehat{\mu}(\mathbf{t}) = 0$ для всіх $\mathbf{t} \in \bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{N} \setminus (\varnothing \cup \mathcal{N})} \mathbb{R}^n_\alpha$, тобто $\mu \in RP(\mathbb{R}^n)$.

Теорему доведено.

1. *Shohat J. A., Tamarkin J. D.* The problem of moments // Amer. Math. Soc. Math. Surv. – New York, 1943. – Vol. 2. – 140 p.
2. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966. – 544 с.
3. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1973. – 552 с.
4. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 623 с.
5. *Айзенберг Л. А.* Формулы Карлемана в комплексном анализе. – Новосибирск: Наука, 1990. – 248 с.
6. *Levin B. Ya.* Lectures on entire functions // Transl. Math. Monogr. – Providence, Rhode Island: AMS, 1996. – **150**. – 248 p.

7. *Koranyi A., Pukansky J.* Holomorphic functions with positive real part in polycylinder // Trans. Amer. Math. Soc. – 1963. – **108.** – P. 449 – 456.
8. *Владимиров В. С., Дрожжинов Ю. В.* Голоморфные функции в поликруге с неотрицательной мнимой частью // Мат. заметки. – 1974. – **15**, № 1. – С. 55 – 61.
9. *Айзенберг Л. А., Даутов Ш. А.* Голоморфные функции многих комплексных переменных с неотрицательной действительной частью. Следы голоморфных и плюригармонических функций на границе Шилова // Мат. сб. – 1976. – **99**, № 3. – С. 342 – 355.
10. *Косбергенов С., Кытманов А. М.* Обобщение формул Шварца и Рисса – Херглотца в областях Рейнхарда // Изв. вузов. Математика. – 1984. – № 10. – С. 60 – 63.
11. *Владимиров В. С., Сергеев А. Г.* Комплексный анализ в трубе будущего // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики (фундам. направления) / ВИНИТИ. – 1985. – **8**. – С. 191 – 266.
12. *Тумаркин Г. Ц.* Об интегралах типа Коши – Стилтьеса // Успехи мат. наук. – 1956. – **11**, № 4. – С. 163 – 166.
13. *Duren P.* Theory of H^p spaces. – New York: Acad. Press, 1970. – 258 p.
14. *Хейман У., Кенеди П.* Субгармонические функции. – М.: Мир, 1980. – 304 с.
15. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.
16. *Рудин. У.* Теория функций в поликруге. – М.: Мир, 1974. – 160 с.
17. *Hille E., Tamarkin J. D.* On absolute integrability of Fourier transforms // Fund. math. – 1935. – **25.** – P. 329 – 352.
18. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. – М.: Наука, 1991. – 448 с.
19. *Знаменская Л. Н.* Обобщение теоремы Ф. и М. Риссов и формулы Карлемана // Сиб. мат. журн. – 1988. – **29**, № 4. – С. 75 – 79.
20. *Знаменская Л. Н.* Многомерные аналоги теоремы Ф. и М. Риссов и формулы Карлемана // Изв. вузов. Математика. – 1989. – № 7. – С. 67 – 69.
21. *Рогинская М. М.* Два многомерных аналога теоремы Ф. и М. Риссов // Зап. науч. сем. Петербург. отд-ния Мат. ин-та РАН. – 1998. – **255**. – С. 16 – 176.

Одержано 21.03.2005