УДК 517.925

І. І. Король, М. О. Перестюк (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ЩЕ РАЗ ПРО ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД ПОСЛІДОВНИХ ПЕРІОДИЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ А. М. САМОЙЛЕНКА

A new numerical-analytic algorithm for the investigation of periodic solutions of nonlinear periodic systems of differential equations $dx/dt = A(t)x + f(t, x)$ in the critical case is developed. The problems of the existence and approximate construction of the solutions are studied, formulas for the estimation of convergence of the successive periodic approximations are obtained.

Розроблено новий чисельно-аналітичний алгоритм дослідження періодичних розв'язків нелінійних періодичних систем диференціальних рівнянь $dx/dt = A(t)x + f(t, x)$ у критичному випадку. Вивчаються питання існування і наближеної побудови розв'язків, знайдено оцінки збіжності послідовних періодичних наближень.

Теорія періодичних крайових задач є розділом теорії звичайних диференціальних рівнянь, який на сьогоднішній день одержав всебічний розвиток. Цій тематиці присвячено велику кількість робіт, що викликано, з одного боку, її широким застосуванням при вивченні найрізноманітніших технічних та інших природних процесів, а з іншого — широким колом досліджуваних питань, а також складністю дослідження, особливо у випадку нелінійних систем. Розроблено значну кількість методів дослідження періодичних розв'язків систем диференціальних та інших рівнянь. Не претендуючи на повноту, відмітимо в цьому плані монографії М. М. Боголюбова, Ю. О. Митропольського [1], А. М. Самойленка, М. Й. Ронто [2 – 4], О. А. Бойчука, В. Ф. Журавльова, А. М. Самойленка [5], А. Ю. Лучки [6], І. Г. Малкіна [7], Є. О. Гребєнікова, Ю. О. Рябова [8], В. А. Якубовича, В. М. Старжинського [9], які містять також огляди результатів і широку бібліографію з розглядуваних питань.

Серед методів дослідження періодичних розв'язків ліпшицевих нормальних систем широкої відомості набув чисельно-аналітичний метод послідовних періодичних наближень, запропонований академіком А. М. Самойленком [10, 11]. Згодом у багатьох роботах автора методу та його учнів і послідовників він був узагальнений і застосований до дослідження широкого класу задач. Повний огляд результатів з даного напрямку можна знайти в [12 – 18].

Нагадаємо коротко суть чисельно-аналітичного методу А. М. Самойленка.

Періодичні з періодом T розв'язки так званої T-системи [2, 10, 11]

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

було запропоновано шукати як границю $x^*(t, x_0) = \lim\limits_{m\to\infty} x_m(t, x_0)$ послідовності T-періодичних функцій

$$x_{m+1}(t, x_0) = x_0 + \int\limits_0^t \left(f(s, x_m(s, x_0)) - \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(\sigma, x_m(\sigma, x_0))\,d\sigma \right) ds,$$

яка задовольняє умову

$$\int\limits_0^T f(\sigma, x^*(\sigma, x_0))\,d\sigma = 0.$$

Важливою умовою щодо функції $f(t, x)$ є умова малості її константи Ліпшиця, а саме

$$\lambda_{\max}(K)T < q, \tag{1}$$

де $\lambda_{\max}(K)$ — найбільше власне значення матриці K з умови Ліпшиця, q — деяка стала, значення якої постійно уточнювалося в роботах як А. М. Самойленка, так і інших математиків. Зрозуміло, що при більшому значенні q розширюється й область застосування методу. Аналіз робіт з цього питання можна знайти в [12]. Зауважимо лише, що в [19] було остаточно встановлено, що $q = 3{,}41613062639278795913 8$ є непокращуваною оцінкою.

У даній статті чисельно-аналітичний метод послідовних періодичних наближень узагальнено для відшукання T-періодичних розв'язків T-періодичних систем диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x) \tag{2}$$

у випадку, коли система

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{3}$$

має k-параметричну сім'ю T-періодичних розв'язків.

Перевагою запропонованого нами алгоритму є те, що умова типу (1) накладається не на всю праву частину системи (2), а лише на нелінійність $f(t,x)$.

1. Періодичні розв'язки лінійних періодичних систем. Розглянемо лінійну неоднорідну T-періодичну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + h(t), \tag{4}$$

тобто систему, в якій матриця-функція $A(t)$ і вектор-функція $h(t)$ такі, що $x, h \in \mathbb{R}^n$, $A(t+T) = A(t)$, $h(t+T) = h(t)$ при всіх $t \in \mathbb{R}$. Вважатимемо $A(t)$ і $h(t)$ неперервними на всій числовій осі.

Позначимо матрицант відповідної однорідної системи (3) через Ω_0^t. При цьому розв'язок $x(t,x_0)$, $x(0,x_0) = x_0$ системи (4) можна записати у вигляді

$$x(t,x_0) = \Omega_0^t x_0 + \int_0^t \Omega_s^t h(s)\,ds.$$

Якщо серед цієї сім'ї розв'язків є T-періодичні, то їх початкове значення x_0 визначається з умови $x(0,x_0) = x(T,x_0)$, тобто з умови

$$(E_n - \Omega_0^T)x_0 = \int_0^T \Omega_s^T h(s)\,ds, \tag{5}$$

де E_n — одинична n-вимірна матриця.

Якщо серед власних чисел матриці Ω_0^T немає одиниці, то система алгебраїчних рівнянь (5) має єдиний розв'язок

$$x_0 = (E_n - \Omega_0^T)^{-1} \int_0^T \Omega_s^T h(s)\,ds,$$

і тому початкова система диференціальних рівнянь (4) має єдиний T-періодичний розв'язок

$$x = x^*(t) = \Omega_0^t (E_n - \Omega_0^T)^{-1} \int_0^T \Omega_s^T h(s)\,ds + \int_0^t \Omega_s^t h(s)\,ds.$$

Якщо ж одиниця є мультиплікатором системи (3), то, як відомо [20], система (4) не для кожної T-періодичної функції $h(t)$ має T-періодичний розв'язок.

Наявність одиниці серед власних чисел матриці Ω_0^T — це умова існування T-періодичних розв'язків відповідної однорідної системи (3). Відомо також [20], що якщо система рівнянь (3) має k лінійно незалежних T-періодичних розв'язків $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), \ldots, \varphi_k(t)$, то і відповідна спряжена система рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = -A^{\top}(t)x, \tag{6}$$

де $A^{\top}(t)$ — транспонована щодо $A(t)$ матриця, має рівно k лінійно незалежних T-періодичних розв'язків $\psi_1(t)$, $\psi_2(t), \ldots, \psi_k(t)$. У цьому випадку система рівнянь (4) має T-періодичні розв'язки (їх є k-параметрична сім'я) лише для таких функцій $h(t)$, які ортогональні до всіх T-періодичних розв'язків спряженої системи, тобто коли

$$\int_0^T \langle \psi_j(s), h(s) \rangle ds = 0, \qquad j = \overline{1, k}.$$

Таким чином, при $1 \le k \le n$ маємо критичний випадок [5, 21], коли система (3) має k лінійно незалежних T-періодичних розв'язків. Далі розглядатимемо саме цей випадок.

Лема. *Якщо система* (3) *має* k *лінійно незалежних* T*-періодичних розв'язків, то для будь-якої* T*-періодичної функції* $h(t)$ *існує функція* $H(t)$ *періоду* T *така, що система*

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + h(t) - H(t) \tag{7}$$

має k*-параметричну сім'ю* T*-періодичних розв'язків.*

Доведення. Справді, необхідною і достатньою умовою існування T-періодичних розв'язків системи (7) є умова

$$\int_0^T \langle \psi_j(t),\ h(t) - H(t) \rangle dt = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, k. \tag{8}$$

Через $\Psi(t)$ позначимо $(n \times k)$-матрицю, стовпцями якої є k лінійно незалежних T-періодичних розв'язків $\psi_1(t), \ldots, \psi_k(t)$ спряженої до (3) системи (6). При цьому рівняння (8) запишеться так:

$$\int_0^T \Psi^{\top}(s)\{h(s) - H(s)\} ds = 0. \tag{9}$$

Зрозуміло, що умова (9) виконується, якщо покладемо

$$H(t) = \Psi(t)\alpha,$$

а вектор-стовпець $\alpha \in \mathbb{R}^k$ визначимо з умови

$$\int_0^T \Psi^{\top}(s)\Psi(s) ds \cdot \alpha = \int_0^T \Psi^{\top}(s) h(s) ds. \tag{10}$$

Система алгебраїчних рівнянь (10) має єдиний розв'язок, тому що визначник матриці

$$P_1 = \int_0^T \Psi^{\top}(s)\Psi(s) ds$$

є відмінним від нуля, оскільки вектор-функції $\psi_1(t), \ldots, \psi_k(t)$ — лінійно незалежні розв'язки системи рівнянь (6), що й завершує доведення леми.

Таким чином, за функцію $H(t)$ потрібно взяти

$$H(t) = \Psi(t) P_1^{-1} \int_0^T \Psi^{\top}(s) h(s) ds,$$

і тоді T-періодичні розв'язки системи (7) можна записати у вигляді

$$x(t, x_0) = \Omega_0^t x_0 + \int_0^t \Omega_s^t \left\{ h(s) - \Psi(s) P_1^{-1} \int_0^T \Psi^\top(\sigma) h(\sigma) d\sigma \right\} ds, \tag{11}$$

де x_0 — розв'язки лінійної неоднорідної алгебраїчної системи

$$(E_n - \Omega_0^T) x_0 = \int_0^T \Omega_s^T \left\{ h(s) - \Psi(s) P_1^{-1} \int_0^T \Psi^\top(\sigma) h(\sigma) d\sigma \right\} ds. \tag{12}$$

Позначимо через $\Theta(t)$ $(n \times (n-k))$-матрицю, стовпцями якої є $n-k$ лінійно незалежних розв'язків $\Theta_i(t)$, $i = \overline{1, n-k}$, спряженої системи (6), які не є T-періодичними, через $X(t)$ деяку фундаментальну матрицю системи (3), а через $Y(t)$ таку фундаментальну матрицю спряженої до неї системи (6), у якої перші k стовпців утворює матриця $\Psi(t)$, а інші — матриця $\Theta(t)$:

$$Y(t) = (\Psi(t), \Theta(t)). \tag{13}$$

Оскільки $X(t)$ і $Y(t)$ пов'язані співвідношенням $Y^\top(t) X(t) = C$, де C — деяка стала матриця, то для матриціанта системи (3) маємо

$$\Omega_s^t = X(t) X^{-1}(s) = (Y^\top(t))^{-1} Y^\top(s) = (Y^\top(t))^{-1} \begin{pmatrix} \Psi^\top(s) \\ \Theta^\top(s) \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Розглянемо другий доданок формули (11):

$$\int_0^t \Omega_s^t \left\{ h(s) - \Psi(s) P_1^{-1} \int_0^T \Psi^\top(\sigma) h(\sigma) d\sigma \right\} ds =$$

$$= (Y^\top(t))^{-1} \int_0^t \begin{pmatrix} \Psi^\top(s) \\ \Theta^\top(s) \end{pmatrix} \left\{ h(s) - \Psi(s) P_1^{-1} \int_0^T \Psi^\top(\sigma) h(\sigma) d\sigma \right\} ds =$$

$$= (Y^\top(t))^{-1} \left\{ \int_0^t \begin{pmatrix} \Psi^\top(s) \\ \Theta^\top(s) \end{pmatrix} h(s) ds - \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix} P_1^{-1} \int_0^T \Psi^\top(\sigma) h(\sigma) d\sigma \right\} =$$

$$= (Y^\top(t))^{-1} \left\{ \int_0^t \begin{pmatrix} \Psi^\top(s) - P_1(t) P_1^{-1} \Psi^\top(s) \\ \Theta^\top(s) - P_2(t) P_1^{-1} \Psi^\top(s) \end{pmatrix} h(s) ds - \int_t^T \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix} P_1^{-1} \Psi^\top(s) h(s) ds \right\} =$$

$$= \int_0^t (Y^\top(t))^{-1} U(t, s) h(s) ds - \int_t^T (Y^\top(t))^{-1} V(t, s) h(s) ds. \tag{15}$$

Тут

$$P_1(t) = \int_0^t \Psi^\top(s) \Psi(s) ds, \qquad P_2(t) = \int_0^t \Theta^\top(s) \Psi(s) ds, \qquad P_1(T) = P_1,$$

$$U(t, s) = \begin{pmatrix} U_1(t, s) \\ U_2(t, s) \end{pmatrix}, \qquad V(t, s) = \begin{pmatrix} V_1(t, s) \\ V_2(t, s) \end{pmatrix},$$

$$U_1(t, s) = \Psi^\top(s) - P_1(t) P_1^{-1} \Psi^\top(s), \qquad U_2(t, s) = \Theta^\top(s) - P_2(t) P_1^{-1} \Psi^\top(s),$$

$$V_1(t, s) = P_1(t) P_1^{-1} \Psi^\top(s), \qquad V_2(t, s) = P_2(t) P_1^{-1} \Psi^\top(s).$$

Оскільки $U_1(T, s) = 0$, то при $t = T$ з (15) одержимо

$$\int_0^T \Omega_s^T \left\{ h(s) - \Psi(s) P_1^{-1} \int_0^T \Psi^\top(\sigma) h(\sigma) d\sigma \right\} ds = (Y^\top(T))^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \int_0^T U_2(T, s) h(s) ds \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Помноживши (12) зліва на $Y^\top(T)$ і врахувавши (14), (16), отримаємо

$$\begin{pmatrix} \Psi^\top(T) - \Psi^\top(0) \\ \Theta^\top(T) - \Theta^\top(0) \end{pmatrix} x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \int_0^T U_2(T,s)h(s)ds \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\det Y(T) \neq 0$ і $\Psi(T) = \Psi(0)$, то система (12) еквівалентна лінійній неоднорідній алгебраїчній системі

$$Gx_0 = \int_0^T U_2(T,s)h(s)ds, \tag{17}$$

де $G = \Theta^\top(T) - \Theta^\top(0)$ — прямокутна $((n-k)\times n)$-матриця, ранг якої дорівнює $n-k$. При цьому, згідно з теоремою 1.1 [21], система (17) є сумісною при довільній $h(s)$, а її розв'язок — k-параметричним і має вигляд

$$x_0 = F\xi + G^+ \int_0^T U_2(T,s)h(s)ds, \tag{18}$$

де G^+ — єдина $(n \times (n-k))$-матриця, псевдообернена по Пенроузу до матриці G, F — фундаментальна $(n\times k)$-матриця розв'язків однорідної системи $Gx_0 = 0$, $\xi \in \mathbb{R}^k$ — довільний вектор-стовпець. Стовпці $f_i \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1,k}$, матриці F лінійно незалежні і утворюють базис ядра матриці G: $Gf_i = 0$. Зауважимо, що при цьому

$$GG^+ = E_k. \tag{19}$$

Підставляючи (18) в (11), остаточно одержуємо, що система (7) має k-параметричну сім'ю T-періодичних розв'язків вигляду

$$x(t,x_0) = x(t,\xi) = \Omega_0^t F\xi + \Omega_0^t G^+ \int_0^T U_2(T,s)h(s)ds +$$
$$+ \int_0^t (Y^\top(t))^{-1} U(t,s)h(s)ds - \int_t^T (Y^\top(t))^{-1} V(t,s)h(s)ds.$$

***Зауваження* 1.** У деяких випадках матрицант завжди можна записати у явному вигляді [22]. Зокрема, якщо система (3) є системою зі сталими коефіцієнтами: $A(t) = A = \text{const}$, то $\Omega_0^t = e^{At}$, а якщо матриця $A(t)$ задовольняє умову Лаппо – Данилевського

$$A(t)\cdot \int_0^t A(s)ds = \int_0^t A(s)ds \cdot A(t),$$

то при цьому

$$\Omega_0^t = e^{\int_0^t A(s)ds}.$$

Знаючи Ω_0^t, знаходимо матрицант спряженої системи (6): $\tilde{Y}(t) = ((\Omega_0^t)^\top)^{-1}$. Виділяючи після цього лінійно незалежні T-періодичні розв'язки системи (6), за формулою (13) записуємо фундаментальну матрицю, яка і використовується для подальших обчислень.

***Зауваження* 2.** Якщо $A(t) = A + B(t)$, де $B(t)$ — неперервна T-періодична матриця, то можемо замість системи (3) розглядати систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

зі сталими коефіцієнтами. При цьому слід перевірити виконання умов B – D (що наведені в п. 2) для функції $\tilde{f}(t,x) = B(t)x + f(t,x)$.

***Зауваження* 3.** Якщо в конкретній задачі матрицант системи (3) не вдається знайти в аналітичному вигляді, то, враховуючи, що $\Omega_0^t = \Omega_{t_{k-1}}^t \Omega_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} \ldots \Omega_{t_1}^{t_2} \Omega_0^{t_1}$, його можна знайти наближено [22] за формулою

$$\Omega_0^t = \big(E_n + A(\zeta_N)\Delta t_N\big)\ldots\big(E_n + A(\zeta_2)\Delta t_2\big)\big(E_n + A(\zeta_1)\Delta t_1\big) + O(\Delta t),$$

де $\zeta_k \in (t_{k-1}, t_k)$, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, $k = \overline{1, N}$, $t_N = t$, $O(\Delta t)$ — величина порядку $O(\Delta t_k)$. При цьому, обчислюючи $\Omega_{t_{k-1}}^{t_k}$ з точністю до другого порядку малості (Δt_k вважаємо малими першого порядку), можемо прийняти

$$A(t) \approx \text{const} = A(\zeta_k).$$

2. Дослідження періодичних розв'язків нелінійних систем. Розглянемо чисельно-аналітичний алгоритм дослідження і побудови T-періодичних розв'язків нелінійних систем диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x), \tag{20}$$

де $t \in \mathbb{R}$, $x: \mathbb{R} \to D \subset \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R} \times D \to \mathbb{R}^n$, $A(t) = \big(A_{ij}(t)\big)_{i,j=1}^n$, $A(t)$, $f(t,x)$ періодичні по t зі спільним періодом T: $A(t+T) = A(t)$, $f(t+T, x) = f(t,x)$ $\forall\, t \in \in \mathbb{R}$.

При цьому будемо досліджувати критичний випадок, тобто коли

A) відповідна лінійна однорідна система (3) має k, $1 \le k \le n$, лінійно незалежних T-періодичних розв'язків.

Крім того, будемо вважати, що в області $(t,x) \in \Omega = \mathbb{R} \times D$, де D — деяка замкнена обмежена область в $\mathbb{R}^n$, для системи (20) виконуються наступні умови:

B) матриця-функція $A(t)$ і вектор-функція $f(t,x)$ неперервні за своїми змінними, $f(t,x)$ задовольняє умови обмеженості і Ліпшиця:

$$|f(t,x)| \le m(t), \tag{21}$$

$$|f(t,x') - f(t,x'')| \le K(t)|x' - x''|, \tag{22}$$

де $m(t)$ і $K(t)$ — T-періодичні відповідно вектор-функція і матриця-функція з невід'ємними інтегровними компонентами;

C) існує непорожня множина точок $\xi \in D_0 \subset \mathbb{R}^k$ така, що вектор-функція $x_0(t,\xi) = \Omega_0^t F\xi$ лежить в області D разом із своїм β-околом, де $\beta = = \max\limits_{t \in [0,T]} (Sm)(t)$, $Sx: C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ — лінійний оператор:

$$(Sx)(t) = \int_0^T \left|\Omega_0^t G^+ U_2(T,s)\right| x(s)\,ds + {}$$

$$+ \int_0^t \left|(Y^\top(t))^{-1} U(t,s)\right| x(s)\,ds + \int_t^T \left|(Y^\top(t))^{-1} V(t,s)\right| x(s)\,ds;$$

D) $r(Q) < 1$, де $r(Q)$ — спектральний радіус оператора $Qx = S(Kx)$, який є композицією оператора S з множенням на матрицю $K(t)$ зі змінними коефіцієнтами:

$$(Qx)(t) = \int_0^T \left|\Omega_0^t G^+ U_2(T,s)\right| K(s)x(s)ds +$$

$$+ \int_0^t \left|(Y^\top(t))^{-1} U(t,s)\right| K(s)x(s)ds + \int_t^T \left|(Y^\top(t))^{-1} V(t,s)\right| K(s)x(s)ds.$$

Для $x \in \mathbb{R}^n$ через $|x|$ завжди будемо позначати модуль вектора, тобто $|x| = (|x_1|,\ldots,|x_n|)^\top$ і, відповідно, для матриць $|A| = (|A_{ij}|)_{i,j=1}^n$, а всі нерівності розуміємо покомпонентно.

***Зауваження* 4.** За теоремою Крейна – Рутмана [23], спектральний радіус оператора Q дорівнює найбільшому з його додатних власних значень. Водночас він не перевищує найбільшого додатного власного значення матриці Q_0:

$$Q_0 = \max_{t\in[0,T]} \left\{ \int_0^T \left|\Omega_0^t G^+ U_2(T,s)\right| K(s)ds + \right.$$

$$\left. + \int_0^t \left|(Y^\top(t))^{-1} U(t,s)\right| K(s)ds + \int_t^T \left|(Y^\top(t))^{-1} V(t,s)\right| K(s)ds \right\}.$$

Розглянемо дві сім'ї k-параметричних відображень

$$L_\xi x\colon C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n) \quad \text{і} \quad \tilde{L}_\xi x\colon C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n),$$

визначені за формулами

$$(L_\xi x)(t) = \Omega_0^t F\xi + \int_0^T \Omega_0^t G^+ \Theta^\top(s) f(s,x(s))ds + \int_0^t \Omega_s^t f(s,x(s))ds,$$

$$(\tilde{L}_\xi x)(t) = \Omega_0^t F\xi + \int_0^T \Omega_0^t G^+ U_2(T,s) f(s,x(s))ds +$$

$$+ \int_0^t (Y^\top(t))^{-1} U(t,s) f(s,x(s))ds - \int_t^T (Y^\top(t))^{-1} V(t,s) f(s,x(s))ds,$$

і функціонал $\mu(x)\colon C(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^k$:

$$\mu(x) = \int_0^T \Psi^\top(s) f(s,x(s))ds.$$

З (21) і умови C випливає, що $(\tilde{L}_\xi x)(t) \in D$ при всіх $\xi \in D_0$, $x \in C(\mathbb{R},D)$, $t \in \mathbb{R}$, оскільки

$$\left|(\tilde{L}_\xi x)(t) - x_0(t,\xi)\right| = \left| \int_0^T \Omega_0^t G^+ U_2(T,s) f(s,x(s))ds + \right.$$

$$\left. + \int_0^t (Y^\top(t))^{-1} U(t,s) f(s,x(s))ds + \int_t^T (Y^\top(t))^{-1} V(t,s) f(s,x(s))ds \right| \le$$

$$\leq \int_0^T \left|\Omega_0^t G^+ U_2(T,s)\right| m(s)\,ds + \int_0^t \left|(Y^\top(t))^{-1} U(t,s)\right| m(s)\,ds \; +$$

$$+ \int_t^T \left|(Y^\top(t))^{-1} V(t,s)\right| m(s)\,ds = (Sm)(t) \leq \beta. \tag{23}$$

***Зауваження* 5.** Враховуючи (15), можемо записати

$$(\tilde{L}_\xi x)(t) = \Omega_0^t F\xi + \int_0^T \Omega_0^t G^+ \Theta^\top(s) f(s, x(s))\,ds - \Omega_0^t G^+ P_2(T) P_1^{-1} \mu(x) \; +$$

$$+ \int_0^t \Omega_s^t f(s, x(s))\,ds - \int_0^t \Omega_s^t \Psi(s) P_1^{-1}\,ds\,\mu(x). \tag{24}$$

***Зауваження* 6.** Підставляючи $t = 0$ і $t = T$ в (24), одержуємо

$$(\tilde{L}_\xi x)(0) = F\xi + \int_0^T G^+ U_2(T,s) f(s, x(s))\,ds,$$

$$(\tilde{L}_\xi x)(T) = \Omega_0^T \left\{ F\xi + \int_0^T G^+ U_2(T,s) f(s, x(s))\,ds \right\} +$$

$$+ \; (Y^\top(T))^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \int_0^T U_2(T,s) f(s, x(s))\,ds \end{pmatrix},$$

а тому з (19) і будови матриці F випливає

$$Y^\top(T)\Big((\tilde{L}_\xi x)(0) - (\tilde{L}_\xi x)(T)\Big) =$$

$$= Y^\top(T)(E - \Omega_0^T)\left(F\xi + \int_0^T G^+ U_2(T,s) f(s, x(s))\,ds \right) - \begin{pmatrix} 0 \\ \int_0^T U_2(T,s) f(s, x(s))\,ds \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ G \end{pmatrix} \left(F\xi + \int_0^T G^+ U_2(T,s) f(s, x(s))\,ds \right) - \begin{pmatrix} 0 \\ \int_0^T U_2(T,s) f(s, x(s))\,ds \end{pmatrix} = 0. \tag{25}$$

Наступне твердження вказує на зв'язок між оператором $\tilde{L}_\xi x$, функціоналом $\mu(x)$ і T-періодичними розв'язками системи (20).

Теорема 1. *Вектор-функція* $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *є* T*-періодичним розв'язком системи* (20) *з початковим значенням*

$$\varphi(0) = \tilde{\xi} \equiv F\xi + \int_0^T G^+ \Theta^\top(s) f(s, \varphi(s))\,ds \tag{26}$$

тоді і тільки тоді, коли φ *є і розв'язком операторного рівняння*

$$x = \tilde{L}_\xi x, \tag{27}$$

і нулем функціонала μ:

$$\mu(\varphi) = 0. \tag{28}$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай $\varphi(t)$ — T-періодична функція така, що

$\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $\varphi(0) = \tilde{\xi}$ і при всіх $t \in \mathbb{R}$ $d\varphi/dt \equiv A(t)\varphi(t) + f(t, \varphi(t))$. Тоді φ є розв'язком операторного рівняння

$$x = L_\xi x \tag{29}$$

і

$$\varphi(T) = \Omega_0^T \varphi(0) + \int_0^T \Omega_s^T f(s, \varphi(s))\, ds.$$

З T-періодичності $\varphi(t)$ випливає, що $\varphi(0)$ є розв'язком лінійної неоднорідної алгебраїчної системи рангу $n-k$

$$(E_n - \Omega_0^T)\,\varphi(0) = \int_0^T \Omega_s^T f(s, \varphi(s))\, ds. \tag{30}$$

Помноживши (30) зліва на невироджену матрицю $Y^\top(T)$ і врахувавши, що $\Psi(T) = \Psi(0)$, одержимо еквівалентну систему

$$\begin{pmatrix} 0 \\ G \end{pmatrix} \varphi(0) = \begin{pmatrix} \int_0^T \Psi^\top(s) f(s, \varphi(s))\, ds \\ \int_0^T \Theta^\top(s) f(s, \varphi(s))\, ds \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Система (31) є сумісною (і при цьому вона має k-параметричну сім'ю розв'язків вигляду (26)) тоді і тільки тоді, коли виконується умова $\mu(\varphi) = 0$. Беручи до уваги (24), бачимо, що при цьому $(\tilde{L}_\xi \varphi)(t) \equiv (L_\xi \varphi)(t)$ тобто φ є розв'язком рівняння (27), що доводить необхідність виконання умов (27), (28).

Достатність. Припустимо, що $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ і векторний параметр $\xi \in \mathbb{R}^k$ задовольняють рівняння (27) і (28). Тоді з (24) видно, що $\varphi(\cdot)$ при $t = 0$ набуває значення $\varphi(0) = \tilde{\xi}$ і

$$\varphi(t) \equiv \Omega_0^t F \tilde{\xi} + \int_0^t \Omega_s^t f(s, \varphi(s))\, ds.$$

Диференціюючи останню тотожність по t, переконуємося, що $\varphi(\cdot)$ є розв'язком системи (20), а T-періодичність φ випливає з (25).

Теорему доведено.

З огляду на (23) і теорему 1 бачимо, що загальна схема запропонованого в даній роботі методу ідентична до схеми чисельно-аналітичного методу послідовних періодичних наближень А. М. Самойленка [2, 4, 15]. Так, при всіх $\xi \in D_0$ оператор L_ξ діє у просторі неперервних функцій $C(\mathbb{R}, D)$, оператор $\tilde{L}_\xi$ — у підпросторі T-періодичних функцій $\Pi(\mathbb{R}, D) \subset C(\mathbb{R}, D)$, а задача відшукання T-періодичних розв'язків рівняння (29) зводиться до рівносильної задачі відшукання розв'язків рівняння (27), які є нулями функціонала μ.

Таким чином, відмінність від відомих раніше робіт полягає у виборі операторів L_ξ і $\tilde{L}_\xi$, що дозволяє застосувати розроблений алгоритм до нового класу задач.

Для знаходження розв'язку рівняння (27) побудуємо рекурентну послідовність T-періодичних функцій вигляду

$$x_m(t,\xi) = x_0(t,\xi) + \int_0^T \Omega_0^t G^+ U_2(T,s) f(s, x_{m-1}(s,\xi))ds \; +$$

$$+ \int_0^t (Y^\top(t))^{-1} U(t,s) f(s, x_{m-1}(s,\xi))ds - \int_t^T (Y^\top(t))^{-1} V(t,s) f(s, x_{m-1}(s,\xi))ds, \quad (32)$$

$$x_0(t,\xi) = \Omega_0^t F\xi, \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

яка залежить від векторного параметра $\xi \in D_0 \subset \mathbb{R}^k$.

Беручи до уваги (22), з (32) одержуємо

$$\left| x_{m+1}(t,\xi) - x_m(t,\xi) \right| = \left| \left(\tilde{L}_\xi \big(x_m(\cdot,\xi) - x_{m-1}(\cdot,\xi) \big) \right)(t) \right| \le$$

$$\le \left(Q \left| x_m(\cdot,\xi) - x_{m-1}(\cdot,\xi) \right| \right)(t) \le \left(Q^2 \left| x_{m-1}(\cdot,\xi) - x_{m-2}(\cdot,\xi) \right| \right)(t) \le \ldots$$

$$\ldots \le \left(Q^m \left| x_1(\cdot,\xi) - x_0(\cdot,\xi) \right| \right)(t) \le Q^m \beta,$$

$$\left| x_{m+j}(t,\xi) - x_m(t,\xi) \right| \le \sum_{i=0}^{j-1} \left| x_{m+i+1}(t,\xi) - x_{m+i}(t,\xi) \right| \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{j-1} \left(Q^{m+i} \left| x_1(\cdot,\xi) - x_0(\cdot,\xi) \right| \right)(t) \le \sum_{i=0}^{j-1} Q^{m+i} \beta. \quad (33)$$

Внаслідок (23) оператор $\tilde{L}_\xi$ відображає простір $\Pi(\mathbb{R}, D)$ в себе, а з умови D випливає, що $\tilde{L}_\xi$ є стискуючим оператором. Отже, застосовуючи принцип стиснутих відображень, бачимо, що рівняння (27) має в $\Pi(\mathbb{R}, D)$ єдиний розв'язок, який при довільному $\xi \in D_0 \subset \mathbb{R}^k$ збігається з граничною функцією послідовності (32): $x^*(t,\xi) = \lim_{m\to\infty} x_m(t,\xi)$. У свою чергу, будемо шукати таке ξ, щоб $\mu(x^*(\cdot,\xi)) = 0$.

Крім того, $E_n + Q + Q^2 + \ldots + Q^l + \ldots = (E_n - Q)^{-1}$, а тому, переходячи в (33) до границі при $j \to \infty$, одержуємо наступну оцінку похибки:

$$\left| x^*(t,\xi) - x_m(t,\xi) \right| \le (E_n - Q)^{-1} Q^m \beta. \quad (34)$$

Підсумуємо наведені вище міркування у вигляді твердження.

Теорема 2. *Нехай для системи* (20) *виконуються умови* A – D. *Тоді*:

1) *при всіх* $\xi \in D_0 \subset \mathbb{R}^k$ *оператор* $\tilde{L}_\xi$ *має нерухому точку* $x^*(\cdot,\xi) \in \Pi(\mathbb{R}, D)$, *яка збігається з T-періодичною граничною функцією* $x^*(t,\xi)$ *послідовності* (32);

2) *для відхилення послідовних наближень* $x_m(t,\xi)$ *від граничної функції* $x^*(t,\xi)$ *при всіх натуральних* m, $(t,\xi) \in \mathbb{R} \times D_0$ *виконуються оцінки* (34);

3) *функція* $x^*(t) = x^*(t,\xi^*)$ *є T-періодичним розв'язком системи диференціальних рівнянь* (20) *тоді і тільки тоді, коли точка* $\xi = \xi^*$ *є розв'язком визначального рівняння*

$$\Delta(\xi) = 0, \quad (35)$$

де

$$\Delta(\xi) \equiv \mu(x^*(\cdot,\xi)) = \int_0^T \Psi^\top(s) f(s, x^*(s,\xi))ds; \tag{36}$$

4) *початкове значення T-періодичного розв'язку* $x^*(t)$ *визначається за формулою*

$$x^*(0) = F\xi^* + \int_0^T G^+\Theta^\top(s) f(s, x^*(s))ds. \tag{37}$$

***Зауваження* 7.** У випадку, коли всі розв'язки системи (3) є T-періодичними $(k = n)$, отримуємо

$$G^+ = \Theta(t) = P_2(t) = 0, \quad F = E_n, \quad \Psi(t) = Y(t), \quad P_1(t) = \int_0^t Y^\top(s)Y(s)ds,$$

$$U(t,s) = U_1(t,s) = (E_n - P_1(t)P_1^{-1})Y^\top(s), \qquad V(t,s) = V_1(t,s) = P_1(t)P_1^{-1}Y^\top(s).$$

Без обмеження загальності можемо взяти за $Y(t)$ матрицант системи (6). У цьому випадку $(Y^\top(t))^{-1} = \Omega_0^t$ і послідовність (32) набирає вигляду

$$x_m(t,\xi) = x_0(t,\xi) + \Omega_0^t(E - P_1(t)P_1^{-1})\int_0^t \Omega_s^0 f(s, x_m(s,\xi))ds -$$

$$- \Omega_0^t P_1(t)P_1^{-1}\int_t^T \Omega_s^0 f(s, x_m(s,\xi))ds, \qquad x_0(t,\xi) = \Omega_0^t\xi, \quad m = 1, 2, \ldots . \tag{38}$$

Якщо ж $A = 0$, то $\Omega_0^t = E_n$, $P_1(t) = tE_n$, і з (38) одержуємо класичну формулу чисельно-аналітичного методу послідовних періодичних наближень [2, 10, 11].

При практичній реалізації даного алгоритму, як правило, не вдається знайти граничну функцію, а тому виникає потреба встановлення конструктивних достатніх умов існування періодичних розв'язків, тобто таких умов, для перевірки яких потрібно знати тільки наближення $x_m(t,\xi)$ до точного розв'язку.

Відповідь на це питання дає наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай для системи* (20) *виконуються умови* A – D і, *крім того*:

1) *існує опукла замкнена область* $D' \subset D_0 \subset \mathbb{R}^k$ *така, що при деякому фіксованому натуральному* m *в області* D' *міститься єдина особлива точка* ξ_{0m} *ненульового індексу відображення* $\Delta_m(\xi): D_0 \to \mathbb{R}^k$:

$$\Delta_m(\xi) \equiv \mu(x_m(\cdot,\xi)) = \int_0^T \Psi^\top(s) f(s, x_m(s,\xi))ds; \tag{39}$$

2) *на межі* $\partial D'$ *області* D' *виконується нерівність*

$$\inf_{\xi\in\partial D'} |\Delta_m(\xi)| > Q_1(E_n - Q)^{-1}Q^m\beta, \tag{40}$$

де $Q_1 = \int_0^T |\Psi^\top(s)| K(s)ds$.

Тоді система (20) *має T-періодичний розв'язок* $x = x^*(t) = x^*(t,\xi^*)$, *де* $\xi^* \in D'$ *і початкове значення* $x^*(0)$ *визначається згідно з* (37).

Доведення. Розглянемо сім'ю неперервних на $\partial D'$ векторних полів

$$\Delta(\theta,\xi) = \Delta_m(\xi) + \theta(\Delta(\xi) - \Delta_m(\xi)), \qquad 0 \le \theta \le 1,$$

яка з'єднує поля $\Delta(0,\xi) = \Delta_m(\xi)$ і $\Delta(1,\xi) = \Delta(\xi)$. Припустимо, що існує $\theta_0 \in \in [0,1]$ таке, що $\Delta(\theta_0,\xi) = 0$. Тоді

$$\Delta_m(\xi) = -\theta_0(\Delta(\xi) - \Delta_m(\xi)). \tag{41}$$

При цьому з (34), (36), (39) і умови Ліпшиця (22) маємо

$$|\Delta(\xi) - \Delta_m(\xi)| = \left|\int_0^T \Psi^\top(s)\left\{f(s, x^*(s,\xi)) - f(s, x_m(s,\xi))\right\}ds\right| \le$$

$$\le \int_0^T \left|\Psi^\top(s)\right| K(s) \left|x^*(s,\xi) - x_m(s,\xi)\right| ds \le Q_1(E_n - Q)^{-1}Q^m\beta.$$

Але тоді з (41) отримуємо

$$|\Delta_m(\xi)| \le |\Delta(\xi) - \Delta_m(\xi)| \le Q_1(E_n - Q)^{-1}Q^m\beta,$$

що суперечить умові (40). Отже, при $\theta \in [0,1]$, $\xi \in \partial D'$ сім'я полів $\Delta(\theta,\xi)$ є невиродженою, а тому векторні поля $\Delta(\xi)$ і $\Delta_m(\xi)$ гомотопні. Це означає, що в D' існує точка ξ^*, яка є розв'язком рівняння (35), що завершує доведення теореми.

Приклад. Проілюструємо практичне застосування розробленого алгоритму на прикладі. Будемо шукати 2π-періодичні розв'язки системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= -2x_2 + x_3\cos(t),\\
\frac{dx_2}{dt} &= 2x_1 + x_3\sin(t) + \frac{1}{16}x_1x_3\cos(t) + \frac{1}{16}x_2x_3\sin(t),\\
\frac{dx_3}{dt} &= \frac{1}{10}x_2^2 + \frac{1}{10}x_1x_3\sin(t) - \frac{1}{40}\cos(2t)
\end{aligned} \tag{42}$$

в області $(t,x) \in \mathbb{R} \times D$,

$$D = \left\{x = (x_1, x_2, x_3) \mid |x_1| \le 1, |x_2| \le 1, |x_3| \le 1\right\}.$$

Виділивши лінійну частину, отримаємо

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & \cos(t) \\ 2 & 0 & \sin(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(t,x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{16}x_1x_3\cos(t) + \frac{1}{16}x_2x_3\sin(t) \\ \frac{1}{10}x_2^2 + \frac{1}{10}x_1x_3\sin(t) - \frac{1}{40}\cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Неважко переконатися, що відповідна (42) лінійна однорідна система має три лінійно незалежні 2π-періодичні розв'язки, а матриця

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) & -\sin(2t) & 0 \\ \sin(2t) & \cos(2t) & 0 \\ -\sin(t) & -\cos(t) & 1 \end{pmatrix}$$

є фундаментальною матрицею системи $dx/dt = -A^\top(t)x$. Безпосередня перевірка показує, що система (42) задовольняє умови (21), (22) при

$$m(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{16}|\cos(t)| + \frac{1}{16}|\sin(t)| \\ \frac{1}{10} + \frac{1}{10}|\sin(t)| + \frac{1}{40}|\cos(2t)| \end{pmatrix},$$

$$K(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{16}|\cos(t)| & \frac{1}{16}|\sin(t)| & \frac{1}{16}|\cos(t)| + \frac{1}{16}|\sin(t)| \\ \frac{1}{10}|\sin(t)| & \frac{1}{5} & \frac{1}{10}|\sin(t)| \end{pmatrix}.$$

При цьому можна переконатися, що

$$\beta \leq \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad S_0 = \begin{pmatrix} 0{,}1798953 & 0{,}4831417 & 0{,}2534499 \\ 0{,}2229587 & 0{,}5616331 & 0{,}3085199 \\ 0{,}1704735 & 0{,}4936673 & 0{,}2057844 \end{pmatrix}$$

і найбільшим власним значенням матриці S_0 є $\lambda_{\max} = 0{,}9973169$. Таким чином, для системи (42) виконуються умови A – D.

Послідовні наближення до розв'язку системи (42) будуємо за формулою (38), де

$$P_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{3t}{2} - \frac{1}{4}\sin(2t) & \frac{1}{2}\sin^2(t) & \cos(t) - 1 \\ \frac{1}{2}\sin^2(t) & \frac{3t}{2} + \frac{1}{4}\sin(2t) & -\sin(t) \\ \cos(t) - 1 & -\sin(t) & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 3\pi & 0 & 0 \\ 0 & 3\pi & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi \end{pmatrix}, \qquad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix},$$

$$f(t, x_m(t,\xi)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{16}x_{m,1}(t,\xi)x_{m,3}(t,\xi)\cos(t) + \frac{1}{16}x_{m,2}(t,\xi)x_{m,3}(t,\xi)\sin(t) \\ \frac{1}{10}x_{m,2}^2(t,\xi) + \frac{1}{10}x_{m,1}(t,\xi)x_{m,3}(t,\xi)\sin(t) - \frac{1}{40}\cos(2t) \end{pmatrix}.$$

На кожному кроці побудови наближених розв'язків знаходимо розв'язки ξ_m визначальної алгебраїчної системи

$$\Delta_m(\xi) = 0, \tag{43}$$

які задають початкове значення розв'язку $x_{m+1}(t) = x_{m+1}(t, \xi_m)$. При $m = 0$ система (43) має вигляд

$$\begin{pmatrix} -2\xi_{0,1}\xi_{0,3} \\ 2\xi_{0,3}(\xi_{0,3} - \xi_{0,2}) \\ (\xi_{0,3} - \xi_{0,2})^2 + \xi_{0,1}^2 \end{pmatrix} = 0,$$

а її розв'язками є $\xi_{0,1} = 0$ і довільні $\xi_{0,2} = \xi_{0,3}$. При $m = 1$ розв'язком системи (43) є

$$\xi = \xi_1 = (\xi_{1,1}, \xi_{1,2}, \xi_{1,3}) = (4{,}51077719 \cdot 10^{-7};\ 0{,}4999868597;\ 0{,}4999862647).$$

Підставляючи це значення в (32), при $m = 2$ знаходимо друге наближення $x_2(t) = (x_{2,1}(t, \xi_1), x_{2,2}(t, \xi_1), x_{2,3}(t, \xi_1))$ і, порівнюючи з точним розв'язком

$$x^*(t) = (x_1^*(t), x_2^*(t), x_3^*(t)) = (-0{,}5 \sin(t),\ 0{,}5 \cos(t),\ 0{,}5),$$

одержуємо похибку другого наближення:

$$\left| x_{2,1}(t) - x_1^*(t) \right| \le 1{,}4 \cdot 10^{-5}, \quad \left| x_{2,3}(t) - x_2^*(t) \right| \le 1{,}5 \cdot 10^{-5}, \quad \left| x_{2,3}(t) - x_3^*(t) \right| \le 1{,}4 \cdot 10^{-5}.$$

Розв'язуючи наближену визначальну систему при $m = 2$, одержуємо

$$\xi = \xi_2 = (\xi_{2,1}, \xi_{2,2}, \xi_{2,3}) = (3{,}200401777 \cdot 10^{-9};\ 0{,}4999999023;\ 0{,}4999999066).$$

Відповідно знаходимо третє наближення $x_3(t) = (x_{3,1}(t, \xi_2), x_{3,2}(t, \xi_2), x_{3,3}(t, \xi_2))$ і його похибку:

$$\left| x_{3,1}(t) - x_1^*(t) \right| \le 9{,}9 \cdot 10^{-8}, \quad \left| x_{3,2}(t) - x_2^*(t) \right| \le 1{,}1 \cdot 10^{-7}, \quad \left| x_{3,3}(t) - x_3^*(t) \right| \le 1{,}1 \cdot 10^{-7},$$

що свідчить про швидку збіжність наближених розв'язків до точного.

3. Квазілінійні системи. Розглянемо T-періодичні системи з малим невід'ємним параметром ε вигляду

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + h(t) + \varepsilon f(t, x), \tag{44}$$

де $h(t)$ — неперервна T-періодична вектор-функція, $A(t)$ і $f(t, x)$ теж T-періодичні по t і в області Ω задовольняють умову B. Як і раніше, будемо розглядати критичний випадок, коли

A_1) породжуюча система (4), яка одержується з (44) при $\varepsilon = 0$, має k-параметричну сім'ю T-періодичних розв'язків, $1 \le k \le n$.

Дослідимо достатні умови існування й алгоритм побудови T-періодичного розв'язку $x(t, \varepsilon)$ системи (44), який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на розв'язок породжуючої системи (4).

За аналогією до попередніх міркувань T-періодичний розв'язок $x(t, \varepsilon)$ системи (44) будемо шукати серед розв'язків операторного рівняння

$$x = \hat{L}_{\xi,\varepsilon} x, \qquad \hat{L}_{\xi,\varepsilon} x : \Pi(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \to \Pi(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n),$$

де

$$(\hat{L}_{\xi,\varepsilon} x)(t) = \Omega_0^t F \xi + \int_0^t \Omega_s^t h(s) ds + \varepsilon \left\{ \int_0^T \Omega_0^t G^+ U_2(T, s) f(s, x(s)) ds \, + \right.$$

$$\left. + \int_0^t (Y^\top(t))^{-1} U(t, s) f(s, x(s)) ds - \int_t^T (Y^\top(t))^{-1} V(t, s) f(s, x(s)) ds \right\},$$

які задовольняють умову (28).

З цією метою розглянемо послідовність T-періодичних функцій

$$\hat{x}_m(t, \xi) = \hat{x}_0(t, \xi) + \varepsilon \left\{ \int_0^T \Omega_0^t G^+ U_2(T, s) f(s, \hat{x}_{m-1}(s, \xi)) ds \, + \right.$$

$$+ \int_0^t (Y^\top(t))^{-1} U(t,s) f(s, \hat{x}_{m-1}(s,\xi))ds - \int_t^T (Y^\top(t))^{-1} V(t,s) f(s, \hat{x}_{m-1}(s,\xi))ds \Bigg\}, \quad (45)$$

$$\hat{x}_0(t,\xi) = \Omega_0^t F\xi + \int_0^t \Omega_s^t h(s)ds, \qquad m = 1, 2, \ldots .$$

Зрозуміло, що при достатньо малих ε умови C і D виконуються, а отже, всі наведені вище теореми є справедливими і для системи (44), оператора $\hat{L}_{\xi,\varepsilon}$ та послідовності (45), а при $m \geq 1$ відповідні нерівності мають вигляд

$$\left|(\hat{L}_{\xi,\varepsilon} x)(t) - \hat{x}_0(t,\xi)\right| \leq \varepsilon\beta, \quad (46)$$

$$\left|\hat{x}^*(t,\xi) - \hat{x}_m(t,\xi)\right| \leq \varepsilon(E_n - \varepsilon Q)^{-1}(\varepsilon Q)^m \beta,$$

$$\inf_{\xi \in \partial D'} \left|\hat{\Delta}_m(\xi)\right| > \varepsilon Q_1 (E_n - \varepsilon Q)^{-1}(\varepsilon Q)^m \beta, \quad (47)$$

де $\hat{x}^*(t,\xi) = \lim\limits_{m\to\infty} \hat{x}_m(t,\xi)$,

$$\hat{\Delta}(\xi) \equiv \mu(\hat{x}^*(\cdot,\xi)) = \int_0^T \Psi^\top(s) f(s, \hat{x}^*(s,\xi))ds,$$

$$\hat{\Delta}_m(\xi) \equiv \mu(\hat{x}_m(\cdot,\xi)) = \int_0^T \Psi^\top(s) f(s, \hat{x}_m(s,\xi))ds, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots . \quad (48)$$

Крім того, при $m = 0$ має місце наступне твердження.

Теорема 4. *Нехай для системи* (44) *виконуються умови* A_1 *і* B, *а відображення* $\hat{\Delta}_0(\xi)$, *породжене* (48), *має в області* $D' \subset D_0$ *ізольовану особливу точку* $\xi = \xi_0$ *ненульового індексу.*

Тоді існує таке ε_0, *що при всіх* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *система* (44) *має* T*-періодичний розв'язок.*

Доведення. При всіх $\xi \in D'$, $t \in \mathbb{R}$ з (46) одержуємо оцінку

$$\left|\hat{x}^*(t,\xi) - \hat{x}_0(t,\xi)\right| \leq \varepsilon\beta,$$

а тому при $m = 0$ нерівність (47) набирає вигляду

$$\inf_{\xi \in \partial D'} \left|\hat{\Delta}_0(\xi)\right| > \varepsilon Q_1 \beta. \quad (49)$$

Якщо за D' взяти коло радіуса δ з центром у точці ξ_0, то при достатньо малих δ область D' не буде містити інших особливих точок відображення $\hat{\Delta}_0(\xi)$ (оскільки ξ_0 — ізольована особлива точка) і

$$\inf_{|\xi - \xi_0| = \delta} \left|\hat{\Delta}_0(\xi)\right| = \eta > 0.$$

З останньої нерівності випливає, що $\eta > \varepsilon Q_1 \beta$, а тому якщо вибрати деяке ε_0 таке, що

$$\varepsilon_0 Q_1 \beta < \eta,$$

то при всіх $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ система (44) матиме T-періодичний розв'язок $x = x(t,\varepsilon)$ такий, що

$$|x(0,\varepsilon) - \xi_0| < \delta,$$

$$|x(t,\varepsilon) - x(0,\varepsilon)| \leq \varepsilon\beta.$$

***Зауваження* 8.** Наведені вище міркування залишаються правильними, якщо умову B замінити на умову Каратеодорі:

матриця-функція $A(t)$ і вектор-функція $f(t, x)$ T-періодичні по t і для майже всіх $t \in \mathbb{R}$ неперервні;

$f(t, x)$ сумовна при всіх $x \in D$;

для всіх $x', x'' \in D$ і майже всіх $t \in \mathbb{R}$ виконуються оцінки (21), (22), де компоненти вектора $m(t)$ і матриці $K(t)$ T-періодичні й інтегровні при $t \in \mathbb{R}$.

4. Зв'язок з раніше відомими результатами. Насамперед відмітимо вже згадувані роботи [10, 11], в яких уперше було запропоновано чисельно-аналітичний метод послідовних періодичних наближень для дослідження періодичних розв'язків системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x).$$

Пізніше метод було успішно застосовано для вивчення широкого класу задач [2 – 4, 12 – 18]. Відмітимо також роботу [24], де в некритичному випадку досліджувалися періодична крайова задача для системи лінійних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + h(t),$$

а також для рівняння другого порядку

$$x'' + k^2 x = f(t, x, x').$$

Близькими до даної є роботи [21, 25, 26]. Так, у [25] у банаховому просторі X досліджувалися T-періодичні розв'язки рівняння вигляду

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t,x), \qquad x : \mathbb{R} \to X, \tag{50}$$

де A — необмежений оператор.

У роботах [26, 27] розглядалися системи вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A_1 x + f(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= A_2 y + g(t, x, y), \end{aligned} \tag{51}$$

де $x, f \in \mathbb{R}^n$, $y, g \in \mathbb{R}^s$, $f(t+T, x, y) = f(t, x, y)$, $g(t+T, x, y) = g(t, x, y)$, A_1, A_2 — сталі матриці виміру відповідно $n \times n$ і $s \times s$ такі, що власні значення A_1 мають ненульову дійсну частину, а матриця A_2 або є нульовою, або має чисто уявні власні значення.

Нарешті, в [28] система (20) розглядалась у критичному випадку при $n = 2$, тобто при

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & p(t) \\ -p(t) & 0 \end{pmatrix}, \qquad \int_0^T p(s)ds = 2\pi j, \qquad j \in Z,$$

і узагальнювалася на випадок систем вищих порядків, якщо матриця $A(t)$ кососиметрична і задовольняє умову Лаппо – Данилевського. При цьому для побудови періодичних розв'язків було використано алгоритм, який одержується з (32).

У даній роботі обґрунтовано новий чисельно-аналітичний алгоритм інтегрування періодичних систем нелінійних звичайних диференціальних рівнянь у критичному випадку, коли відповідна однорідна система має k періодичних розв'язків. Побудовано рівномірно збіжну послідовність k-параметричних періодичних наближень, встановлено умови збіжності та оцінки похибки. Досліджено зв'язок граничної функції цієї послідовності з точним періодичним розв'язком вихідної системи.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
2. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитический метод исследования периодических решений. – Киев: Выща шк., 1976. – 180 с.
3. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.
4. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1992. – 279 с.
5. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 318 с.
6. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы. – Киев: Наук. думка, 1993. – 288 с.
7. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.
8. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
9. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. – М.: Наука, 1972. – 718 с.
10. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. I // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 4. – С. 82 – 93.
11. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. II // Там же. – 1966. – **18**, № 2. – С. 50 – 59.
12. *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. I // Там же. – 1998. – **50**, № 1. – С. 102 – 107.
13. *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. II // Там же. – № 2. – С. 225 – 243.
14. *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. III // Там же. – № 7. – С. 960 – 979.
15. *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. IV // Там же. – № 12. – С. 1656 – 1672.
16. *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. V // Там же. – 1999. – **51**, № 5. – С. 663 – 673.
17. *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. VI // Там же. – № 7. – С. 960 – 971.
18. *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. VII // Там же. – 2000. – **52**, № 1. – С. 102 – 107.
19. *Самойленко А. М.* Об одной последовательности полиномов и радиусе сходимости ее суммы Пуассона – Абеля // Там же. – 2003. – **55**, № 7. – С. 1119 – 1130.
20. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
21. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1990. – 96 с.
22. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
23. *Крейн М. Г., Рутман М. А.* Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // Успехи мат. наук. – 1948. – **3**, вып. 1. – С. 3 – 95.
24. *Ронто А. М.* Чисельно-аналітичні методи дослідження крайових задач: Автореф. дис. … канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 1997. – 16 с.
25. *Евтуха Н. А., Забрейко П. П.* О методе А. М. Самойленко отыскания периодических решений квазилинейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 2. – С. 162 – 168.
26. *Перестюк Н. А.* О периодических решениях некоторых систем дифференциальных уравнений // Асимптотические и качественные методы в теории нелинейных колебаний. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1971. – С. 136 – 146.
27. *Копистира С. М.* Про 2π-періодичні розв'язки нелінійних систем диференціальних рівнянь першого порядку // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 1997. – № 1. – С. 69 – 80.
28. *Король І. І.* Про періодичні розв'язки одного класу систем диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 4. – С. 483 – 495.

Одержано 01.10.2004,
після доопрацювання — 28.11.2005