УДК 519.21

А. О. Погоруй (Житомир. пед. ун-т)

СТАЦІОНАРНИЙ РОЗПОДІЛ ПРОЦЕСУ ВИПАДКОВОЇ НАПІВМАРКОВСЬКОЇ ЕВОЛЮЦІЇ З ЗАТРИМУЮЧИМИ ЕКРАНАМИ У ВИПАДКУ БАЛАНСУ

A stationary measure is obtained for a process given by a differential equation with phase space on the interval $[V_0, V_1]$ and stable values of a vector field that depend on the controlling semi-Markov process with a finite set of states.

Знайдено стаціонарну міру для процесу, що описується диференціальним рівнянням із фазовим простором на відрізку $[V_0, V_1]$ та сталими значеннями векторного поля, які залежать від керуючого напівмарковського процесу зі скінченною множиною станів.

У задачах надійності при обчисленні стаціонарних показників ефективності та надійності систем виникає проблема знаходження стаціонарних розподілів процесів, що моделюють ці системи [1 – 3] (розд. 3, 4). Для дослідження багатофазних систем із накопичувачами в якості моделюючих використовуються стохастичні процеси переносу з затримуючими екранами в марковському чи напівмарковському середовищі [2, 3]. У випадку напівмарковського керуючого процесу досліджується стаціонарний розподіл відповідного трикомпонентного марковського процесу, перша компонента якого є часовою (час, пройдений керуючим процесом з моменту останньої зміни стану), друга відповідає стану керуючого процесу і третя є просторовою, що описує наповненість накопичувачів. Знаходження стаціонарного розподілу в напівмарковському випадку є нетривіальною задачею навіть для найпростішого випадку альтернувального керуючого процесу [3].

У даній роботі результат, отриманий у [3] для однофазної системи, узагальнюється на довільний скінченний фазовий простір керуючого процесу у випадку балансу.

Розглянемо рівняння

$$\frac{d\nu(t)}{dt} = C(\kappa(t), \nu(t)), \tag{1}$$

де $\kappa(t)$ — напівмарковський процес із фазовим простором $G = X \cup Y$, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$, матрицею перехідних імовірностей вкладеного в $\kappa(t)$ ланцюга Маркова k_l, $l \in N$, $\mathrm{P} = \{p_{\alpha\beta},\ \alpha, \beta \in G\}$, $p_{\alpha\beta} = \mathrm{P}\{\kappa_{l+1} = \alpha / \kappa_l = \beta\}$ і часом τ_α перебування у стані $\alpha \in G$, що має загальну функцію розподілу $F_\alpha(t)$.

Відомо [5] (гл. 3), [6], що рівняння (1) описує стохастичний процес переносу в напівмарковському середовищі.

Припускаємо виконання умови

У$_1$) існують щільність $f_\alpha(t) = \dfrac{dF_\alpha(t)}{dt}$ та моменти

$$m_\alpha = \int_0^\infty t f_\alpha(t)\,dt, \qquad m_\alpha^{(2)} = \int_0^\infty t^2 f_\alpha(t)\,dt \quad \forall\, \alpha \in G.$$

Нехай $V_0,\ V_1,\ a_i, b_j \in R,\ V_0 < V_1,\ a_i > 0,\ b_j > 0,\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m},$ і функція з правої частини (1) задовольняє умови:

$$\text{для } x_i \in X,\ i = \overline{1,n},\ C(x_i, \nu) = \begin{cases} b_i, & V_0 \le \nu < V_1, \\ 0, & \nu = V_1, \end{cases}$$

для $y_j \in Y,\ j = \overline{1, m},\ C(y_j, \nu) = \begin{cases} -a_j, & V_0 < \nu \le V_1, \\ 0, & \nu = V_0. \end{cases}$

Введемо на фазовому просторі $Z = [0, \infty) \times G \times [V_0, V_1]$ трикомпонентний процес

$$\xi(t) = (\tau(t), \kappa(t), \nu(t)), \quad \text{де} \quad \tau(t) = t - \sup\{u \le t : \kappa(t) \ne \kappa(u)\}.$$

Наша мета полягає в знаходженні стаціонарного розподілу процесу $\xi(t)$.

Процес $\xi(t)$ — марковський і його інфінітезимальний оператор має вигляд [3, 4]

$$A\varphi(\tau, \alpha, \nu) = \frac{\partial}{\partial\tau}\varphi(\tau, \alpha, \nu) +$$

$$+ r_\alpha(\tau)[P\varphi(0, \alpha, \nu) - \varphi(\tau, \alpha, \nu)] + C(\alpha, \nu)\frac{\partial}{\partial\nu}\varphi(\tau, \alpha, \nu)$$

з граничними умовами $\varphi'_\tau(\tau, x, V_0) = \varphi'_\tau(\tau, y, V_1) = 0,\ x \in X,\ y \in Y,$ де

$$r_\alpha(\tau) = \frac{f_\alpha(\tau)}{1 - F_\alpha(\tau)}, \qquad P\varphi(0, \alpha, \nu) = \sum_{\beta \in G} p_{\alpha\beta}\,\varphi(0, \beta, \nu).$$

Якщо процес $\xi(t)$ має стаціонарну міру $\rho(\cdot)$, то для будь-якої функції $\varphi(\cdot)$ з області визначення оператора A

$$\int_Z A\varphi(z)\rho(dz) = 0. \tag{2}$$

Надалі припускаємо виконання умови:

У$_2$) існує щільність $\rho(\tau, \alpha, \nu)$ стаціонарного розподілу процесу $\xi(t)$, причому існують скрізь $\dfrac{\partial\rho(\tau, \alpha, \nu)}{\partial\tau}$, $\dfrac{\partial\rho(\tau, \alpha, \nu)}{\partial\nu}$ і $\lim_{\tau\to+\infty}(\tau, \alpha, \nu)$.

Аналіз властивостей процесу $\xi(t)$ показує, що в точках (τ, x, V_1), $x \in X$, та (τ, x, V_0), $y \in Y$, фазового простору Z знаходяться сингулярні компоненти стаціонарної міри. Будемо позначати їх через $\rho[\tau, x, V_0]$, $\rho[\tau, y, V_1]$.

Змінюючи в (2) порядок інтегрування, отримуємо вирази для $A^*\rho = 0$, де A^* — спряжений до A оператор, а саме, для несингулярної частини міри

$$C(\alpha, \nu)\frac{\partial}{\partial\nu}\rho(\tau, \alpha, \nu) + r_\alpha(\tau)\rho(\tau, \alpha, \nu) + \frac{\partial}{\partial\tau}\rho(\tau, \alpha, \nu) = 0, \tag{3}$$

$$\rho(\infty, \alpha, \nu) = 0, \quad \alpha \in G,$$

$$\sum_{\beta \in G}\int_0^\infty r_\beta(\tau)\rho(\tau, \beta, \nu)\,d\tau\, p_{\beta\alpha} = \rho(0, \alpha, \nu), \quad \alpha \in G, \tag{4}$$

і для сингулярних компонент

$$\rho[\infty, x, V_1] = 0, \quad x \in X, \qquad \rho[\infty, y, V_0] = 0, \quad y \in Y,$$

$$\frac{d}{d\tau}\rho[\tau, x, V_1]d\tau + r_x(\tau)\rho[\tau, x, V_1] - b_x\rho(\tau, x, V_1-) = 0, \tag{5}$$

$$\frac{d}{d\tau}\rho[\tau, y, V_0]d\tau + r_y(\tau)\rho[\tau, y, V_0] - a_y\rho(\tau, y, V_0+) = 0, \tag{6}$$

де $\rho(\tau, x, V_1-) = \lim_{\nu\uparrow V_1}\rho(\tau, x, \nu)$, $\rho(\tau, x, V_0+) = \lim_{\nu\downarrow V_0}\rho(\tau, x, \nu)$.

Далі,

$$\sum_{y\in Y}\int_0^\infty r_y(\tau)\rho[\tau, y, V_0]d\tau\, p_{yz} = \rho[0, z, V_0], \quad z\in Y,$$

$$\sum_{x\in X}\int_0^\infty r_x(\tau)\rho[\tau, x, V_0]d\tau\, p_{xz} = \rho[0, z, V_0], \quad z\in X,$$

$$\sum_{y\in Y}\int_0^\infty r_y(\tau)\rho[\tau, y, V_0]d\tau\, p_{yx} = b_x\int_0^\infty \rho(\tau, x, V_0+)d\tau, \quad x\in X, \tag{7}$$

$$\sum_{x\in X}\int_0^\infty r_x(\tau)\rho[\tau, x, V_1]d\tau\, p_{xy} = a_y\int_0^\infty \rho(\tau, y, V_1-)d\tau, \quad y\in Y.$$

Розв’язуючи рівняння (3), знаходимо

$$\rho(\tau, x, \nu) = f_x(\nu - b_x\tau)e^{-\int_0^\tau r_x(s)ds}, \quad x\in X,$$

$$\rho(\tau, y, \nu) = f_y(\nu + a_y\tau)e^{-\int_0^\tau r_x(s)ds}, \quad y\in Y.$$

Випадок балансу характеризується незалежністю несингулярної частини стаціонарного розподілу $\rho(\cdot)$ від ν. У такому випадку функції $f_x(\nu - b_x\tau) = c_x$, $f_y(\nu + a_y\tau) = c_y$ — константи. Тоді з урахуванням того, що

$$e^{-\int_0^\tau r_\alpha(s)ds} = 1 - F_\alpha(\tau),$$

розв’язок рівняння (3) має вигляд

$$\rho(\tau, \alpha, \nu) = c_\alpha(1 - F_\alpha(\tau)), \quad \alpha\in G. \tag{8}$$

Оскільки виконується умова $У_1$, то $\dfrac{\partial\rho(\tau,\alpha,\nu)}{\partial\tau} = -c_\alpha f_\alpha(\tau)$, $\lim_{\tau\to+\infty}(\tau, \alpha, \nu) = 0$. Враховуючи незалежність $\rho(\tau, \alpha, \nu)$ від ν, переконуємось, що розв’язок (8) повністю відповідає умові $У_2$.

Підставляючи цю рівність в (4), отримуємо

$$\sum_{\alpha\in G} c_\alpha p_{\alpha\beta} = c_\beta. \tag{9}$$

Далі припускаємо, що виконується умова

$У_3$) вкладений у процес $\kappa(t)$ ланцюг Маркова незвідний, ергодичний і має стаціонарний розподіл ρ_α, $\alpha\in G$.

Тоді розв’язок (9) набирає вигляду

$$c_\alpha = c\rho_\alpha, \quad \alpha\in G, \tag{10}$$

звідки

$$\int_0^\infty \rho(\tau, \alpha, \nu)d\tau = c\rho_\alpha\int_0^\infty (1 - F_\alpha(\tau))d\tau = c\rho_\alpha m_\alpha, \quad \alpha\in G.$$

Розв’язуючи (5), (6), з урахуванням (8), (10) отримуємо

$$\rho[\tau, x, V_1] = c\rho_x(1 - F_x(\tau))\left(b_x\tau + \frac{\rho[0, x, V_1]}{\sigma\rho_x}\right),$$
$$\rho[\tau, y, V_0] = c\rho_y\left(1 - F_y(\tau)\right)\left(a_y\tau + \frac{\rho[0, y, V_0]}{\sigma\rho_y}\right). \tag{11}$$

Підставляючи (11) в (7), знаходимо

$$\sum_{x\in X}\rho_x b_x m_x p_{xz} + \sum_{x\in X}\rho[0, x, V_1]p_{xz} = \rho[0, z, V_1], \quad z \in X,$$
$$\sum_{y\in Y}\rho_y a_y m_y p_{yz} + \sum_{y\in Y}\rho[0, y, V_0]p_{yz} = \rho[0, y, V_0], \quad z \in Y,$$
$$\sum_{y\in Y}\rho_y a_y m_y p_{yx} + \sum_{y\in Y}\rho[0, y, V_0]p_{yx} = b_x m_x\rho_x, \quad x \in X,$$
$$\sum_{x\in X}\rho_x b_x m_x p_{xy} + \sum_{x\in X}\rho[0, x, V_1]p_{xy} = a_y m_y\rho_y, \quad y \in Y.$$

Позначимо $P_X = \{p_{xz},\ x, z \in X\}$, $P_Y = \left\{p_{yz},\ y, z \in X\right\}$, $G_X = (I - P_X)^{-1} = \{g_{xz}, x,$ $z \in X\}$, $G_Y = (I - P_Y)^{-1} = \left\{g_{yz},\ y, z \in Y\right\}$. Матриці G_X, G_Y мають значення потенціалів [7] (гл. 1, § 6). Розв'язуючи два перших рівняння (7), маємо

$$\rho[0, z, V_0] = \sum_{x\in X}\rho_x b_x m_x \sum_{k\in X} p_{xk}\, g_{kz}, \quad z \in X,$$
$$\rho[0, z, V_1] = \sum_{y\in Y}\rho_y a_y m_y \sum_{k\in Y} p_{yk}\, g_{kz}, \quad z \in Y.$$

Підставляючи ці формули в два останніх рівняння (7), отримуємо умову

$У_4$) мають місце співвідношення

$$\sum_{x\in X} b_x m_x \rho_x p_{xy} + \sum_{x\in X}\rho_x b_x m_x \sum_{k\in X} p_{xk} \sum_{z\in X} g_{kz}\, p_{zy} = b_y m_y \rho_y, \quad y \in Y,$$
$$\sum_{y\in Y} a_y m_y \rho_y p_{yx} + \sum_{y\in Y}\rho_y a_y m_y \sum_{k\in Y} p_{yk} \sum_{z\in Y} g_{kz}\, p_{zx} = b_x m_x \rho_x, \quad x \in X.$$

Отже, доведено таку теорему.

Теорема. *Якщо виконуються умови* $У_1$ – $У_4$, *то стаціонарний розподіл* $\rho(\cdot)$ *процесу* $\xi(t)$ *має вигляд*: *для щільностей* $\rho(\tau, x, \nu) = c\rho_x(1 - F_x(\tau))$, $x \in X$, $\rho(\tau, y, \nu) = c\rho_y\left(1 - F_y(\tau)\right)$, $y \in Y$, *для атомів*

$$\rho[\tau, x, V_0] = c\rho_x(1 - F_x(\tau))\left(b_x\tau + \frac{\rho[0, x, V_0]}{c\rho_x}\right),$$
$$\rho[\tau, y, V_1] = c\rho_y\left(1 - F_y(\tau)\right)\left(a_y\tau + \frac{\rho[0, y, V_1]}{c\rho_y}\right),$$

де

$$\rho[0, z, V_0] = \sum_{x\in X}\rho_x b_x m_x \sum_{k\in X} p_{xk}\, g_{kz}, \quad z \in X,$$

$$\rho\,[0, z, V_1] \;=\; \sum_{y\in Y} \rho_y\, a_y\, m_y \sum_{k\in Y} p_{yk}\, g_{kz}, \quad z \in Y,$$

а c знаходиться з умови

$$\int_Z \rho(dz) \;=\; 1.$$

Тепер покажемо, що за додаткових умов, наведених нижче, знайдена стаціонарна міра є єдиною, тобто не існує іншого стаціонарного розподілу, для якого умову У$_2$ не виконано і який би задовольняв рівняння (2).

У даний час у теорії випадкових процесів добре відомий метод каплінга (склеювання), який широко використовується при дослідженні марковських та близьких до них процесів [8, 9]. А саме, має місце така лема.

Лема. *Якщо процес Маркова $\zeta(t)$ з фазовим простором Ψ задовольняє умову*

С) *існують $T > 0$, $\gamma > 0$ та процес Маркова $\vec{\theta}(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t))$ на фазовому просторі Ψ^2 такі, що*:

а) *обидві компоненти процесу $\vec{\theta}(t)$ мають однаковий розподіл з процесом $\zeta(t)$*;

б) *для будь-яких x, y* $\mathrm{P}\{\theta_1(T) = \theta_2(T) / \theta_1(0) = x,\ \theta_2(0) = y\} \ge \gamma$,

то процес $\zeta(t)$ має не більше одного стаціонарного розподілу.

Покажемо як можна застосувати метод каплінга у даному випадку.

I. Припустимо, що $\kappa(t)$ — марковський процес, тобто замість трикомпонентного процесу $\xi(t) = (\tau(t), \kappa(t), \nu(t))$ можемо розглядати двокомпонентний $\bar{\xi}(t) = (\kappa(t), \nu(t))$. Без втрати загальності припускаємо, що $p_{\alpha\beta} = \mathrm{P}\{\kappa_{l+1} = \alpha / \kappa_l = \beta\} \ge \delta > 0 \quad \forall\, \alpha, \beta \in G$. Нехай κ'_l і κ''_l, $l \ge 1$, — два незалежних ланцюги Маркова з спільним фазовим простором G, матрицею перехідних імовірностей $\mathrm{P} = \{p_{\alpha\beta},\ \alpha, \beta \in G\}$ і одночасними стрибками. Тоді неважко переконатись, що $\mathrm{P}\{\kappa'_1 = \alpha_0,\ \kappa''_1 = \alpha_0 / \kappa'_0 = \alpha,\ \kappa''_0 = \beta\} \ge \delta^2 > 0 \quad \forall\, \alpha_0, \alpha, \beta \in G$, тобто після першого стрибка процеси κ'_l і κ''_l, $l \ge 1$, склеються з імовірністю не меншою за $\delta^2 > 0$. Розглянемо два незалежних марковських процеси $\kappa'(t)$, $\kappa''(t)$ з вкладеними ланцюгами κ'_l і κ''_l відповідно і з інтенсивностями перебування у станах такими ж, як у $\kappa(t)$. Далі, до деякого моменту $T_0 > 0$ з імовірністю не меншою за $\delta_1 = \lambda\int_0^{T_0} e^{-\lambda s}\, ds$ відбудеться стрибок процесу $\kappa(t)$, де $\lambda = \min_{\alpha\in G}\lambda_\alpha$ (λ_α — інтенсивність перебування $\kappa(t)$ в $\alpha \in G$). Отже, до моменту t_0 процеси $\kappa'(t)$, $\kappa''(t)$ склеються з імовірністю не меншою за $\delta_1\delta^2 > 0$.

Позначимо $\nu_{\min} = \min_{i,j\in G}(a_i, b_j)$, $T = 2\dfrac{V_1 - V_0}{\nu_{\min}}$. З імовірністю $\delta_2 = \lambda\int_{T_0}^{\infty} e^{-\lambda s}\, ds$ після моменту T_0 не відбудеться стрибків і, отже, за однакових $\kappa'(t)$, $\kappa''(t)$ через час не більший за T склеються в атомі компоненти $\nu'(t)$, $\nu''(t)$, де $\nu'(t)$ задовольняє рівняння (1), кероване процесом $\kappa'(t)$, а $\nu''(t)$ — процесом $\kappa''(t)$. Отже, з імовірністю не меншою за $\delta_2\delta_1\delta^2 > 0$ до моменту $T + T_0$ склеються процеси

$$\overline{\xi}'(t) = (\kappa'(t), \nu'(t)) \quad \text{та} \quad \overline{\xi}''(t) = (\kappa''(t), \nu''(t)).$$

II. Розглянемо випадок, коли $\kappa(t)$ — напівмарковський процес. Розглянемо незалежні процеси $\xi'(t) = (\tau'(t), \kappa'(t), \nu'(t))$, $\xi''(t) = (\tau''(t), \kappa''(t), \nu''(t))$, де $\kappa'(t)$, $\kappa''(t)$ — незалежні напівмарковські процеси з вкладеними ланцюгами κ'_l і κ''_l відповідно і з інтенсивностями перебування у станах такими ж, як у $\kappa(t)$; $\nu'(t)$ задовольняє рівняння (1), кероване процесом $\kappa'(t)$, а $\nu''(t)$ — процесом $\kappa''(t)$. Спочатку покажемо, що за певної умови можна склеїти $(\tau'(t), \kappa'(t))$ та $(\tau''(t), \kappa''(t))$.

Позначимо $\mu_{t,x}(ds) = \mathrm{P}\{\tau \in ds / \tau = t, \ \kappa = x\}$ і будемо припускати існування неперервної щільності $p_{t,x}(s) > 0$, тобто $\mu_{t,x}(ds) = p_{t,x}(s)\, ds$. Нехай виконується умова: для деякого $T_0 > 0$

$$\inf_{\substack{(t_1,x_1),(t_2,x_2) \\ t_1,t_2 \le T_0}} \int_0^{T_0} \min\big(p_{t_1,x_1}(s), p_{t_2,x_2}(s)\big) ds = \delta_3 > 0,$$
$$\inf_{t,x} \mu_{t,x}([0, T_0]) = \delta_4 > 0. \tag{12}$$

З урахуванням (12) із каплінгової леми [8, 9] випливає, що $(\tau'(t), \kappa'(t))$ та $(\tau''(t), \kappa''(t))$ можна склеїти до моменту T_0 з імовірністю не меншою за $\delta_3 \delta_4 \delta^2$, а далі аналогічно марковському випадку чекаємо до склейки компонент $\nu'(t)$ і $\nu''(t)$ в атомі. Якщо $\max(t_1, t_2) > T_0$, то з імовірністю не меншою за

$$\delta_5 = \int_0^{\infty} \big(F_{x_1}(t_1 + T_0 + t) - F_{x_1}(t_1 + t)\big) f_{x_2}(t_2 + t)\, dt$$

в момент стрибка $\kappa''(t)$ маємо $\tau'' = 0$, $\tau' \le T_0$ і можна з урахуванням (12) скористатись каплінговою лемою.

Для практичного застосування, наприклад при обчисленні стаціонарного коефіцієнта готовності системи, необхідно знати функцію $\overline{\rho}(\alpha, \nu)$, що дорівнює частці часу, проведеного двокомпонентним процесом $\zeta(t) = (\kappa(t), \nu(t))$ у стані (α, ν) [3]. Ця функція знаходиться так:

$$\overline{\rho}(\alpha, \nu) = \int_0^{\infty} \rho(\tau, \alpha, \nu)\, d\tau = c \rho_\alpha m_\alpha, \quad \alpha \in G,$$

$$\overline{\rho}[x, V_1] = \int_0^{\infty} \rho[\tau, x, V_1]\, d\tau =$$

$$= c\left(\frac{1}{2}\sum_{z \in X} \rho_z b_z m_z^{(2)} + \sum_{z \in X} \rho_z b_z m_z^2 \sum_{k \in X} p_{zk} g_{kx}\right), \quad x \in X,$$

$$\overline{\rho}[y, V_0] = \int_0^{\infty} \rho[\tau, y, V_0]\, d\tau =$$

$$= c\left(\frac{1}{2}\sum_{z \in Y} \rho_z b_z m_z^{(2)} + \sum_{z \in Y} \rho_z a_z m_z^2 \sum_{k \in Y} p_{zk} g_{ky}\right), \quad y \in Y,$$

де

$$c = \left(\sum_{\beta \in G} \rho_\beta b_\beta m_\beta + \frac{1}{2} \sum_{\beta \in G} \rho_\beta b_\beta m_\beta^2 + \sum_{x \in X} \sum_{z \in X} \rho_z b_z m_z^2 \sum_{k \in X} p_{zk} g_{kx} + \right.$$

$$\left. + \sum_{y \in Y} \sum_{z \in Y} \rho_z a_z m_z^2 \sum_{k \in Y} p_{zk} g_{ky} \right)^{-1}.$$

На завершення висловлюю подяку О. М. Кулику, який у приватній бесіді навів мені схему доведення одиничності стаціонарного розподілу за допомогою методу каплінга.

1. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. – Киев: Наук. думка, 1982. – 234 с.
2. *Погоруй А. А., Турбин А. Ф.* Оценка стационарной эффективности производственной линии с двумя ненадежными агрегатами // Кибернетика и системный анализ. – 2002. – № 6. – С. 35 – 42.
3. *Турбин А. Ф., Погоруй А. А.* Расчет стационарных показателей эффективности систем управления запасами с обратной связью // Интеллектуализация систем обработки информационных сообщений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – С. 191 – 204.
4. *Корлат А. Н., Кузнецов В. Н., Новиков М. М., Турбин А. Ф.* Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания. – Кишинев: Штиинца, 1991. – 276 с.
5. *Королюк В. С., Свищук А. В.* Полумарковские случайные эволюции. – Киев: Наук. думка, 1992. – 256 с.
6. *Королюк В. С.* Стохастичні моделі систем. – Київ: Либідь, 1993. – 134 с.
7. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Математические основы фазового укрупнения сложных систем. – Киев: Наук. думка, 1978. – 220 с.
8. *Veretennikov A. Yu.* Coupling method for Markov chains under integral Doeblin type condition // Theory Stochast. Processes. – 2002. – **8(24)**, № 3 – 4. – P. 383 – 391.
9. *Lindvall T.* Lectures on the coupling method. – New York: Dover Publ., 1992. – 257 p.

Одержано 28.05.2003,
після доопрацювання — 22.07.2005