УДК 518; 517. 948

Я. Д. П'янило, канд. фіз.-мат. наук (Центр мат. моделювання
Ін-ту прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

ПРО ОДНУ СХЕМУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ ЗГОРТКИ

The spectral method for solving convolution type integral equations in the basis of Chebyshev – Laquerre polynomials is given in a matrix form. This enables us to construct algorithms for recovering input signals by using directly the discrete values of the output signals and to estimate the influence of an input signal error on precision of the recovery of the signal.

Спектральний метод розв'язування рівнянь типу згортки в базисі многочленів Чебишева – Лагерра зводиться до матричної форми зображення, що дає можливість будувати алгоритми відновлення вхідних сигналів безпосередньо за дискретними значеннями вихідних та оцінити вплив похибки вхідних даних на точність відновлення.

Багато процесів, зокрема обробка сигналів та ідентифікація систем, описуються інтегральними рівняннями типу згортки, які розв'язуються чисельними методами. Найбільш вживаними є регуляризуючі алгоритми тихоновського типу або алгоритми, що базуються на деякій апроксимації вихідного рівняння. В роботі [1] проведено аналіз цих методів, відзначено їх позитивні і негативні сторони, вказано, що процедура дискретизації вихідного рівняння може призвести до значної втрати точності. Для подолання цього недоліку в роботі запропоновано спектральний метод розв'язування рівнянь типу згортки в базисі ортогональних многочленів Чебишева – Лагерра. Основною позитивною стороною даного методу є те, що інтегральна згортка переходить безпосередньо в згортку рядів і виключається процедура дискретизації. В даній роботі досліджується питання "обчислювальної технології" обробки сигналів спектральним методом в лінійно-фільтрових моделях, які описуються інтегральними рівняннями типу згортки

$$\int_0^t k(t-\tau)f(\tau)d\tau = y(t), \tag{1}$$

де $k(t)$ — ядро (апаратна функція); $y(t)$ — відома функція (вихідний сигнал); $f(t)$ — шукана функція (вхідний сигнал).

Нехай функція $f(t)$ задовольняє умову

$$\int_0^\infty e^{-t}|f(t)|^2 dt < \infty. \tag{2}$$

Тоді має місце розклад [3]:

$$f(t) = t^\lambda \sum_{n=0}^\infty \frac{n! f_n}{\Gamma(n+\lambda+1)} L_n^\lambda(t). \tag{3}$$

Тут $L_n^\lambda(t)$, $\lambda > -1$ — многочлени Чебишева – Лагерра, $\Gamma(t)$ — гамма-функція Ейлера,

$$f_n = \int_0^\infty e^{-t} f(t) L_n^\lambda(t) dt.$$

Якщо функції, що входять в рівняння (1), задовольняють умову (2), то їх можна розкласти в ряди типу (3), і задача в цьому випадку зводиться до обчислення невідомих коефіцієнтів f_n. Після підстановки рядів Фур'є – Лагерра відповідних функцій в рівність (1) одержуємо наступне співвідношення між коефіцієнтами Фур'є [2]:

$$f_n = \frac{1}{k_0}\left(y_n - \sum_{m=0}^{n-1} k_{n-m} f_m \right). \tag{4}$$

На практиці, як правило, відомо не аналітичний вираз для функції $y(t)$, а її значення на деякій множині точок t_i, $i = \overline{0, N-1}$. Якщо t_i — корені многочлена $L_N^{\lambda}(t)$, тобто $L_N^{\lambda}(t) = 0$, то коефіцієнти y_n розкладу $y(t)$ в ряд типу (3) можна за наближеною формулою [4]

$$y_n = \sum_{i=0}^{N-1} \omega_{i,n}\, y(t_i), \quad \omega_{i,n} = \frac{t_i L_n^{l}(t_i)}{(N+1)^2 [L_{N+1}^{\lambda}(t_i)]^2}. \tag{5}$$

Оскільки вихідною величиною є значення функції $f(t)$, то очевидно, що в даному випадку спектральний метод розв'язку доцільно модифікувати таким чином, щоб за значеннями $y(t_i)$ відновлювати безпосередньо значення $f(t)$ в деяких заданих точках t_k, $k = \overline{1, K}$.

Запишемо формулу (4) у вигляді

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} k_{n-m} f_m,$$

або

$$K_N F_N = Y_N, \tag{6}$$

де

$$K_N = \begin{pmatrix} k_0 & 0 & \dots & 0 \\ k_1 & k_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{N-1} & k_{N-2} & \dots & k_0 \end{pmatrix}, \quad F_N = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \dots \\ f_{n-1} \end{pmatrix}, \quad Y_N = \begin{pmatrix} y \\ y_1 \\ \dots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Тоді невідомі коефіцієнти f_n знаходяться з розв'язку матричного рівняння (6), тобто $F_N = K_N^{-1} Y_N$, де K_N^{-1} — матриця, обернена до K_N, або в розгорнутому вигляді

$$f_n = \sum_{i=0}^{N-1} y_i z_{n,i}, \quad n = \overline{0, N-1}. \tag{7}$$

В останній формулі $z_{n,i}$ — елементи матриці K_N^{-1}. Якщо коефіцієнти f_n шуканої функції $f(t)$ обчислюються за формулою (7), то, підставляючи їх в N-у часткову суму ряду (3), одержуємо наближену рівність для відновлення $f(t)$:

$$f(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \eta_n^{\lambda}(t) y_n, \tag{8}$$

де

$$\eta_n^{\lambda}(t) = t^{\lambda} \sum_{m=n}^{N-1} \frac{n!}{\Gamma(n+\lambda+1)} z_{n+1,\, m+1} L_m^{\lambda}(t).$$

Квадратурна формула (5) в матричному виді записується таким чином:

$$Y_N = W_{N,N} YT_N, \tag{9}$$

де $W_{N,N}$ — квадратна матриця $N*N$ з елементами $\omega_{i,j}$, а YT_N — матриця-стовпець з елементами $y(t_j)$, $j = \overline{0, N-1}$.

Якщо значення функції $f(t)$ обчислюються в точках t_k $k=\overline{1, K}$, то рівність (8) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} f(t_1) \\ f(t_2) \\ \dots \\ f(t_K) \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} \eta_0(t_1) & \eta_1(t_1) & \dots & \eta_{N-1}(t_1) \\ \eta_0(t_2) & \eta_1(t_2) & \dots & \eta_{N-1}(t_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \eta_0(t_K) & \eta_1(t_K) & \dots & \eta_{N-1}(t_K) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_{N-1} \end{pmatrix},$$

або в матричній формі

$$FT_K = \theta_{K,N} Y_N. \tag{10}$$

Зміст матриць FT_K та $\theta_{K,N}$ легко бачити з співвідношення (10). З рівностей (9) та (10) маємо формулу

$$FT_K = G_{K,N} YT_N, \quad G_{K,N} = \theta_{K,N} W_{N,N}. \tag{11}$$

Якщо матриця $G_{K,N}$ побудована, то рівність (11) дозволяє за значеннями вихідного сигналу безпосередньо відновлювати значення вхідного сигналу в заданих точках t_k, $k=\overline{1, K}$.

Як вказувалось вище, використання спектрального методу розв'язування рівнянь типу (1) в базисі многочленів Чебишева – Лагерра дозволяє уникнути процедури дискретизації, тим самим, розв'язується така проблема, як нестійкість числового розв'язку до похибок вхідної інформації, що виводить розв'язок збуреного рівняння за межі множини коректності. Більш того, в багатьох випадках вдається оцінити вплив похибки вхідної інформації на кінцевий результат.

Оскільки на практиці значення вихідного сигналу задаються з деякою похибкою ε_i, тобто $y(t_i) = \tilde{y}(t_i) + \varepsilon_i$, або

$$YT_N = Y\tilde{T}_N + E_N, \tag{12}$$

де E_N — матриця-стовпець з елементами ε_i, $i=\overline{0, N-1}$, то з рівностей (11) та (12) одержуємо співвідношення

$$FTY_K = F\tilde{T}_K + D_K,$$

де $F\tilde{T}_K = G_{K,N} Y\tilde{T}_N$ — наближене значення вихідного сигналу; $D_K = G_{K,N} E_K$ — похибка обчислення, яка виникає за рахунок неточності вхідних даних. Зокрема, якщо $\varepsilon_i = \varepsilon \equiv \text{const}$, $\{d_k\}$ і $\{g_{i,j}\}$ — елементи матриць D_K і $G_{K,N}$ відповідно, то

$$(d_1, d_2, \dots d_k)^T = \varepsilon \left(\sum_{n=0}^{N-1} g_{1n}, \sum_{n=0}^{N-1} g_{2n}, \dots, \sum_{n=0}^{N-1} g_{Kn}, \right)^T.$$

В останній рівності символ T означає процедуру транспонування матриці.

Слід відмітити, що елементи матриці $G_{K,N}$ не залежать від значень вхідного та вихідного сигналів. Тому, використовуючи спеціальні методи програмування, можна обчислити необхідну їх кількість з заданою точністю і зберігати в пам'яті ЕОМ. А це, в свою чергу, дає можливість економити машинний час та зменшувати нагромадження машинної помилки.

1. *Апарцин А. С.* Дискретизационные методы регуляризации некоторых интегральных уравнений 1 рода // Методы численного анализа и оптимизации. – Новосибирск: Наука, 1987.– С. 263 – 297.
2. *П'янило Я. Д.* Розв'язування рівнянь типу згортки в базисі многочленів Чебишева – Лагерра // Допов. АН УРСР. Сер.А. – 1990.– №1. – С.36 – 39.
3. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Операционное исчисление. – М.: Высш. шк., 1975.– 407 с.
4. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. – М.: Физматгиз, 1961. – 524 с.

Одержано 28.01.93