УДК 519. 6

**А. М. Самойленко,** чл.-корр. НАН Украины (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

# О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ГЛАДКИХ ИНВАРИАНТНЫХ ТОРОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Problems related to the theory of perturbations of invariant tori of dynamical systems in a $n$-dimensional Euclidean space $R^n$ are considered. Solution of these problems is important for the perturbation theory proposed by the author in [1] and extends the scope of application of this theory.

Розглядаються питання, пов'язані з теорією збурень гладких інваріантних торів динамічних систем у $n$-вимірному евклідовому просторі $R^n$. Вияснення цих питань суттєво для теорії збурень, запропонованої автором [1], і розширює можливості застосування цієї теорії.

В п. 1 настоящей работы обсуждается проблема введения в $R^n$ локальных координат в окрестности гладкого $m$-мерного тора $M$ этого пространства в размерностях, связанных неравенством $n \le 2m$.

В п. 2 изучаются вариации семейства решений динамической системы, начинающихся на $M$. Исследованиям линейных расширений динамических систем на торе, играющим основную роль в теории возмущений [1], посвящены пп. 3 и 4.

В п. 3 приводятся новые критерии экспоненциальной дихотомии такого расширения, а в п. 4 указываются условия грубости функции Грина с показателем гладкости $r \ge 1$ для этого расширения.

В п. 5 используются исследования п. 4 для доказательства теоремы возмущения гладкого инвариантного тора $M$ в условиях, когда $M$ может не быть экспоненциально дихотомичным тором динамической системы. Речь здесь идет о ситуации в теории возмущений, не изучавшейся ранее.

В п. 6 вводится функция Грина для линейного матричного уравнения, аналогичного линейному расширению динамической системы на торе, с помощью которой решается задача о блочной диагонализации блочно-треугольного расширения динамической системы на торе, возникающая в п. 2.

**1. Введение локальных координат в окрестности многообразия $M$ при $n \le 2m$.** Будем рассматривать систему дифференциальных уравнений в $R^n$ вида

$$\frac{dx}{dt} = X(x) + \varepsilon X_1(x), \tag{1.1}$$

где $X, X_1 \in C^r(R^n)$, $r \ge 2$, $\varepsilon$ — малый положительный параметр, $C^r(D)$ — пространство $r$ раз непрерывно дифференцируемых функций в области $D \subseteq R^n$, $x \in R^n$. Пусть при $\varepsilon = 0$ система (1.1) (невозмущенная система) имеет инвариантное многообразие $M$ вида

$$M : x = f(\varphi). \tag{1.2}$$

Здесь $f \in C^r(\mathcal{T}_m)$, $C^r(\mathcal{T}_m)$ — пространство $r$ раз непрерывно дифференцируемых функций на $m$-мерном торе $\mathcal{T}_m$,

$$\operatorname{rank} \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} = m \tag{1.3}$$

для всех $\varphi \in \mathcal{T}_m$.

Многообразие (1.2), (1.3) является $m$-мерным $r$ раз непрерывно дифференцируемым (класса гладкости $C^r(\mathcal{T}_m)$) тороидальным инвариантным многообразием невозмущенной системы (1.1).

Теория возмущений такого многообразия восходит к работам А. Пуанкаре, Д. Биркгофа, Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [2 – 4]. Наиболее глубокие результаты раннего периода ее становления принадлежат Н. Н. Боголюбову [5] и развиты им позже в [6]. Новые подходы и разработки этой теории предложены Ю.Мозером [7, 8] с дальнейшим развитием их в [9, 10], а также автором [11, 12] с дальнейшим развитием их в [13 – 15].

Теория возмущений многообразия $M$ строится в предположении, что малая окрестность $V(M)$ многообразия $M$ „хорошо устроена" в $R^n$. Последнее означает, что $V(M)$ расслаивается на многообразия вида $M$:

$$V(M) = \bigcup_{\|c\|<\delta} M_c, \quad M_c : x = f(\varphi) + B(\varphi)c, \tag{1.4}$$

где $B(\varphi)$ — $(n \times (n-m))$-мерная матрица из $C^r(\mathcal{T}_m)$, образующая вместе с матрицей $F(\varphi) = \partial f(\varphi)/\partial\varphi$ $2\pi$-периодический базис в $R^n$:

$$\det[F(\varphi), B(\varphi)] \neq 0 \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{T}_m, \tag{1.5}$$

$c$ — произвольное значение из шара $\|c\|^2 = \sum_{\nu-1}^{n-m} c_\nu^2 \le \delta$ пространства $R^{n-m}$, $\delta$ — малое положительное число.

Такое строение окрестности $M$ позволяет записать систему уравнений (1.1) в координатах $\varphi$, $h$ (локальных координатах в $V(M)$), связанных с евклидовыми формулой

$$x = f(\varphi) + B(\varphi)h, \tag{1.6}$$

в виде системы дифференциальных уравнений в $\mathcal{T}_m \times R^{n-m}$:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= f(\varphi, h) + \varepsilon f_1(\varphi, h), \\ \frac{dh}{dt} &= P(\varphi, h)h + \varepsilon F(\varphi, h). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Здесь согласно [1]

$$\begin{gathered} f(\varphi, h) = a(\varphi) + L_1(\varphi, h)[X(f(\varphi) + B(\varphi)h) - X(f(\varphi)) - (\partial B(\varphi)/\partial\varphi)a(\varphi)h], \\ P(\varphi, h)h = L_2(\varphi, h)[X(f(\varphi) + B(\varphi)h) - X(f(\varphi)) - (\partial B(\varphi)/\partial\varphi)a(\varphi)h], \\ f_1(\varphi, h) = L_1(\varphi, h)X_1(f(\varphi) + B(\varphi)h), \;\; F(\varphi, h) = L_2(\varphi, h)X_1(f(\varphi) + B(\varphi)h), \end{gathered} \tag{1.8}$$

$$a(\varphi) = [(\partial f(\varphi)/\partial\varphi)^* (\partial f(\varphi)/\partial\varphi)]^{-1} (\partial f(\varphi)/\partial\varphi)^* X(f(\varphi)), \tag{1.9}$$

$(\partial f(\varphi)/\partial\varphi)^*$ обозначает сопряженную к $(\partial f(\varphi)/\partial\varphi)$ матрицу, $L_1(\varphi, h)$ и $L_2(\varphi, h)$ — матричные блоки размеров соответственно $m \times n$ и $(n-m) \times n$ обратной к $[F(\varphi) + (\partial B(\varphi)/\partial\varphi)h, B(\varphi)]$ матрицы,

$$\frac{\partial\cdot}{\partial\varphi} a(\varphi) = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial\cdot}{\partial\varphi_\nu} a_\nu(\varphi).$$

При преобразовании координат $x$ в $\varphi$, $h$ согласно (1.6) многообразие $M$ переходит в тривиальное инвариантное многообразие системы (1.7)

$$h = 0 \tag{1.10}$$

с потоком траекторий на нем, определяемым системой уравнений на $\mathcal{T}_m$

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \tag{1.11}$$

где $a$ — функция (1.9).

Условия выполнимости предположения о расслоении окрестности $M$ на многообразия вида (1.4) рассматривались впервые в [16], где была доказана выполнимость этого предположения в размерностях

$$\{n > 2m\} \bigcup \{n = m+1\}. \tag{1.12}$$

Последовавшие затем исследования Б. Ф. Былова, Р. Э. Винограда, В. Я. Линя, О. В. Локуциевского [17, 18] доказали необходимость условия (1.12) для расслоения окрестности $M$ вида (1.4).

Возникает естественная проблема о введении локальных координат в окрестности $M$ в размерностях

$$m + 1 < n < 2m + 1. \tag{1.13}$$

Обсудим эту проблему. Положим $p = 2m - n + 1$. С учетом (1.13) имеем $1 \le \le p \le m - 1$.

Дополним систему уравнений (1.1) до системы в $R^{2m+1} = R^n \times R^p$, положив

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X(x) + \varepsilon X(x), \\ \frac{dy}{dt} &= Y(y), \end{aligned} \tag{1.14}$$

где $Y \in C^r(R^p)$, $Y(0) = 0$. Для системы (1.14) инвариантным является пространство $R^n$:

$$y = 0 \tag{1.15}$$

и гладкий инвариантный $m$-мерный тор

$$M_0 : x = f(\varphi), \quad y = 0. \tag{1.16}$$

В окрестности $M_0$ можно ввести локальные координаты $\varphi$, $h$, положив

$$x = f(\varphi) + B(\varphi)h, \quad y = C(\varphi)h \tag{1.17}$$

и взяв матрицы $B$, $C$ из условия, что $B, C \in C^r(\mathcal{T}_m)$ и

$$\det \begin{bmatrix} F(\varphi) & B(\varphi) \\ 0 & C(\varphi) \end{bmatrix} \neq 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{T}_m. \tag{1.18}$$

Относительно $\varphi$, $h$ вместо (1.14) получим систему уравнений вида (1.7), в которой тору (1.16) соответствует тривиальный тор (1.10). Этими рекомендациями перехода от системы (1.14) к эквивалентной ей системе в переменных $\varphi$, $h$ ограничивались обычно при рассмотрении случая (1.13).

Рассмотрим проблему введения локальных координат глубже. Для этого используем то обстоятельство, что для системы (1.14) инвариантным является все пространство $R^n$, определяемое в $R^{2m+1}$ как гиперплоскость (1.15). Поэтому для системы (1.14), записанной в локальных координатах $\varphi$, $h$, локально инвариантным является множество

$$C(\varphi)h = 0, \quad \|h\| < \delta. \tag{1.19}$$

Рассмотрим сужение системы (1.14), записанной в локальных координатах $\varphi$, $h$, на множестве (1.19). Это сужение мы получим, факторизуя правую часть системы (1.14), записанной в локальных координатах, по $C(\varphi)h$, отождествляя при такой факторизации произвольную функцию от $y = C(\varphi)h$ с ее значением при $y = 0$. Так как согласно формулам (1.8), (1.9) правая часть системы (1.14), записанная в локальных координатах, выражается через $L_1$, $L_2$, $X(f+Bh)$, $X(f)$, $\partial B/\partial\varphi$, $\partial C/\partial\varphi$, не зависящие от $Y$, и через $Y(C(\varphi)h)$, то при факторизации $Y(C(\varphi)h)$ отождествляется с $Y(0) = 0$. Это равносильно тому, что факторизованная правая часть системы (1.14), записанная в локальных координатах, определяется правой частью системы (1.14) при $Y \equiv 0$, записанной в локальных координатах.

Таким образом, сужение системы (1.14), записанной в локальных координатах, на множестве (1.19) имеет вид системы, которая получается из (1.1) переходом к локальным координатам $\varphi$, $h$, связанным с $x$ соотношениями

$$x = f(\varphi) + B(\varphi)h, \quad C(\varphi)h = 0. \tag{1.20}$$

Это однозначно определяет систему уравнений для сужения естественным образом из условия локальной инвариантности множества (1.20) для системы (1.1). В результате в окрестности $M$ исходная система уравнений (1.1) эквивалентна „связанной" системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= f(\varphi, h) + \varepsilon f_1(\varphi, h), \\ \frac{dh}{dt} &= P(\varphi, h)h + \varepsilon F(\varphi, h), \end{aligned} \tag{1.21}$$

$$C(\varphi)h = 0, \tag{1.22}$$

в которой правые части однозначно определяются по $X$, $X_1$ и матрице $C(\varphi)$, стоящей в левой части формулы (1.18). Эквивалентность понимается в том смысле, что любое решение $\varphi_t$, $h_t$ системы (1.21), у которого $\varphi_0$, $h_0$ удовлетворяет уравнению (1.22), определяет решение $x(t, x_0, \varepsilon)$ системы (1.1) с $x_0 = f(\varphi_0) + B(\varphi_0)h_0$ для всех $t \in J$, где $J$ — максимальный временной интервал, при котором $\|h_t\| < \delta$. Более того, множество (1.22) является локально инвариантным для системы (1.21). Действительно, система (1.21) — это запись (1.14) при $Y \equiv 0$ в локальной системе координат, (1.22) — запись в локальной системе координат множества (1.15), инвариантного для системы (1.14) при $Y \equiv 0$. Следовательно, (1.22) — локально инвариантное множество системы (1.21). При $m + 1 < n \le 2m$ матрица $C(\varphi)$ не всегда дополняема в $R^{m+1}$ до непрерывного $2\pi$-периодического базиса. Поэтому в системе (1.21), (1.22) не всегда возможно избавиться от связи (1.22) таким образом, чтобы свести систему (1.21), (1.22) к системе уравнений вида (1.21) с $h \in R^{n-m}$ и функциями $f$, $f_1$, $P$, $F$ из $C(\mathcal{T}_m \times K_\delta)$, $K_\delta = \{h : \|h\| < \delta\}$. Этим самым в размерностях (1.13) теория возмущения многообразия $M$ сводится к теории возмущения тривиального инвариантного многообразия (1.10) для системы (1.21), (1.22).

Ортонормируем матрицу $C(\varphi)$. Это позволяет от системы (1.22) перейти к системе с матрицей $C(\varphi) \in C^r(\mathcal{T}_m)$, удовлетворяющей условиям

$$C(\varphi)C^*(\varphi) = E_p \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{T}_m, \tag{1.23}$$

где $E_p$ — $p$-мерная единичная матрица, $m > p \ge 1$.

Положим $\varphi = (\psi, \theta)$, $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_{m-p})$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p)$, $\psi_\nu = \varphi_\nu$, $\nu = 1, m-p$, $\theta_\nu = \varphi_{m-p+\nu}$, $\nu = \overline{1, p}$, и рассмотрим матрицу $C_0(\psi) = C(\psi, 0)$. Так как $C_0 \in C^r(\mathcal{T}_{m-p})$, то матрица $C_0(\psi)$ удовлетворяет условиям [16] на размерность, при которых существует в $R^{m+1}$ ортонормированный базис $O(\psi) = [\,y_0(\psi), C_0^*(\psi)]$ с функцией $y_0 \in C^r(\mathcal{T}_{m-p})$. Замена переменных $h = O(\psi)h_1$ преобразует систему (1.21) к системе такого же вида и свойств, а уравнение (1.22) — в уравнение с матрицей $C_1(\psi, \theta) = C^*(\psi, \theta)O^*(\psi)$, удовлетворяющей условию $C_1(\psi, 0) = C(\psi, 0)O^*(\psi) = [C_0(\psi)y_0(\psi), C_0(\psi), C_0^*(\psi)] = [0, E_p]$ $\forall\, \psi \in \mathcal{T}_{m-p}$.

Согласно изложенному система уравнений (1.21), (1.22) всегда преобразуется к системе (1.21), (1.22) с матрицей $C(\psi, \theta)$, удовлетворяющей условиям $C \in C^r(\mathcal{T}_m)$,

$$C(\psi, \theta)C^*(\psi, \theta) = E_p, \quad C(\psi, 0) = [0, E_p] \tag{1.24}$$

для всех $\varphi = (\psi, \theta) \in \mathcal{T}_m$.

Следует отметить, что в геометрической интерпретации система (1.22), (1.24) задает в $R^{m+1}$ гиперплоскость коразмерности $p$ для каждого $\varphi \in \mathcal{T}_m$; эта гиперплоскость определяется нормальным уравнением (матрица $C(\varphi)$ задает систему направляющих косинусов нормальной гиперплоскости) и при $\theta = 0$ гиперплоскость (1.22) для всех $\psi$ совпадает с одной из координатных гиперплоскостей пространства $R^{m+1}$.

Исследуем решение уравнения (1.22) при условии (1.24). Для этого положим

$$P(\psi, \theta) = C^*(\psi, \theta)C(\psi, \theta), \quad P_1(\psi, \theta) = E - P(\psi, \theta), \tag{1.25}$$

где $E = E_{m+1}$. Из (1.24) следует, что матрица $P = P(\psi, \theta)$ есть симметрический проектор ранга $p$:

$$P = P^*, \quad P^2 = P, \quad \operatorname{rank} P = \operatorname{rank} C^*(\psi, 0)C(\psi, 0) = p \tag{1.26}$$

для всех $\varphi \in \mathcal{T}_m$. Более того, согласно (1.24) справедливо равенство

$$P(\psi, \theta)C^*(\psi, \theta) = C^*(\psi, \theta) \quad \forall\, (\psi, \theta) \in \mathcal{T}_m, \tag{1.27}$$

которое означает, что матрица $C^*(\psi, \theta)$ образована ортонормированной системой собственных векторов матрицы $P(\psi, \theta)$, соответствующих собственному числу этой матрицы, равному 1. Решения уравнения (1.22) — это собственные векторы матрицы $P(\psi, \theta)$, соответствующие собственному числу этой матрицы, равному 0.

Согласно [19], консервативность жордановой формы матрицы $P$ для всех $\varphi \in \mathcal{T}_m$ гарантирует существование $m + 1 - p$ линейно независимых решений (1.22), принадлежащих пространству функций $C^r(R^m)$. Покажем, что эти решения можно выбрать из подпространства $C^r(\mathcal{T}_{m-p} \times R^p)$, состоящего из функций $2\pi$-периодических по $\varphi_\nu = \psi_\nu$, $\nu = \overline{1, m-p}$, непрерывно дифференцируемых по $\varphi$ $r$ раз $\forall\, \varphi \in \mathcal{T}_{m-p} \times R^p$. Для этого запишем уравнение

$$\frac{\partial C(\varphi)}{\partial \theta_\nu} h + C(\varphi)\frac{\partial h}{\partial \theta_\nu} = 0, \quad \nu = \overline{1, p}. \tag{1.28}$$

С учетом (1.24), (1.26), (1.27) уравнению (1.28) удовлетворяет любое из решений $h = h(\psi, \theta)$ дифференциального уравнения

$$\frac{\partial h}{\partial \theta_\nu} = \left[ -C^*(\psi, \theta)\frac{\partial C(\varphi, \theta)}{\partial \theta_\nu} + P_1(\psi, \theta)W(\psi, \theta) \right] h, \tag{1.29}$$

где $W = W(\psi, \theta)$ — произвольная $(m+1)$-мерная квадратная матрица из $C(R^m)$.

Выберем матрицу $W$ так, чтобы матрица коэффициентов уравнения (1.29) являлась кососимметрической матрицей. Для этого необходимо и достаточно выбрать $W$ из уравнения

$$-\left[C^*\frac{\partial C}{\partial\theta_\nu}+\frac{\partial C^*}{\partial\theta_\nu}C\right]+P_1W+W^*P_1=0. \tag{1.30}$$

Уравнение (1.30) имеет вид

$$\frac{\partial P}{\partial\theta_\nu}=2W-[PW+W^*P],\quad \nu=\overline{1,\,p}, \tag{1.31}$$

и ему удовлетворяет матрица

$$W=\frac{\partial P}{\partial\theta_\nu}. \tag{1.32}$$

Действительно, подставляя (1.32) в правую часть (1.31), получаем

$$2W-[PW+W^*P]=2\frac{\partial P}{\partial\theta_\nu}-\left[P\frac{\partial P}{\partial\theta_\nu}+\frac{\partial P}{\partial\theta_\nu}P\right]=$$

$$=2\frac{\partial P}{\partial\theta_\nu}-\frac{\partial}{\partial\theta_\nu}P^2=2\frac{\partial P}{\partial\theta_\nu}-\frac{\partial}{\partial\theta_\nu}P=\frac{\partial P}{\partial\theta_\nu}.$$

Следовательно, матрица (1.32) является решением уравнения (1.31). Таким образом, уравнение (1.29) при $W$, определяемом формулой (1.32), имеет вид

$$\frac{\partial h}{\partial\theta_\nu}=\left[-C^*(\psi,\theta)\frac{\partial C(\psi,\theta)}{\partial\theta_\nu}+P_1(\psi,\theta)\frac{\partial P(\psi,\theta)}{\partial\theta_\nu}\right]h \tag{1.33}$$

и его матрица коэффициентов — кососимметрическая матрица. Положим

$$K_\nu=K_\nu(\psi,\theta_1,\ldots,\theta_\nu)=-C^*(\psi,\theta_1,\ldots,\theta_\nu,0)\,\frac{\partial C(\psi,\theta_1,\ldots,\theta_\nu,0)}{\partial\theta_\nu}+$$

$$+P_1(\psi,\theta_1,\ldots,\theta_\nu,0)\,\frac{\partial P(\psi,\theta_1,\ldots,\theta_\nu,0)}{\partial\theta_\nu},\quad \nu=\overline{1,\,p}, \tag{1.34}$$

где $C(\psi,\theta_1,\ldots,\theta_p,0)=C(\psi,\theta)$.

Согласно определению

$$K_\nu\in C^{r-1}(\mathcal{T}_m),\quad K_\nu+K_\nu^*=0\quad \forall\,(\psi,\theta)\in\mathcal{T}_m.$$

Определим по $K_\nu$ матрицант $\Omega_0^{\theta_\nu}=\Omega_0^{\theta_\nu}(\psi,\theta_1,\ldots,\theta_{\nu-1})$ системы уравнений

$$\frac{dh}{d\theta_\nu}=K_\nu(\psi,\theta_1,\ldots,\theta_\nu)h, \tag{1.35}$$

т. е. фундаментальную матрицу решений системы (1.35), нормированную условием

$$\Omega_0^0(\psi,\theta_1,\ldots,\theta_{\nu-1})=E,\quad E=E_{m+1}. \tag{1.36}$$

Отметим свойства матрицы $\Omega_0^{\theta_\nu}(\psi,\theta_1,\ldots,\theta_{\nu-1})$. Так как $K_\nu\in C^{r-1}(\mathcal{T}_{m+\nu})$, то согласно общей теории линейных систем дифференциальных уравнений

$$\Omega_0^{\theta_\nu}\in C^{r-1}(\mathcal{T}_{m+\nu-1}\times R). \tag{1.37}$$

Далее из (1.35) следует

$$\frac{d}{d\theta_\nu}\left[\left(\Omega_0^{\theta_\nu}\right)^*\Omega_0^{\theta_\nu}\right]=[K_\nu\Omega_0^{\theta_\nu}]^*\Omega_0^{\theta_\nu}+\left(\Omega_0^{\theta_\nu}\right)^*K_\nu\Omega_0^{\theta_\nu}=0$$

$$\forall\,(\psi,\theta_1,\ldots,\theta_\nu)\in\mathcal{T}_{m+\nu-1}\times R,$$

так что матрица $\Omega_0^{\theta_\nu}$ является ортогональной

$$\left(\Omega_0^{\theta_\nu}\right)^*\Omega_0^{\theta_\nu} = E \quad \forall\,(\psi,\theta_1,\ldots,\theta_\nu)\in\mathcal{T}_{m+\nu-1}\times R. \tag{1.38}$$

Наконец, из условий (1.24), (1.34) следует

$$\frac{\partial}{\partial\theta_\nu}\left[C(\psi,\theta_1,\ldots,\theta_\nu,0)\,\Omega_0^{\theta_\nu}(\psi,\theta_1,\ldots,\theta_{\nu-1})\right] = \frac{\partial C(\psi,\theta_1,\ldots,\theta_\nu,0)}{\partial\theta_\nu}\times$$

$$\times\,\Omega_0^{\theta_\nu}(\psi,\theta_1,\ldots,\theta_{\nu-1}) + C(\psi,\theta_1,\ldots,\theta_\nu,0)\Bigg[-C^*(\psi,\theta_1,\ldots,\theta_\nu,0)\times$$

$$\times\,\frac{\partial C(\psi,\theta_1,\ldots,\theta_\nu,0)}{\partial\theta_\nu} + P_1(\psi,\theta_1,\ldots,\theta_\nu,0)\,\frac{\partial P(\psi,\theta_1,\ldots,\theta_\nu,0)}{\partial\theta_\nu}\Bigg]\times$$

$$\times\,\Omega_0^{\theta_\nu}(\psi,\theta_1,\ldots,\theta_\nu,0) = C(\psi,\theta_1,\ldots,\theta_\nu,0)\,P_1(\psi,\theta_1,\ldots,\theta_\nu,0)\times$$

$$\times\,\frac{\partial P(\psi,\theta_1,\ldots,\theta_\nu,0)}{\partial\theta_\nu}\,\Omega_0^{\theta_\nu}(\psi,\theta_1,\ldots,\theta_{\nu-1}) = 0$$

$$\forall\,(\psi,\theta_1,\ldots,\theta_\nu)\in\mathcal{T}_{m+\nu-1}\times R.$$

Поэтому для матрицы $\Omega_0^{\theta_\nu}$ справедливо равенство

$$C(\psi,\theta_1,\ldots,\theta_\nu,0)\,\Omega_0^{\theta_\nu}(\psi,\theta_1,\ldots,\theta_{\nu-1}) = C(\psi,\theta_1,\ldots,\theta_{\nu-1},0,0) \tag{1.39}$$

для всех $(\psi,\theta_1,\ldots,\theta_\nu)\in\mathcal{T}_{m+\nu-1}\times R$. Положим

$$\Phi(\varphi) = \Omega_0^{\varphi_m}(\varphi_{11},\ldots,\varphi_{m-1})\,\Omega_0^{\varphi_{m-1}}(\varphi_{11},\ldots,\varphi_{m-2})\ldots\Omega_0^{\varphi_{m-p+1}}(\varphi_{11},\ldots,\varphi_{m-p}) \tag{1.40}$$

для любого $\varphi\in R^m$.

Матрица $\Phi$ удовлетворяет условиям

$$\Phi\in C^{r-1}(\mathcal{T}_{m-p}\times R^p),\quad \Phi^*(\varphi)\Phi(\varphi) = E, \tag{1.41}$$

$$C(\varphi)\Phi(\varphi) = C(\psi,0) = [0,E_p]\quad\forall\,(\psi,\theta)\in\mathcal{T}_{m-p}\times R^p.$$

Первое из этих условий — следствие (1.37), второе вытекает из (1.38):

$$\Phi^*(\varphi)\Phi(\varphi) = \left(\Omega_0^{\theta_1}\right)^*\ldots\left(\Omega_0^{\theta_{p-1}}\right)^*\left(\Omega_0^{\theta_p}\right)^*\Omega_0^{\theta_p}\Omega_0^{\theta_{p-1}}\ldots\Omega_0^{\theta_1} = E,$$

третье — следствие (1.39). Матрица

$$h(\varphi) = \Phi(\varphi)[E_1,0] = \Phi_1(\varphi),\quad E_1 = E_{m-p+1}, \tag{1.42}$$

образованная первыми $(m-p+1)$ столбцами $\Phi(\varphi)$, определяет решение уравнения (1.22), так как согласно (1.41)

$$C(\varphi)h(\varphi) = C(\varphi)\Phi(\varphi)[E_{m-p+1},0]^* = [0,E_p][E_{m-p+1},0]^* = 0$$

для всех $\varphi\in\mathcal{T}_{m-p}\times R^p$. Так как

$$\operatorname{rank} h(\varphi) = m-p+1\quad\forall\,\varphi\in\mathcal{T}_{m-p}\times R^p,$$

то матрица (1.42) определяет систему $(m-p+1)$ линейно независимых решений уравнения (1.22) для всех $\varphi\in\mathcal{T}_{m-p}\times R^p$. Это есть ортонормированная система решений (1.22), принадлежащая пространству $C^{r-1}(\mathcal{T}_{m-p}\times R^p)$.

Матрица $[C^*(\varphi), h(\varphi)]$ образует ортонормированный базис в $R^{m+1}$, принадлежащий $C^{r-1}(\mathcal{T}_{m-p} \times R^p)$.

Сгладим матричную функцию $C(\varphi) = \{C^{ij}(\varphi)\}$ оператором

$$S_\mu = \frac{1}{\mu^m} \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_1+\mu} \ldots \int\limits_{\varphi_m}^{\varphi_m+\mu} \cdot\, d\varphi,$$

где $\mu$ — достаточно малое положительное число. Функция

$$C_\mu(\varphi) = S_\mu C(\varphi) = \left\{C_\mu^{ij}(\varphi)\right\}$$

принадлежит пространству $C^{r+1}(\mathcal{T}_m)$ и удовлетворяет условию

$$\sum_{j=1}^{m+1} \sum_{i=1}^{p} \left| C_\mu^{ij}(\varphi) - C^{ij}(\varphi) \right| \le K\mu \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{T}_m, \tag{1.43}$$

где $K$ определяется лишь постоянной Липшица матрицы $C(\varphi)$.

Обозначим матрицу (1.40) через $\Phi(\varphi; C)$. Тогда $\Phi(\varphi; C_\mu)$ принадлежит пространству $C^r(\mathcal{T}_{m-p} \times R^p)$. Положим

$$h_\mu(\varphi) = \Phi_1(\varphi, C_\mu) = \Phi(\varphi, C_\mu)[E_1, 0]^*, \tag{1.44}$$

$$h(\varphi, \mu) = P_1(\varphi) h_\mu(\varphi). \tag{1.45}$$

Матрица $h(\varphi, \mu)$ принадлежит пространству $C^r(\mathcal{T}_{m-p} \times R^p)$ и удовлетворяет уравнению (1.22). Покажем, что

$$\operatorname{rank} h(\varphi, \mu) = m - p + 1 \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{T}_{m-p} \times R^p. \tag{1.46}$$

Введем обозначения

$$P_\mu(\varphi) = C_\mu^*(\varphi) C_\mu(\varphi), \quad R_\mu(\varphi) = P_\mu(\varphi) - P(\varphi). \tag{1.47}$$

Тогда

$$h(\varphi, \mu) = P_1(\varphi) h_\mu(\varphi) = \left(E - P_\mu(\varphi) + R_\mu(\varphi)\right) h_\mu(\varphi) =$$
$$= h_\mu(\varphi) + R_\mu(\varphi) h_\mu(\varphi), \quad R_\mu^*(\varphi) = R_\mu(\varphi).$$

Следовательно, матрица $h^*(\varphi, \mu) h(\varphi, \mu)$ имеет вид

$$h^*(\varphi, \mu) h(\varphi, \mu) = E_1 + 2 h_\mu^*(\varphi) R_\mu(\varphi) h_\mu(\varphi) + h_\mu^*(\varphi) R_\mu^2(\varphi) h_\mu(\varphi)$$

и согласно (1.43) и свойству ортонормированности матрицы $h_\mu(\varphi)$ удовлетворяет неравенству

$$\| h^*(\varphi) h(\varphi) - E_1 \| \le \| R_\mu(\varphi) \| (2 + \| R_\mu \|) \le 4K(1 + K\mu)\mu, \tag{1.48}$$

где $\|\cdot\|$ — спектральная норма матрицы, согласованная с евклидовой нормой вектора [20].

При $4K(1 + K\mu)\mu \le \rho < 1$ из (1.48) следует, что спектральный радиус $\rho(A)$ матрицы

$$A(\varphi) = 2 h_\mu^*(\varphi) R_\mu(\varphi) h_\mu(\varphi) + h_\mu^*(\varphi) R_\mu^2(\varphi) h_\mu(\varphi)$$

удовлетворяет неравенству

$$\rho(A) \le \rho < 1. \tag{1.49}$$

Этого достаточно, чтобы матрица $h^*(\varphi, \mu) h(\varphi, \mu)$ имела обратную

$$[h^*(\varphi, \mu)h(\varphi, \mu)]^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu A^\nu(\varphi). \tag{1.50}$$

Из (1.50) следует соотношение (1.46).

Таким образом, матрица (1.45) определяет полную систему из $(m-p+1)$ линейно независимых решений уравнения (1.22), принадлежащих пространству $C^r(\mathcal{T}_{m-p} \times R^p)$. Свойства этих решений определяются свойствами матриц $P_1(\varphi)$ и $\Phi_1(\varphi, C_\mu(\varphi))$.

Процесс ортонормирования системы векторов $h(\varphi)$ приводит к ортонормированной системе векторов $h_0(\varphi)$

$$h_0^*(\varphi)\, h_0(\varphi) = E_1 \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{T}_{m-p} \times R^p, \tag{1.51}$$

которая образует вместе с $C^*(\varphi)$ ортонормированный базис $[C^*(\varphi), h_0(\varphi)]$ в $R^{m+1}$. Матрицу, удовлетворяющую равенству (1.51), будем называть ортонормированной. Покажем, что процесс ортонормирования $h(\varphi)$ не изменяет свойств матрицы $h(\varphi)$. Поскольку при ортонормировании матрицы $h(\varphi)$ и $h_0(\varphi)$ связаны соотношением

$$h(\varphi) = h_0(\varphi)T(\varphi), \tag{1.52}$$

где $T(\varphi)$ — верхнетреугольная матрица, то согласно (1.45)

$$P_1(\varphi)h_\mu(\varphi) = h_0(\varphi)T(\varphi), \quad h_0(\varphi) = P_1(\varphi)h_\mu(\varphi)T^{-1}(\varphi).$$

Следовательно, чтобы найти $h_0(\varphi)$, достаточно найти верхнетреугольную невырожденную матрицу $T(\varphi)$ из условия (1.51):

$$(T^*(\varphi))^{-1}\, h_\mu^*(\varphi)P_1(\varphi)h_\mu(\varphi)T^{-1}(\varphi) = E_1$$

или эквивалентного ему условия

$$E_1 + h_\mu^*(\varphi)R_\mu(\varphi)h_\mu(\varphi) = T^*(\varphi)T(\varphi). \tag{1.53}$$

Задача нахождения $T(\varphi)$ сведена к задаче разложения симметрической матрицы $E_1 + h_\mu^*(\varphi)R_\mu(\varphi)h_\mu(\varphi)$ в произведение нижнетреугольной $B = T^*$ и верхнетреугольной $B^* = T$ матриц. Согласно [21], элементы $b_{ik} = b_{ik}(\varphi)$ матрицы $B = B(\varphi)$, обеспечивающей представление (1.53), определяются по формулам

$$b_1^2 = D_1, \quad b_2^2 = D_2 / D_1, \ldots, b_{m-p+1}^2 = D_{m-p+1} / D_{m-p}$$

для диагональных элементов и

$$b_{ik} = \frac{1}{\sqrt{D_k D_{k-1}}} A_{ik}, \quad (i = \overline{k, m-p+1}, k = \overline{1, m-p+1})$$

для элементов ниже главной диагонали. Здесь $D_\nu$ — главные миноры матрицы $E_1 + h_\mu^* R_\mu h_\mu$, $A_{ik}$ — миноры этой матрицы вида $\begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots k-1 & i \\ 1 & 2 \ldots k-1 & k \end{pmatrix}$.

Из приведенных формул и неравенства

$$\| h_\mu^*(\varphi)R_\mu(\varphi)h_\mu(\varphi) \| \leq 2K\mu \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{T}_{m-p} \times R^p$$

следуют оценки для элементов матрицы $B(\varphi) = T^*(\varphi)$ вида

$$D_\nu(\varphi) \geq 1 - K_1\mu, \quad |b_{ik}(\varphi)| \leq K_1\mu$$

для всех $\varphi \in \mathcal{T}_{m-p} \times R^p$ и некоторого $K_1 = \text{const}$.

Поэтому в процессе ортонормирования из матрицы $h(\varphi)$ получаем матрицу

$$h_0(\varphi) = P_1(\varphi)h_\mu(\varphi)T^{-1}(\varphi), \tag{1.54}$$

свойства которой определяются свойствами матриц $P_1(\varphi)$, $h_\mu(\varphi)$ и $R_\mu(\varphi)$.

Будем говорить, что матрица $h = h(\varphi, \mu)$, определенная для $\varphi \in R^m$, является ортонормированной с точностью до $\mu$ матрицей, когда для произвольного $\mu \in (0, \mu_0]$, $\mu << 1$, и некоторого $K_1 = \text{const} \geq 0$ найдется ортонормированная матрица $h_\mu(\varphi)$ и квадратная $R_\mu(\varphi)$, удовлетворяющая условию

$$\| R_\mu(\varphi) \| \leq K_1\mu \quad \forall\, \varphi \in R^m, \tag{1.55}$$

такие, что

$$h(\varphi, \mu) = h_\mu(\varphi) + R_\mu(\varphi)h_\mu(\varphi) \quad \forall\, \varphi \in R^m. \tag{1.56}$$

Из изложенного выше следует, что ортонормированная с точностью до $\mu$ матрица $h(\varphi, \mu)$ допускает ортонормирование для всех $\varphi \in R^m$, в процессе которого образовывается ортонормированная матрица

$$h_0(\varphi, \mu) = [E + R_\mu(\varphi)]h_\mu(\varphi)[E_1 + T_\mu(\varphi)], \tag{1.57}$$

где $T_\mu(\varphi)$ — нижнетреугольная матрица, удовлетворяющая условию

$$\| T_\mu(\varphi) \| \leq K_2\mu \quad \forall\, \varphi \in R^m, \tag{1.58}$$

с некоторым $K_2 = K_2(K_1) = \text{const}$.

Проведенное выше исследование решений уравнения (1.22) доказывает следующую теорему.

**Теорема 1.** *Пусть $p \times (m+1)$-мерная матрица $C(\varphi)$ ранга $p$ принадлежит $C^r(\mathcal{T}_m)$ при $1 \leq p < m$, $r \geq 1$ и приведена к виду* (1.24). *Тогда уравнение* (1.22) *имеет ортонормированную матрицу решений*

$$h(\varphi) = \Phi_1(\varphi, C), \tag{1.59}$$

*принадлежащую пространству $C^{r-1}(\mathcal{T}_{m-p} \times R^p)$, и ортонормированную с точностью до $\mu$ матрицу решений*

$$h(\varphi, \mu) = P_1(\varphi)h_\mu(\varphi), \tag{1.60}$$

*принадлежащую пространству $C^r(\mathcal{T}_{m-p} \times R^p)$, где*

$$\Phi_1(\varphi, C) = \Phi(\varphi, C)[E_1, 0]^*, \quad h_\mu(\varphi) = \Phi_1(\varphi, C_\mu),$$

$\Phi(\varphi, C)$ — *матрица* (1.40), $P_1(\varphi) = C^*(\varphi)C(\varphi)$, $C_\mu(\varphi) = S_\mu C(\varphi)$, $S_\mu$ — *оператор сглаживания.*

Согласно теореме 1 замена переменных

$$h = [h(\varphi), C^*(\varphi)]g, \tag{1.61}$$

где $h(\varphi)$ — функция (1.59) ((1.60)), преобразовывает рассматриваемое уравнение (1.22) к виду

$$[0, E_p]g = 0 \quad \forall\, \varphi \in R^m. \tag{1.62}$$

Так как множество (1.62) является локально инвариантным для системы дифференциальных уравнений (1.21), записанной в переменных $\varphi$, $g$, то сужение этой системы дифференциальных уравнений на (1.62) получается из (1.21) заменой (1.61) при условии (1.62). Иначе говоря, такое сужение системы дифференциальных уравнений получается из (1.21) заменой $h = (h_1, \ldots, h_{m+1})$ на $h^{(1)} = (h_1^{(1)}, \ldots, h_{m-p+1}^{(1)}) = (h_1^{(1)}, \ldots, h_{n-m}^{(1)})$ по формуле

$$h = h(\varphi)h^{(1)}. \tag{1.63}$$

Это приводит к системе дифференциальных уравнений относительно $h^{(1)} \in R^{n-m}$ вида (1.21), эквивалентной системе уравнений (1.21), (1.22). Подстановка (1.63) в (1.20) превращает первое из равенств (1.20) в замену переменных $x \to (\varphi, \ldots, h^{(1)})$ вида

$$x = f(\varphi) + B(\varphi)h(\varphi)h^{(1)}, \tag{1.64}$$

а второе из этих соотношений — в тождество.

Таким образом, формула (1.64) вводит систему локальных координат $\varphi$, $h^{(1)}$ в окрестности локального многообразия $M$, позволяя записать систему дифференциальных уравнений (1.1) в окрестности $M$ в виде системы дифференциальных уравнений относительно $\varphi$, $h^{(1)}$, совпадающей с системой (1.21), записанной в переменных $\varphi$, $h^{(1)}$, которые вводятся равенством (1.63).

Проанализируем свойства функции

$$h(\varphi) = \Phi_1(\varphi, C), \tag{1.65}$$

считая $C \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{T}_m)$. Эти свойства определяются свойствами матрицантов

$$\Omega_0^{\varphi_\nu}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{\nu-1}), \quad \nu = \overline{m-p+1, m} \tag{1.66}$$

кососимметрических матриц $K_\nu = K(\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu)$ из $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{T}_m)$.

Дифференцируя (1.66), находим

$$\frac{\partial \Omega_0^{\varphi_\nu}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{\nu-1})}{\partial \varphi_j} = \int_0^{\varphi_\nu} \Omega_s^{\varphi_\nu}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{\nu-1}) \frac{\partial K_\nu(\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu)}{\partial \varphi_j} \times$$

$$\times\, \Omega_0^s(\varphi_1, \ldots, \varphi_{\nu-1})ds = \Omega_0^{\varphi_\nu}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{\nu-1}) \int_0^{\varphi_\nu} \left(\Omega_0^{\varphi_\nu}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{\nu-1})\right)^* \times$$

$$\times \frac{\partial K_\nu(\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu)}{\partial \varphi_j} \Omega_0^{\varphi_\nu}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{\nu-1}) d\varphi_\nu \quad \forall j = \overline{1, \nu-1},$$

поэтому

$$\left\| \frac{\partial \Omega_0^{\varphi_\nu}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{\nu-1})}{\partial \varphi_j} \right\| \le \left\| \frac{\partial K_\nu(\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu)}{\partial \varphi_j} \right\|_0 |\varphi_\nu| \quad \forall j = \overline{1, \nu-1},$$

где обозначено $\|\cdot\|_0 = \max\limits_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \|\cdot\|$, $\varphi \in R^m$.

Отсюда следует

$$\left\| \frac{\partial \Phi(\varphi)}{\partial \varphi_j} \right\| \le K_3 \sum_{\nu = m-p+1}^{m} |\varphi_\nu| \quad \forall j = \overline{1, m-1}, \quad \varphi \in R^m, \tag{1.67}$$

где $K_3 = \text{const}$. Последнее неравенство доказывает возможность роста производных матрицы $\Phi(\varphi)$ по переменным $\varphi_j$ $\forall j = \overline{1, m-1}$ при $|\theta| \to \infty$ не быстрее, чем рост функции $|\theta| = \sum_{\nu=m-p+1}^{m} |\varphi_\nu|$ при $|\theta| \to \infty$.

Рассматривая матрицу $K_\nu = K_\nu(\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu)$ в каноническом виде

$$K_\nu = \operatorname{diag}\{H_2\Phi_1, \ldots, H_2\Phi_q, 0\}, \tag{1.68}$$

где $\Phi_i \in C^\infty(\mathcal{T}_\nu)$, $i = \overline{1, q}$, $q \le [(m+1)/2]$, $H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ — двумерная матрица, $[(m+1)/2]$ — целая часть числа $(m+1)/2$, получаем для $\Omega_0^{\varphi_\nu}(\varphi_1, \ldots$ $\ldots, \varphi_{\nu-1})$ выражение

$$\Omega_0^{\varphi_\nu}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{\nu-1}) = \operatorname{diag}\left\{ \exp\left( H_2 \int_0^{\varphi_\nu} \Phi_1(\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu) d\varphi_\nu \right), \ldots \right.$$

$$\left. \ldots, \exp\left( H_2 \int_0^{\varphi_\nu} \Phi_q(\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu) d\varphi_\nu \right), E \right\}, \tag{1.69}$$

где $E$ — единичная матрица размера нулевой матрицы в (1.68).

Поскольку

$$\int_0^{\varphi_\nu} \Phi_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu) d\varphi_\nu = \overline{\Phi}_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_{\nu-1})\varphi_\nu + \Phi_i^{(1)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu),$$

где $\overline{\Phi}_i$ — среднее функции $\Phi_i$ по $\varphi_\nu$, $\Phi_i^{(1)} \in C^\infty(\mathcal{T}_\nu)$, то диагональные блоки матрицы (1.69) имеют вид

$$\exp\left( H_2 \int_0^{\varphi_\nu} \Phi_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu) d\varphi_\nu \right) = \exp(H_2[\overline{\Phi}_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_{\nu-1})\varphi_\nu +$$

$$+ \Phi_i^{(1)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu)]) = \begin{pmatrix} \cos\psi_i & \sin\psi_i \\ -\sin\psi_i & \cos\psi_i \end{pmatrix},$$

$$\psi_i = \overline{\Phi}_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_{\nu-1})\varphi_\nu + \Phi_i^{(1)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu).$$

Отсюда производная по $\varphi_j$ от диагонального блока имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial\varphi_j} \exp\left( H_2 \int_0^{\varphi_\nu} \Phi_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu) d\varphi_\nu \right) = \begin{pmatrix} -\sin\psi_i & \cos\psi_i \\ -\cos\psi_i & \sin\psi_i \end{pmatrix} \times$$

$$\times \left( \frac{\partial\overline{\Phi}_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})}{\partial\varphi_j} \varphi_\nu + \frac{\partial\Phi_i^{(1)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu)}{\partial\varphi_j} \right) \quad \forall j = \overline{1, \nu - 1},$$

следовательно, эта производная имеет линейный рост по $\varphi$ при $|\varphi_\nu| \to \infty$, когда $\partial\overline{\Phi}_i / \partial\varphi_j \ne 0$. Нетрудно установить, что производная $D^\rho$ порядка $\rho$ по переменным $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\nu-1}$ может иметь рост при $|\theta| \to \infty$ порядка $|\theta|^{\rho-1}$, если $D^\rho$ содержит дифференцирование по $\varphi_\nu$. Отсюда следует возможность такого же самого роста производных функции $\Phi_1(\varphi, C)$ при $|\theta| \to \infty$.

Таким образом, те дифференциальные уравнения (1.1), записанные в локальных координатах $\varphi$, $h^{(1)}$, которые линейно зависят от производных $\partial\Phi_1 / \partial\varphi_j$, $j = \overline{1, m}$, могут иметь линейный рост по $\varphi_{m-p+1}, \ldots, \varphi_m$ при $\sum_{\nu=m-p+1}^{m} |\varphi_\nu| \to \infty$.

Последнее обстоятельство выделяет отдельно теорию возмущения инвариантных торов системы (1.1) в размерностях, удовлетворяющих условию (1.13). В частности, в простейшем случае, когда все $K_\nu$ имеют вид (1.68) и все значения

$$\overline{\Phi}_i(\varphi_1, \dots, \varphi_{\nu-1}) = \text{const} = \gamma_i \neq 0,$$

правая часть системы уравнений (1.1), записанная в локальных координатах $\varphi$, $h^{(1)}$, либо периодическая по $\varphi$ с периодом $2\pi p$ с целым $p \geq 1$, когда все числа $\gamma_i$ являются рациональными, либо квазипериодическая по $\varphi$, когда среди $\gamma_i$ есть иррациональные. Естественно, что для возмущенной системы уравнений в окрестности $M$ могут появиться в этом случае инвариантные торы $p$-кратного периода, задаваемые функциями, имеющими период $2\pi p$ по $\varphi_\nu$, $\nu = \overline{1, m}$, или инвариантные „квазипериодические" многообразия, задаваемые квазипериодическими функциями по $\varphi_\nu$, $\nu = \overline{1, m}$. Последние в замыкании могут образовывать инвариантные торы размерности большей, чем $m$.

В частном случае, когда функции $C(\psi, \theta_1, \dots, \theta_\nu, 0)$ для каждого $\nu = 1, \dots, p$ являются четными по $\theta_\nu$, следовательно, когда

$$C(\psi, \theta_1, \dots, -\theta_\nu, 0) = C(\psi, \theta_1, \dots, \theta_\nu, 0) \quad \forall\, \nu = \overline{1, p}, \tag{1.70}$$

матрица $\Phi_1(\psi, \theta, C)$ имеет период $4\pi$ по $\theta_\nu$ $\forall\, \nu = \overline{1, p}$. Действительно, при выполнении (1.70) каждая из матриц $K_\nu = K_\nu(\psi, \theta_1, \dots, \theta_\nu)$ является нечетной по $\theta_\nu$:

$$K_\nu(\psi, \theta_1, \dots, -\theta_\nu) = -K_\nu(\psi, \theta_1, \dots, \theta_\nu) \quad \forall\, \nu = \overline{1, p}, \tag{1.71}$$

а ее матрицант $\Omega_0^{\theta_\nu}(K_\nu)$ — четная функция по $\theta_\nu$:

$$\Omega_0^{\theta_\nu}(K_\nu) = \Omega_0^{-\theta_\nu}(K_\nu) \quad \forall\, \nu = \overline{1, p}. \tag{1.72}$$

Равенство (1.71) очевидным образом следует из (1.70) и (1.34), а (1.72) — из тождества

$$\frac{d}{d\theta_\nu}\Omega_0^{-\theta_\nu}(K_\nu) = -\frac{\partial \Omega_0^{-\theta_\nu}(K_\nu)}{\partial(-\theta)_\nu} =$$

$$= -K_\nu(\psi, \theta_1, \dots, -\theta_\nu)\Omega_0^{-\theta_\nu}(K_\nu) = K_\nu \Omega_0^{-\theta_\nu}(K_\nu).$$

Так как матрица $K_\nu$ является периодической по $\theta_\nu$ с периодом $2\pi$, то по теореме Флоке – Ляпунова

$$\Omega_0^{\theta_\nu}(K_\nu) = \Phi(\theta_\nu)\exp(A\theta_\nu), \tag{1.73}$$

где $\Phi$ — периодическая по $\theta_\nu$ с периодом $2\pi$ матрица, $A$ — матрица, не зависящая от $\theta_\nu$. Из представления (1.73) с учетом (1.72) следует

$$\Omega_0^{4\pi}(K_\nu) = \Omega_0^{2\pi}(K_\nu)\Omega_0^{2\pi}(K_\nu) = \Omega_0^{2\pi}(K_\nu)\Omega_0^{-2\pi}(K_\nu) =$$

$$= \Phi(0)\exp(A2\pi)\,\Phi(0)\exp(-A2\pi) = \exp(2\pi A)\exp(-2\pi A) = E =$$

$$= \Phi(0)\exp(4\pi A) = \exp(4\pi A) \quad \forall\, \nu = \overline{1, p}.$$

Равенство (1.73) доказывает, что

$$\Omega_0^{\theta_\nu + 4\pi}(K_\nu) = \Phi(\theta_\nu)\exp(A\theta_\nu + 4\pi A) =$$

$$= \Phi(\theta_\nu)\exp(A\theta_\nu) = \Omega_0^{\theta_\nu}(K_\nu) \quad \forall\, \nu = \overline{1, p}. \tag{1.74}$$

Из вида (1.40) матрицы $\Phi(\varphi)$ и (1.74) следует периодичность $\Phi(\varphi)$ по $\theta_\nu$ с периодом $4\pi$ $\forall\, \nu = \overline{1, p}$.

В этом случае система уравнений (1.1) в окрестности $M$ записывается в локальных координатах как система дифференциальных уравнений с $2\pi$-периодической по $\varphi_\nu$ $\forall\, \nu = \overline{1, m-p}$ и $4\pi$-периодической по $\varphi_\nu$ $\forall\, \nu = \overline{1, m-p+1}$ правой частью.

Обозначим через $C^r(\mathcal{T}'_m)$ пространство функций, $r$ раз непрерывно дифференцируемых по $\varphi_\nu$ $\forall\, \nu = \overline{1, m}$, $2\pi$-периодических по $\varphi_\nu$ $\forall\, \nu = \overline{1, m}$, $\nu \neq$ $\neq m-p+1$ и $4\pi$-периодических по $\varphi_{m-p+1}$. Положим

$$C_1(\psi, \theta_1) = \frac{C(\psi, \theta_1, 0) + C(\psi, -\theta_1, 0)}{2}. \tag{1.75}$$

Тогда рассуждения о решениях уравнения (1.22) для матрицы $C = C(\psi, 0)$ и матрицы $C = C_1(\psi, \theta_1) = C_1(\psi, -\theta_1)$ можно применить для доказательства следующего утверждения.

**Теорема 2.** *Пусть $p \times (m+1)$-мерная матрица $C = C(\varphi)$ ранга $p$ приведена к виду* (1.24) *и удовлетворяет условиям $C \in C^r(\mathcal{T}_m)$ при $r \geq 1$, $m >$ $> p \geq 1$. Тогда, если выполняется одно из неравенств*

$$\max_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \| C(\varphi, \theta) - C(\varphi, 0) \| = \rho < 1, \tag{1.76}$$

$$\max_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \| C(\varphi, \theta_1) - C_1(\varphi, \theta_1) \| = \rho < 1, \tag{1.77}$$

*то уравнение* (1.22) *имеет ортонормированную матрицу решений $h(\varphi)$, принадлежащую $C^r(\mathcal{T}_m)$ при выполнении условия* (1.76) *и принадлежащую $C^r(\mathcal{T}'_m)$ при выполнении условия* (1.77).

Действительно, из изложенного выше следует существование ортонормированных матриц $[C^*(\psi, 0), h(\psi)]$ и $[C_1^*(\psi, \theta_1), \Phi_1(\psi, \theta_1, C_1)]$, принадлежащих соответственно пространству $C^r(\mathcal{T}_m)$ и $C^{r-1}(\mathcal{T}'_m)$. Так как

$$\begin{pmatrix} C(\psi, \theta) \\ h^*(\psi) \end{pmatrix} [C^*(\psi, 0), h(\psi)] = \begin{pmatrix} C(\psi, \theta) C^*(\psi, \theta) & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix},$$

то

$$\det \left[ \begin{pmatrix} C(\psi, \theta) \\ h^*(\psi) \end{pmatrix} [C^*(\psi, 0), h(\psi)] \right] = \det [C(\psi, \theta) C^*(\psi, \theta)].$$

Имеем далее

$$\begin{aligned} C(\psi, \theta) C^*(\psi, 0) &= C(\psi, \theta)[C^*(\psi, \theta) - (C^*(\psi, \theta) - C^*(\psi, 0))] = \\ &= E_p - C(\psi, \theta)[C^*(\psi, \theta) - C^*(\psi, 0)] = E_p - A(\psi, \theta), \end{aligned} \tag{1.78}$$

где в силу (1.76) и ортонормированности матрицы $C(\varphi)$ верна оценка

$$\begin{aligned} \| A(\psi, \theta) \| &\leq \| C(\varphi) \| \, \| C^*(\psi, \theta) - C^*(\psi, 0) \| \leq \\ &\leq \| C^*(\psi, \theta) - C^*(\psi, 0) \| = \| C(\psi, \theta) - C(\psi, 0) \| \leq \rho < 1. \end{aligned} \tag{1.79}$$

Оценка (1.78) доказывает, что спектральный радиус $\rho(A)$ матрицы $A$ меньше 1 для всех $\varphi \in \mathcal{T}_m$. Отсюда следует невырожденность матрицы $[C^*(\psi, \theta), h(\psi)]$. Ортонормируя эту матрицу, получаем ортонормированную матрицу решений $h(\varphi)$ уравнения (1.22), принадлежащую пространству $C^r(\mathcal{T}_m)$.

Для матрицы $[C^*(\psi, \theta), \Phi_1(\psi, \theta_1, C_\cdot)]$ верно аналогичное (1.78) представление и аналогичная (1.79) оценка, из чего следует невырожденность матрицы $[C^*(\psi, \theta), \Phi_1(\psi, \theta_1, C_1)]$ для всех $\varphi \in \mathcal{T}'_m$. Но тогда при достаточно малом

$\mu > 0$ невырожденной для всех $\varphi \in \mathcal{T}'_m$ является матрица $[C^*(\psi, \theta), \Phi_1(\psi, \theta_1, S_\mu C_1)]$, где $S_\mu$ — оператор сглаживания. Ортонормируя эту матрицу, получаем ортогональную матрицу $[C^*(\psi, \theta), h(\psi, \theta)]$ из пространства $C^r(\mathcal{T}'_m)$, следовательно, ортонормированную матрицу решений $h(\varphi)$ уравнения (1.22), принадлежащую пространству $C^r(\mathcal{T}'_m)$.

Завершая рассмотрение системы (1.21), (1.22), отметим особенность двумерного инвариантного тора системы (1.1) при $n = 4$, $m = 2$ в случае, когда матрица $C(\varphi)$ не является дополняемой до непрерывного $2\pi$-периодического базиса в $R^3$, а именно что этот тор необходимо пересекает плоскость

$$h = 0. \tag{1.80}$$

Действительно, если это не так,то определяющая этот тор функция из $C(\mathcal{T}_2)$ и функция $C(\varphi)$ линейно независимы; этого достаточно для дополняемости матрицы $C(\varphi)$ до $2\pi$-периодического базиса в $R^3$. Таким образом, в рассматриваемом случае системы (1.1) при $n = 4$, $m = 2$ любой двумерный тор возмущенной системы необходимо пересекается с тором $M$ невозмущенной системы уравнений (1.1).

**2. Вариации решений на многообразии $M$.** Рассмотрим систему уравнений (1.1) при $\varepsilon = 0$ в предположениях, введенных в предыдущем пункте.

Пусть окрестность $M$ допускает расслоение (1.4), так что замена переменных (1.6) приводит систему уравнений (1.1) в окрестности $M$ к системе уравнений (1.7) в $\mathcal{T}_m \times R^{n-m}$. Согласно формулам (1.8) правая часть (1.7) принадлежит пространству функций $C^r(\mathcal{T}_m \times K_\delta)$, где

$$K_\delta = \{ h \in R^{n-m} : \|h\| \le \delta \}, \tag{2.1}$$

$\delta$ — достаточно малое положительное число.

Принадлежность функции пространству $C^{r-1}(\mathcal{T}_m \times K_\delta)$ означает ее $2\pi$-периодичность по $\varphi_\nu$ $\forall \nu = \overline{1, m}$ и существование непрерывных производных этой функции до порядка $(r-1)$ включительно в области $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $\|h\| \le \delta_1$, где $\delta_1 - \delta > 0$ — достаточно малое число. Из этого следует ограниченность производных функций пространства $C^{r-1}(\mathcal{T}_m \times K_\delta)$ до порядка $(r-1)$ включительно.

Как и раньше, через $x(t, N)$ будем обозначать решения уравнения (1.1) при $\varepsilon = 0$, начальные значения которых принадлежат множеству $N, N \in R^n$, через $\Omega_0^t(A)$ — матрициант матрицы $A$.

Для систем уравнений (1.1) и (1.7) при $\varepsilon = 0$ запишем уравнения в вариациях вдоль решений

$$x = x(t, f(\varphi)) = f(\varphi_t), \tag{2.2}$$

$$\varphi = \varphi_t = \varphi_t(\varphi), \quad h = h_t = 0, \tag{2.3}$$

где $\varphi_t(\varphi)$ — решение уравнения (1.11), принимающее при $t = 0$ значение $\varphi_0(\varphi) = \varphi$.

Для решений (2.2) имеем

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial X(f(\varphi_t))}{\partial x} z; \tag{2.4}$$

для (2.3) с учетом формул (1.8)

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\partial a(\varphi_t)}{\partial \varphi}\vartheta + Q(\varphi_t)g, \quad \frac{dg}{dt} = P(\varphi_t)g, \tag{2.5}$$

где

$$Q(\varphi) = L_1(\varphi)\left[\frac{\partial X(f(\varphi))}{\partial x}B(\varphi) - \frac{\partial B(\varphi)}{\partial \varphi}a(\varphi)\right],$$

$$P(\varphi) = P(\varphi, 0), \quad L_1(\varphi) = L_1(\varphi, 0),$$

$a(\varphi)$, $L_1(\varphi, h)$, $P_1(\varphi, h)$ — функции (1.8), (1.9).

Так как уравнения (1.1) и (1.7) при $\varepsilon = 0$ связаны формулой замены переменных (1.6), то их вариации вдоль решений (2.2), (2.3) связаны формулой замены

$$z = \delta x = \left[\frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial B(\varphi)h}{\partial \varphi}\right]\Bigg|_{\substack{\varphi=\varphi_t \\ h=0}}\delta\varphi + [B(\varphi)]\Big|_{\substack{\varphi=\varphi_t \\ h=0}}\delta h =$$

$$= \frac{\partial f(\varphi_t)}{\partial \varphi}\vartheta + B(\varphi_t)g = [F(\varphi_t), B(\varphi_t)]\begin{pmatrix}\vartheta \\ g\end{pmatrix}.$$

Поэтому матриканты систем (2.4), (2.5) связаны равенством

$$\Omega_0^t\left(\frac{\partial X(f)}{\partial x}\right)[F(\varphi), B(\varphi)] = [F(\varphi_t), B(\varphi_t)]\begin{pmatrix}\Omega_0^t\left(\frac{\partial a}{\partial \varphi}\right) & R_t \\ 0 & \Omega_0^t(P)\end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

$$R_t = \int_0^t \Omega_s^t\left(\frac{\partial a}{\partial \varphi}\right)Q(\varphi_s)\Omega_0^s(P)\,ds.$$

Из (2.6) следует

$$\Omega_0^t\left(\frac{\partial X(f)}{\partial x}\right)F(\varphi) = F(\varphi_t)\,\Omega_0^t\left(\frac{\partial a}{\partial \varphi}\right), \tag{2.7}$$

$$\Omega_0^t\left(\frac{\partial X(f)}{\partial x}\right)B(\varphi) = F(\varphi_t)R_t + B(\varphi_t)\,\Omega_0^t(P). \tag{2.8}$$

Согласно (2.7), (2.8) определяющую роль в поведении решений систем уравнений в вариациях (2.4) и (2.5) играют матриканты $\Omega_0^t(\partial a/\partial\varphi)$ и $\Omega_0^t(P)$. Первый из них не зависит от $B$. Выясним зависимость матриканта $\Omega_0^t(P)$ от $B$.

Условимся говорить о $C^l(\mathcal{T}_m)$-эквивалентности матрицантов $\Omega_0^t(P)$ и $\Omega_0^t(P_1)$ матриц $P = P(\varphi)$ и $P_1 = P_1(\varphi)$ из пространства $C^l(\mathcal{T}_m)$ всякий раз, когда найдется невырожденная матрица $\Phi = \Phi(\varphi)$ из $C^l(\mathcal{T}_m)$ такая, что

$$\Omega_0^t(P) = \Phi(\varphi_t)\,\Omega_0^t(P_1)\Phi^{-1}(\varphi). \tag{2.9}$$

Зависимость $\Omega_0^t(P)$ от матрицы $B$ выясняет следующая теорема.

**Теорема 3.** *При введении локальных координат с помощью матриц $B = B(\varphi)$ и $B_1 = B_1(\varphi)$ из пространства $C^r(\mathcal{T}_m)$ матриканты $\Omega_0^t(P)$ и $\Omega_0^t(P_1)$ соответствующих матриц $P = P(\varphi)$ и $P_1 = P_1(\varphi)$ $C^{r-1}(\mathcal{T}_m)$-эквивалентны.*

Действительно, так как матрицы $[F, B]$ и $[F, B_1]$ невырожденные, то

$$[F, B] = [F, B_1]C, \tag{2.10}$$

где $C$ — невырожденная матрица.

Найдем эту матрицу. Пусть $\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}$ — обратная к $[F, B]$ матрица, следовательно, такая матрица, что

$$L_1 F = E_1, \quad L_1 B = O_1, \quad L_2 F = O_2, \quad L_2 F = E_2. \tag{2.11}$$

Здесь $E_1$, $E_2$, $O_1$, $O_2$ — единичные и нулевые матрицы соответствующих размеров. Тогда из (2.10) следует

$$\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & L_1 B_1 \\ 0 & L_2 B_1 \end{pmatrix} C, \tag{2.12}$$

значит, матрица $L_2 B_1$ является невырожденной. Для справедливости (2.12) достаточно положить $C$ равным матрице

$$C = \begin{pmatrix} E_1 & -L_1 B_1 (L_2 B_1)^{-1} \\ 0 & (L_2 B_1)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & C_{12} \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

где $C_2$ — невырожденная матрица.

Из равенств (2.10) и (2.13) следует соотношение, связывающее матрицы $B$ и $B_1$:

$$B = F C_{12} + B_1 C_2. \tag{2.14}$$

Равенства (2.7), (2.8) приводят к соотношению

$$F(\varphi_t) R_t + B(\varphi_t)\, \Omega_0^t(P) = \Omega_0^t\left(\frac{\partial X(f)}{\partial x}\right)[F(\varphi) C_{12}(\varphi) + B_1(\varphi) C_2(\varphi)] =$$

$$= F(\varphi_t)\, \Omega_0^t\left(\frac{\partial a}{\partial \varphi}\right) C_{12}(\varphi) + F(\varphi_t)\, R_t^1 C_2(\varphi) + B_1(\varphi_t)\, \Omega_0^t(P_1)\, C_2(\varphi),$$

умножая которое слева на $L_2(\varphi_t)$, получаем равенство

$$\Omega_0^t(P) = L_2(\varphi_t) B_1(\varphi_t)\, \Omega_0^t(P_1)\, C_2(\varphi). \tag{2.15}$$

С учетом (2.13) равенство (2.15) принимает вид

$$\Omega_0^t(P) = L_2(\varphi_t) B_1(\varphi_t)\, \Omega_0^t(P_1)\, [L_2(\varphi) B_1(\varphi)]^{-1} = C_2(\varphi_t)\, \Omega_0^t(P_1)\, C_2^{-1}(\varphi)$$

и доказывает $C^{r-1}(\mathcal{T}_m)$-эквивалентность матрицантов $\Omega_0^t(P)$ и $\Omega_0^t(P_1)$.

Матрицант $\Omega_0^t(\partial a / \partial \varphi)$ характеризует расстояние между решениями невозмущенной системы уравнений, начинающимися в близких точках $M$.

Действительно, если $\psi - \varphi = \theta$, $\|\theta\| < \delta$, то для расстояния между $x(t, f(\psi)) = f(\varphi_t(\psi))$ и $x(t, f(\varphi)) = f(\varphi_t(\varphi))$ справедлива оценка

$$\rho(x(t, f(\psi)), x(t, f(\varphi))) = \| x(t, f(\psi)) - x(t, f(\varphi)) \| =$$

$$= \| x(t, f(\varphi + \theta)) - x(t, f(\varphi)) \| \le \left\| \frac{\partial x(t, t(\varphi))}{\partial x} F(\varphi)\theta \right\| + O(\|\theta\|^2) \le$$

$$\le \left\| \Omega_0^t\left(\frac{\partial X(f)}{\partial x}\right) F(\varphi)\theta \right\| + O(\|\theta\|^2) = \left\| F(\varphi_t(\varphi))\Omega_0^t\left(\frac{\partial a}{\partial \varphi}\right)\theta \right\| + O(\|\theta\|^2) \le$$

$$\le K \left\| \Omega_0^t\left(\frac{\partial a}{\partial \varphi}\right)\theta \right\| + O(\|\theta\|^2), \quad K = \text{const}, \tag{2.16}$$

доказывающая требуемое.

В терминологии [1] матрицант уравнения

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial a(\varphi_t)}{\partial \varphi}\theta \tag{2.17}$$

характеризует устойчивость на $M$ решений невозмущенной системы уравнений. Естественно называть (2.17) уравнением в вариациях решений невозмущенной системы уравнений на $M$.

Равенство (2.7) однозначно связывает $\Omega_0^t(\partial a/\partial\varphi)$ и $\Omega_0^t(\partial X(f)/\partial x)$. Из него следует, в частности, что $F(\varphi_t)\,\Omega_0^t(\partial a/\partial\varphi)$ является решением уравнения в вариациях (2.4) и для него выполняется неравенство

$$\frac{1}{C_1}\left\|\Omega_0^t\left(\frac{\partial X(f)}{\partial x}\right)F(\varphi)\right\| \le \left\|\Omega_0^t\left(\frac{\partial a}{\partial\varphi}\right)\right\| \le C_1\left\|\Omega_0^t\left(\frac{\partial X(f)}{\partial x}\right)F(\varphi)\right\|. \tag{2.18}$$

где $C_1 = \text{const} \ge 1$.

Матрицант $\Omega_0^t(P)$ характеризует расстояние между $M$ и решениями невозмущенной системы уравнений, начинающимися вблизи $M$.

Действительно, если $y \,\overline{\in}\, M$, $\rho(M, y) < \delta_1$, то справедливо разложение

$$y = f(\varphi) + B(\varphi)g, \quad \|g\| < \delta, \tag{2.19}$$

следовательно,

$$x(t, y) = x(t, f(\varphi) + B(\varphi)g) = f(\varphi(t)) + B(\varphi(t))h(t) = f(\varphi(t)) +$$
$$+ B(\varphi(t))\delta h + O(\|g\|^2) = f(\varphi(t)) + B(\varphi(t))\,\Omega_0^t(P)g + O(\|g\|^2), \tag{2.20}$$

где $\varphi(t) = \varphi(t, \varphi, g)$, $h(t) = h(t, \varphi, g)$.

Из (2.20) выводится оценка

$$\rho(M, x(t, y)) \le \|B(\varphi(t))\|\,\|\Omega_0^t(P)\|\,\|g\| + O(\|g\|^2) \le$$
$$\le K_1\|\Omega_0^t(P)\|\,\|g\| + O(\|g\|^2), \quad K_1 = \text{const},$$

доказывающая требуемое.

Матрицант $\Omega_0^t(P)$ характеризует устойчивость многообразия $M$. Естественно называть уравнение

$$\frac{dg}{dt} = P(\varphi_t)g \tag{2.21}$$

уравнением в вариациях инвариантного многообразия $M$.

Равенство (2.8) показывает, что $B(\varphi(t))\,\Omega_0^t(P)$ при $R_t \ne 0$ не является решением уравнения в вариациях (2.4), и приводит к оценке матрицанта $\Omega_0^t(P)$ вида

$$\|\Omega_0^t(P)\| \le C_2\left\|\Omega_0^t\left(\frac{\partial X(f)}{\partial x}\right)B(\varphi)\right\|, \tag{2.22}$$

где $C_2 = \text{const} \ge 1$.

Выясним роль матрицы $R_t$ в характеристике решений невозмущенной системы уравнений, начинающихся вблизи $M$.

Для $y$, определяемого согласно (2.19), $f(\varphi)$ назовем проекцией $y$ на $M$. Поскольку

$$x(t, f(\varphi) + B(\varphi)g) = f(\varphi(t)) + B(\varphi(t))h(t), \tag{2.23}$$

то $f(\varphi(t))$ есть проекция решения $x(t, y)$ на $M$. Матрица $R_t$ характеризует расстояние между проекцией решения $x(t, y)$ на $M$ и решением $x(t, f(\varphi)) = f(\varphi_t)$ на $M$, начинающимся с проекции $y$ на $M$. Действительно, так как

$$\varphi(t) - \varphi_t = \varphi(t, \varphi, g) - \varphi(t, \varphi, 0) = \left[ \frac{\partial \varphi(t, \varphi, g)}{\partial g} \right]_{g=0} g + O(\| g \|^2) =$$

$$= \vartheta(t, 0, g) g + O(\| g \|^2) = R_t g + O(\| g \|^2),$$

где $\vartheta(t, \theta, g)$, $g(t, g)$ — решение системы (2.5), принимающее при $t = 0$ значения $\theta$, $g$, то

$$\| f(\varphi(t)) - f(\varphi_t) \| \le \| f(\varphi_t + R_t g + O(\| g \|^2)) - f(\varphi_t) \| \le$$

$$\le \| F(\varphi_t) R_t g \| + O(\| g \|^2) \le K_2 \| R_t \| \| g \| + O(\| g \|^2), \quad K_2 = \text{const},$$

что и требовалось доказать.

Матрица $R_t$ характеризует устойчивость решений, начинающихся на $M$, по величине расстояния между этими решениями и проекциями решений, начинающихся вблизи $M$.

Выбор матрицы $B$ в замене (1.6) существенно влияет на свойства матрицы $R_t$. Покажем это. Согласно (2.6) имеем

$$R_t = \Phi_t \Omega_0^t(P), \quad \Phi_t = \int_0^t \Omega_s^t \left( \frac{\partial a}{\partial \varphi} \right) Q(\varphi_s) \Omega_t^s(P) \, ds.$$

Поэтому $\Phi_t$ является решением уравнения

$$\frac{d\Phi}{dt} + \Phi P(\varphi_t) = \left( \frac{\partial a(\varphi_t)}{\partial \varphi} \right) \Phi + Q(\varphi_t). \tag{2.24}$$

При определенных условиях на $\Omega_0^t(\partial a / \partial \varphi)$ и $\Omega_0^t(P)$ уравнение (2.24) имеет решение в $C^l(\mathcal{T}_m)$:

$$\Phi = \Phi(\varphi), \quad \Phi \in C^l(\mathcal{T}_m), \quad r - 1 \ge l \ge 0. \tag{2.25}$$

В этом случае, учитывая начальное значение $R_0 = 0$, получаем для $R_t$ выражение через $\Phi(\varphi)$:

$$R_t = \Phi(\varphi_t) \Omega_0^t(P) - \Omega_0^t \left( \frac{\partial a}{\partial \varphi} \right) \Phi(\varphi). \tag{2.26}$$

Далее из (2.7), (2.8), (2.26) следует

$$\Omega_0^t \left( \frac{\partial X(f)}{\partial x} \right) B(\varphi) = F(\varphi_t) \Phi(\varphi_t) \Omega_0^t(P) - F(\varphi_t) \Omega_0^t \left( \frac{\partial a}{\partial \varphi} \right) \Phi(\varphi) +$$

$$+ B(\varphi_t) \Omega_0^t(P) = - \Omega_0^t \left( \frac{\partial X(f)}{\partial x} \right) F(\varphi) \Phi(\varphi) + [B(\varphi_t) + F(\varphi_t) \Phi(\varphi_t)] \, \Omega_0^t(P),$$

значит,

$$\Omega_0^t \left( \frac{\partial X(f)}{\partial x} \right) B_1(\varphi) = B_1(\varphi_t) \Omega_0^t(P), \tag{2.27}$$

где

$$B_1(\varphi) = F(\varphi) \Phi(\varphi) + B(\varphi). \tag{2.28}$$

Таким образом, для $B$ матрица $R_t = R_t(B)$ имеет вид (2.26), для $B_1$ матрица $R_t = R_t(B_1) \equiv 0$, что существенно отличает свойства $R_t(B)$ и $R_t(B_1)$. Очевидно, что $R_t \equiv 0$ тогда и только тогда, когда

$$Q(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{T}_m. \tag{2.29}$$

При условии разрешимости в $C^l(\mathcal{T}_m)$ уравнения (2.24) существует, следовательно, матрица $B_1 \in C^l(\mathcal{T}_m)$, для которой $Q = Q(B_1)$ удовлетворяет условию (2.29), матрица $B_1(\varphi_t)\Omega_0^t(P)$ тогда оказывается решением уравнения в вариациях (2.4) и для $\Omega_0^t(P)$ справедливо неравенствс вида (2.18)

$$\frac{1}{C_2}\left\|\Omega_0^t\left(\frac{\partial X(f)}{\partial x}\right)B_1(\varphi)\right\| \le \|\Omega_0^t(P)\| \le C_2\left\|\Omega_0^t\left(\frac{\partial X(f)}{\partial x}\right)B_1(\varphi)\right\|. \qquad (2.30)$$

Следует отметить, что разрешимость в $C^l(\mathcal{T}_m)$ уравнения (2.24) эквивалентна существованию в системе уравнений в вариациях (2.5) инвариантного многообразия

$$\vartheta = \Phi(\varphi_t)g \qquad (2.31)$$

и приведению этой системы заменой переменных

$$\vartheta = \vartheta_1 + \Phi(\varphi_t)g \qquad (2.32)$$

к блочно-диагональному виду с матрицей коэффициентов

$$\operatorname{diag}\left\{\frac{\partial a(\varphi_t)}{\partial\varphi}, P(\varphi_t)\right\}. \qquad (2.33)$$

Условия разрешимости уравнения (2.24) в $C^l(\mathcal{T}_m)$ обсуждаются в п. 6 настоящей работы. Близким вопросам посвящены результаты В. Главана [22, 23].

**3. Условия экспоненциальной устойчивости и дихотомичности линейных расширений динамических систем на торе.** В теории возмущения инвариантных торов основная роль отводится свойствам линейного оператора $L$: $C^{l+1}(\mathcal{T}_m) \to C^l(\mathcal{T}_m)$

$$L = \frac{\partial}{\partial\varphi}a(\varphi) - P(\varphi), \qquad (3.1)$$

где $(a, P)\, C^l(\mathcal{T}_m)$, $l \ge 0$. Соответствующую (3.1) систему уравнений для характеристик

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dh}{dt} = P(\varphi)h \qquad (3.2)$$

принято называть линейным расширением динамической системы на торе. В теории [7–10] предполагается, по меньшей мере, коэрцитивность оператора $SL$, где $S = S(\varphi)$ — какая-нибудь невырожденная симметрическая матрица из $C^l(\mathcal{T}_m)$: $(SLu, u) \ge \gamma\|u\|_0^2$ $\forall\, u \in C^l(\mathcal{T}_m)$, где $(u, v)$ — скалярное произведение в $\mathcal{L}^2(\mathcal{T}_m)$.

В теории [11–15] предполагается слабая регулярность оператора $L$ — существование псевдообратного к $L$ оператора в виде интегрального оператора, определяемого функцией Грина системы (3.2) (функцией Грина – Самойленко по [24]). В первом случае необходимо следует, что $\operatorname{Ker} L = \{0\}$, во втором $\operatorname{Ker} L$ может иметь ненулевую часть $\operatorname{Ker}_b L$, состоящую из функций $u$ пространства $C(\mathcal{T}_m; a)$ таких, что [12]

$$u \not\equiv 0, \quad \lim_{|t|\to\infty} u(\varphi_t) = 0 \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{T}_m.$$

Здесь $C(\mathcal{T}_m; a)$ — подпространство $C(\mathcal{T}_m)$, состоящее из функций $u$, для которых $u(\varphi_t)$ имеет непрерывную производную по $t$ такую, что

$$\frac{du(\varphi_t)}{dt} = \dot{u}(\varphi_t) \quad \forall (t, \varphi) \in R \times \mathcal{T}_m, \tag{3.3}$$

где $\dot{u} \in C(\mathcal{T}_m)$.

В совпадающей части обеих теорий от $L$ требуется экспоненциальная дихотомия системы уравнений (3.2). К обсуждению условий, обеспечивающих дихотомию, мы переходим ниже. Следует отметить, что в терминах свойств квадратичной по $h$ формы Ляпунова эти условия приведены впервые в работе автора и В. Л. Кулика [13]. Приводимые ниже условия выражаются через свойства решений системы (3.2).

Условимся считать $h$ принадлежащим $R^n$ и обозначать матрицант $\Omega_0^t(P)$ через $\Omega_0^t(\varphi)$, выделяя его зависимость от $\varphi$:

$$\Omega_0^t(P) = \Omega_0^t(\varphi). \tag{3.4}$$

Экспоненциальная дихотомия системы (3.2) понимается в смысле [12]: $\forall\, \varphi \in \mathcal{T}_m$ пространство $R^n$ представимо в виде прямой суммы подпространств $E^+ = E^+(\varphi)$ и $E^- = E^-(\varphi)$ дополнительных размерностей $n_1$ и $n - n_1 = n_2$ так, что решение $\varphi_t$, $h_t = h_t(\varphi, h) = \Omega_0^t(\varphi) h$ системы (3.2) при $h \in E^+$ удовлетворяет неравенству

$$\| h_t(\varphi, h) \| \le K \exp\{-\gamma(t-\tau)\} \| h_\tau(\varphi, h) \| \quad \forall\, t \ge \tau, \tag{3.5}$$

при $h \in E^-$ — неравенству

$$\| h_t(\varphi, h) \| \le K \exp\{\gamma(t-\tau)\} \| h_\tau(\varphi, h) \| \quad \forall\, t \le \tau \tag{3.6}$$

для произвольных $\tau \in R$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$ и положительных $K \ge 1$ и $\gamma$, не зависящих от $\varphi, h, t, \tau$.

Предельный случай экспоненциальной дихотомии, когда $n_1 = n$, называют экспоненциальной устойчивостью системы (3.2). В этом случае выполняется неравенство

$$\| \Omega_0^t(\varphi) \| \le K \exp\{-\gamma t\} \quad \forall\, t \le R^+ = [0, \infty]. \tag{3.7}$$

Рассмотрим экспоненциально устойчивую систему (3.2). В этом случае из (3.7) следует

$$\| \Omega_0^T(\varphi) \| \le d = \mathrm{const} < 1 \tag{3.8}$$

для $T \ge (1/\gamma) \ln (K/d) > 0$. Обратно, пусть для некоторых постоянных $T > 0$ и $d < 1$ выполняется неравенство (3.8). Так как при $a \in C_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m)$, $P \in C(\mathcal{T}_m)$ функции $\varphi_t$, $h_t = \Omega_0^t(\varphi) h$ образуют динамическую систему в $\mathcal{T}_m \times R^n$, то $\varphi_{t+\tau} = \varphi_t(\varphi_\tau)$, $h_t = h_t(\varphi_\tau, h_\tau)$, следовательно,

$$\Omega_0^{t+\tau}(\varphi) = \Omega_0^t(\varphi_\tau)\, \Omega_0^\tau(\varphi) \quad \forall (t, \tau, \varphi) \in R \times R \times \mathcal{T}_m. \tag{3.9}$$

Из (3.9) следует равенство

$$\Omega_0^t(\varphi) = \Omega_0^{t-[t/T]T}(\varphi_{[t/T]T})\, \Omega_0^{[t/T]T}(\varphi) = \Omega_0^{t-[t/T]T}(\varphi_{[t/T]T}) \times \\ \times \Omega_0^T(\varphi_{([t/T]-1)T}) \ldots \Omega_0^T(\varphi), \tag{3.10}$$

в котором $[t/T]$ означает целую часть числа $t/T$. Из (3.10), (3.8) следует оценка

$$\| \Omega_0^t(\varphi) \| \leq \| \Omega_0^{t-[t/T]T}(\varphi_{[t/T]T}) \| d^{[t/T]} =$$
$$= \| \Omega_0^{t-[t/T]T}(\varphi_{[t/T]T}) \| \exp\{(\ln d/T)[t/T]T\} =$$
$$= \| \Omega_0^{t-[t/T]T}(\varphi_{[t/T]T}) \exp\{(-\ln d/T)(t-[t/T]T)\} \| \exp\{(\ln d/T)t\} \leq$$
$$\leq \max \| \Omega_0^\tau(\varphi) \exp\{(-\ln d/T)\tau\} \| \exp\{-\gamma t\} = K \exp\{-\gamma t\} \quad \forall\, t \in R^+, \tag{3.11}$$

где max берется по $(\tau, \varphi) \in [0, T] \times \mathcal{T}_m$,

$$\gamma = |\ln d/T| > 0,$$
$$K = \max \| \Omega_0^\tau(\varphi) \exp\{(-\ln d/T)\tau\} \|.$$

Неравенство (3.11) означает экспоненциальную устойчивость системы (3.2). Таким образом, справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.** *Для того чтобы система уравнений* (3.2) *при* $a \in C_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m)$, $P \in C(\mathcal{T}_m)$ *являлась экспоненциально устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы существовали положительные постоянные* $T$ *и* $d < 1$ *такие, что*

$$\| \Omega_0^T(\varphi) \| \leq d \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{T}_m. \tag{3.12}$$

Рассмотрим теперь экспоненциально дихотомичную систему (3.2). При $a \in C_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m)$, $P \in C_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m)$ для такой системы согласно [12] существует проектор в $C(\mathcal{T}_m)$

$$C \in C(\mathcal{T}_m), \quad C^2(\varphi) = C(\varphi) \tag{3.13}$$

такой, что

$$\| \Omega_0^t(\varphi) C(\varphi) \| \leq K \exp\{-\gamma t\} \quad \forall\, t \in R^+, \tag{3.14}$$
$$\| \Omega_0^t(\varphi) C_1(\varphi) \| \leq K \exp\{\gamma t\} \quad \forall\, t \in R^-, \tag{3.15}$$
$$C_1(\varphi) = E - C(\varphi),$$

где $K = \mathrm{const} \geq 1$, $\gamma = \mathrm{const} > 0$, $R^- \in (-\infty, 0]$, $\varphi$ — произвольное значение $\mathcal{T}_m$, $E$ — $n$-мерная единичная матрица. Более того, матрица $C(\varphi)$ удовлетворяет условию

$$\Omega_0^t(\varphi) C(\varphi) = C(\varphi_t) \Omega_0^t(\varphi) \quad \forall\, (t, \varphi) \in R \times \mathcal{T}_m. \tag{3.16}$$

Из неравенств (3.14), (3.15) следует существование таких положительных постоянных $T$ и $d > 1$, что

$$\| \Omega_0^T(\varphi) C(\varphi) \| \leq d, \quad \| \Omega_0^{-T}(\varphi) C_1(\varphi) \| \leq d \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{T}_m. \tag{3.17}$$

Обратно, пусть существует матрица $C$, удовлетворяющая условиям (3.13), (3.16), и положительные постоянные $T$ и $d < 1$, удовлетворяющие неравенствам (3.17). Тогда для $t \in R^+$ имеем оценку

$$\| \Omega_0^t(\varphi) C(\varphi) \| \leq \| \Omega_0^{t-[t/T]T}(\varphi_{[t/T]T}) \| \, \| \Omega_0^{[t/T]T}(\varphi) C^2(\varphi) \| =$$
$$= \| \Omega_0^{t-[t/T]T}(\varphi_{[t/T]T}) \Omega_0^T(\varphi_{([t/T]-1)T}) \ldots \Omega_0^T(\varphi_T) \Omega_0^T(\varphi) C^2(\varphi) \| =$$
$$= \| \Omega_0^{t-[t/T]T}(\varphi_{[t/T]T}) \Omega_0^T(\varphi_{([t/T]-1)T}) \ldots \Omega_0^T(\varphi_T) C(\varphi_T) \Omega_0^T(\varphi) C(\varphi) \| \leq$$
$$\leq \| \Omega_0^{t-[t/T]T}(\varphi_{[t/T]T}) \Omega_0^T(\varphi_{([t/T]-1)T}) \ldots \Omega_0^T(\varphi_T) C^2(\varphi_T) \| d \leq \ldots$$

$$\ldots \le \| \Omega_0^{t-[t/T]T}(\varphi_{[t/T]T}) \| d^{[t/T]} =$$
$$= \| \Omega_0^{t-[t/T]T}(\varphi_{[t/T]T}) \| \exp\{(\ln d/T)[t/T]T\} =$$
$$= \| \Omega_0^{t-[t/T]T}(\varphi_{[t/T]T}) \exp\{-(\ln d/T)(t-[t/T]T)\} \| \exp\{(\ln d/T)(t)\} =$$
$$= \max \| \Omega_0^{\tau}(\varphi) \exp\{-(\ln d/T)\tau\} \| \exp\{-\gamma t\} \le K \exp\{-\gamma t\}, \tag{3.18}$$

где max берется по $(\tau, \varphi) \in [0, T] \times \mathcal{T}_m$,

$$\gamma = |\ln d/T| > 0, \quad K = \max \| \Omega_0^{\tau}(\varphi) \exp\{(-\ln d/T)\tau\} \|.$$

Аналогичная оценка справедлива для $t \in R^-$:

$$\| \Omega_0^t(\varphi) C_1(\varphi) \| \le K \exp\{\gamma t\}, \tag{3.19}$$

$$\gamma = |\ln d/T| > 0, \quad K = \max \| \Omega_0^{\tau}(\varphi) \exp\{(\ln d/T)\tau\} \|,$$

где max берется по $(\tau, \varphi) \in [-T, 0] \times \mathcal{T}_m$.

Условия (3.13), (3.16) вместе с оценками (3.18), (3.19) означают экспоненциальную дихотомию системы (3.2).

Ослабим условие (3.16). Покажем, что для его выполнения достаточно, чтобы

$$\Omega_0^t(\varphi) C(\varphi) = C(\varphi_t(\varphi)) \Omega_0^t(\varphi) \quad \forall (t, \varphi) \in I_\delta \times \mathcal{T}_m, \tag{3.20}$$

где $I_\delta = [-\delta, \delta]$, $\delta$ — сколь угодно малое положительное число.

Действительно, при выполнении (3.20) для произвольных $t \in I_\delta$ и $\tau \in I_\delta$ справедливо равенство, получаемое из (3.20) заменой $\varphi$ на $\varphi_\tau(\varphi)$:

$$\Omega_0^t(\varphi_\tau(\varphi)) C(\varphi_\tau(\varphi)) = C(\varphi_{\tau+t}(\varphi)) \Omega_0^t(\varphi_\tau(\varphi)).$$

Так как

$$\Omega_\tau^t(\varphi_\theta(\varphi)) = \Omega_{\tau+\theta}^{t+\theta}(\varphi) \quad \forall (t, \tau, \theta, \varphi) \in R \times R \times R \times \mathcal{T}_m, \tag{3.21}$$

то (3.21) преобразуется к виду

$$\Omega_0^{t+\tau}(\varphi) \Omega_\tau^0(\varphi) C(\varphi_\tau(\varphi)) = C(\varphi_{t+\tau}(\varphi)) \Omega_0^{t+\tau}(\varphi) \Omega_\tau^0(\varphi). \tag{3.22}$$

При $t \in I_\delta$ из (3.21) следует, что $C(\varphi_\tau(\varphi)) = \Omega_0^\tau(\varphi) C(\varphi) \Omega_\tau^0(\varphi)$, поэтому (3.22) принимает вид

$$\Omega_0^{t+\tau}(\varphi) C(\varphi) \Omega_\tau^0(\varphi) = C(\varphi_{t+\tau}(\varphi)) \Omega_0^{t+\tau}(\varphi) \Omega_\tau^0(\varphi)$$

и доказывает, что

$$\Omega_0^{t+\tau}(\varphi) C(\varphi) = C(\varphi_{t+\tau}(\varphi)) \Omega_0^{t+\tau}(\varphi). \tag{3.23}$$

Соотношение (3.23) означает справедливость равенства (3.20) на множестве $(t, \varphi) \in I_{2\delta} \times \mathcal{T}_m$. Отсюда очевидным образом следует справедливость соотношения (3.16).

Таким образом, справедлива следующая теорема.

**Теорема 5.** *Для того чтобы система уравнений* (3.2) *при* $a \in C_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m)$, $P \in C_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m)$ *являлась экспоненциально дихотомичной, необходимо и достаточно, чтобы существовала матрица* $C$, *удовлетворяющая условиям* (3.13), (3.20), *и положительные постоянные* $T$ *и* $d < 1$, *для которых выполняются неравенства* (3.17).

Эффективность практического использования приведенных теорем очевидна.

**4. Условия грубости функции Грина линейного расширения динамической системы на торе с показателем гладкости $l$.** Согласно [12] функция Грина системы (3.2) определяется соотношениями

$$G_0(\tau,\varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi) C(\varphi_\tau(\varphi)) & \text{при } \tau \le 0; \\ -\Omega_\tau^0(\varphi) C_1(\varphi_\tau(\varphi)) & \text{при } \tau > 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

$$C \in \mathcal{C}(\mathcal{T}_m), \quad C_1 = E - C, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \| G_0(\tau,\varphi) \| \, d\tau \le K, \tag{4.2}$$

где $K = \text{const} > 0$. При $a \in \mathcal{C}^l(\mathcal{T}_m)$, $P \in \mathcal{C}^l(\mathcal{T}_m)$, $l \ge 1$, эта функция называется грубой с показателем гладкости $l$, если найдется постоянная $\delta > 0$ такая, что система уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi) + a_1(\varphi), \qquad \frac{dh}{dt} = P(\varphi) h, \tag{4.3}$$

у которой $a_1 \in \mathcal{C}^l(\mathcal{T}_m)$,

$$|a_1|_l \le \delta, \tag{4.4}$$

имеет функцию Грина $\overline{G}_0(\tau,\varphi)$, удовлетворяющую условию

$$| \overline{G}_0(\tau,\varphi) f(\varphi(\tau)) |_l \le K \exp\{-\gamma|\tau|\} |f|_l, \tag{4.5}$$

где $f$ — произвольная функция из $\mathcal{C}^l(\mathcal{T}_m)$, $K = \text{const} > 1$, $\gamma = \text{const} > 0$, $|f|_l$ — $l$-я дифференциальная норма функции $f \in \mathcal{C}^l(\mathcal{T}_m)$:

$$|f|_l = \max_{0 \le |\rho| \le l} |D^\rho f|_0 = \max \left| \frac{\partial^\rho f}{\partial\varphi_1^{\rho_1} \ldots \partial\varphi_m^{\rho_m}} \right|_0, \quad |f|_0 = \max_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \|f(\varphi)\|,$$

$\varphi(t) = \varphi(t,\varphi)$ — решение уравнений угловых переменных системы (4.3),

$$|\rho| = \sum_{\nu=1}^{m} \rho_\nu.$$

Основной результат о грубости функции Грина экспоненциально дихотомичной системы с показателем гладкости $l$ содержится в следующей теореме.

**Теорема 6.** *Пусть* $a \in \mathcal{C}^l(\mathcal{T}_m)$, $P \in \mathcal{C}^l(\mathcal{T}_m)$, $l \ge 1$, *и система уравнений* (3.2) *экспоненциально дихотомична. Предположим, что функция Грина* $G_0(\tau, \varphi)$ *этой системы удовлетворяет неравенству*

$$\| G_0(\tau,\varphi) \| \le K \exp\{-\gamma|\tau|\} \qquad \forall \tau \in R, \tag{4.6}$$

*а матрицант* $\Omega_0^\tau(\partial a / \partial\varphi)$ *системы уравнений* (2.17) *удовлетворяет неравенству*

$$\| \Omega_0^\tau(\partial a / \partial\varphi) \| \le K_1 \exp\{\alpha|\tau|\} \qquad \forall \tau \in R, \tag{4.7}$$

*где* $K = \text{const} \ge 1$, $K_1 = \text{const} \ge 1$, $\gamma = \text{const} > 0$, $\alpha = \text{const} \ge 0$.

*Тогда, если*

$$\gamma > l\alpha, \tag{4.8}$$

*то функция Грина* $G_0(\tau,\varphi)$ *является грубой с показателем гладкости* $l$.

Переходя к доказательству теоремы, построим квадратичную по $h$ форму, с помощью которой восстанавливается неравенство (4.6) с показателем экспоненциального затухания, сколь угодно мало отличающимся от $\gamma$. Для этого зафиксируем сколь угодно малое $\varepsilon > 0$ и, взяв $\lambda$ из отрезка $\mathcal{J} = [0, \gamma - \varepsilon]$, рассмотрим матрицу

$$S_\lambda(\varphi) = S_1(\varphi, \lambda) - S_2(\varphi, \lambda), \tag{4.9}$$

положив

$$S_1(\varphi, \lambda) = \int_0^\infty C^*(\varphi)(\Omega_0^\tau(\varphi))^* \Omega_0^\tau(\varphi) C(\varphi) e^{2\lambda\tau} d\tau, \tag{4.10}$$

$$S_2(\varphi, \lambda) = \int_0^\infty C_1^*(\varphi)(\Omega_0^\tau(\varphi))^* \Omega_0^\tau(\varphi) C_1(\varphi) e^{2\lambda\tau} d\tau, \tag{4.11}$$

где $C(\varphi) = G_0(0, \varphi)$, $\Omega_0^\tau(\varphi) = \Omega_0^\tau(P)$.

Из оценок (4.6) следует сходимость интегралов (4.10), (4.11) равномерно по $\varphi \in \mathcal{T}_m$. Более того, для этих интегралов выполняются равенства

$$S_1(\varphi_t, \lambda) = \int_0^\infty C^*(\varphi_t)(\Omega_0^\tau(\varphi_t))^* \Omega_0^\tau(\varphi_t) C(\varphi_t) e^{2\lambda\tau} d\tau =$$

$$= \int_t^\infty (\Omega_t^0(\varphi))^* C^*(\varphi)(\Omega_0^\tau(\varphi))^* \Omega_0^\tau(\varphi) C(\varphi) \Omega_t^0(\varphi) e^{2\lambda(\tau - t)} d\tau, \tag{4.12}$$

$$S_2(\varphi_t, \lambda) = \int_{-\infty}^t (\Omega_t^0(\varphi))^* C^*(\varphi)(\Omega_0^\tau(\varphi))^* \Omega_0^\tau(\varphi) C(\varphi) \Omega_t^0(\varphi) e^{2\lambda(\tau - t)} d\tau,$$

получаемые с учетом (3.16), (3.21) стандартным образом. Тогда

$$\frac{dS_1(\varphi_t)}{dt} = -C^*(\varphi_t)C(\varphi_t) - P^*(\varphi_t)S_1(\varphi_t) - S_1(\varphi_t)P(\varphi_t) - 2\hat{\lambda}S_1(\varphi_t),$$

$$\frac{dS_2(\varphi_t)}{dt} = C_1^*(\varphi_t)C_1(\varphi_t) - P^*(\varphi_t)S_2(\varphi_t) - S_2(\varphi_t)P(\varphi_t) - 2\lambda S_2(\varphi_t),$$

что приводит к равенству

$$\frac{dS_\lambda(\varphi_t)}{dt} = -[C^*(\varphi_t)C(\varphi_t) + C_1^*(\varphi_t)C_1(\varphi_t)] -$$

$$- P^*(\varphi_t)S_\lambda(\varphi_t) - S_\lambda(\varphi_t)P(\varphi_t) - 2\lambda S_\lambda(\varphi_t) = \dot{S}_\lambda(\varphi_t). \tag{4.13}$$

Отсюда следует, что квадратичная форма

$$V_\lambda(\varphi_t, h_t) = (S_\lambda(\varphi_t) h_t, h_t), \tag{4.14}$$

в которой $h_t = \Omega_0^t(P) h_0$, удовлетворяет равенству

$$\frac{dV_\lambda(\varphi_t, h_t)}{dt} = -[(C(\varphi_t)h_t, C(\varphi_t)h_t) + (C_1(\varphi_t)h_t, C_1(\varphi_t)h_t)] - 2\lambda V_\lambda(\varphi_t, h_t). \tag{4.15}$$

Для системы уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dh}{dt} = (P(\varphi) + \lambda E)h \tag{4.16}$$

функция $G_0(\tau, \varphi, \lambda) = \exp\{-\lambda\tau\} G_0(\tau, \varphi)$ является функцией Грина, удовлетворяющей условиям единственности:

$$G_0(0, \varphi, \lambda) = C(\varphi) = C^2(\varphi), \qquad \Omega_0^t(P + \lambda E)C(\varphi) = C(\varphi_t)\Omega_0^t(P + \lambda E).$$

Этого достаточно, чтобы система (4.16) являлась экспоненциально дихотомичной и чтобы сепаратрисные многообразия $E^{+}(\varphi)$ и $E^{-}(\varphi)$ систем (3.2), (4.16) совпадали.

Матрица $S_{\lambda}(\varphi)$ выбрана так, что она совпадает с матрицей, которая строится для системы (4.16) по схеме доказательства теоремы о необходимых условиях дихотомии инвариантного тора [12]. Поэтому матрица $S_{\lambda}(\varphi)$ удовлетворяет условиям этой теоремы, следовательно, удовлетворяет соотношениям

$$S_{\lambda} \in C'(\mathcal{T}_m, a), \quad \det S_{\lambda}(\varphi) \neq 0 \quad \forall (\varphi, \lambda) \in \mathcal{T}_m \times \mathcal{J}, \tag{4.17}$$

$$\hat{S}_{\lambda}(\varphi) = \dot{S}_{\lambda}(\varphi) + P^{*}(\varphi)S_{\lambda}(\varphi) + S_{\lambda}(\varphi)P(\varphi) + 2\lambda S_{\lambda}(\varphi) \in \mathfrak{N}^{-}, \tag{4.18}$$

где $\mathfrak{N}^{-}$ — множество отрицательно определенных симметрических матриц.

Сепаратрисное многообразие $E^{+}(\varphi_t)$ системы (4.16), как доказано при установлениии достаточных условий экспоненциальной дихотомии инвариантного тора [12], принадлежит конусу

$$(S_{\lambda}(\varphi_t)h_t^{\lambda}, h_t^{\lambda}) \geq 0 \quad \forall t \in R^{+}, \tag{4.19}$$

где $\varphi_t$, $h_t^{\lambda} = h_t^{\lambda}(\varphi, h) = h_t e^{\lambda t}$ — решения системы уравнений (4.16).

Конус (4.19) совпадает с конусом

$$(S_{\lambda}(\varphi_t)h_t, h_t) \geq 0 \quad \forall t \in R^{+}, \tag{4.20}$$

поэтому сепаратрисное многообразие $E^{+}(\varphi_t)$ принадлежит конусу (4.20). При достаточно малом $\varepsilon$ имеем оценку

$$\begin{aligned} \frac{d[V_{\lambda}(\varphi_t, h_t) + \varepsilon(h_t, h_t)]}{dt} &= -2\lambda[V_{\lambda}(\varphi_t, h_t) + \varepsilon(h_t, h_t)] + 2\lambda\varepsilon(h_t, h_t) - \\ &- [\|C(\varphi_t)h_t\|^2 + \|C_1(\varphi_t)h_t\|^2] + 2\varepsilon(P(\varphi_t)h_t, h_t) \leq \\ &\leq -2\lambda[V_{\lambda}(\varphi_t, h_t) + \varepsilon(h_t, h_t)] - (1/2 - 2\lambda\varepsilon - 2M\varepsilon)\|h_t\|^2 \leq \\ &\leq -2\lambda[V_{\lambda}(\varphi_t, h_t) + \varepsilon(h_t, h_t)], \end{aligned} \tag{4.21}$$

где

$$M = \max_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \|P(\varphi)\|.$$

Из неравенств (4.20), (4.21) следует оценка

$$V_{\lambda}(\varphi_t, h_t^{+}) + \varepsilon\|h_t^{+}\|^2 \leq \exp\{-2\lambda t\}[\|V_{\lambda}(\varphi, h^{+})\|^2 + \varepsilon\|h^{+}\|^2] \quad \forall t \in R^{+},$$

где $h_t^{+} = h_t(\varphi, h^{+})$ — решение системы (3.2), начинающееся на $E^{+}(\varphi)$. Из последнего неравенства получаем

$$\|h_t^{+}\| \leq K_2 \exp\{-\lambda t\}\|h^{+}\| \quad \forall t \in R^{+}, \tag{4.22}$$

где $K_2$ выбрано из условия $K_1/(\sqrt{2}\varepsilon) + 1 \leq K_2$.

Аналогично находим оценку

$$\|h_t^{-}\| \leq K_2 \exp\{\lambda t\}\|h^{-}\| \quad \forall t \in R^{-} \tag{4.23}$$

для решений системы (3.2) $h_t^{-} = h_t(\varphi, h^{-})$, начинающихся на сепаратрисном многообразии $E^{-}(\varphi)$.

Из (4.22), (4.23) и свойств функции Грина для экспоненциально дихотомичной системы следует оценка

$$\|G_0(\tau, \varphi)\| \leq K_2 \exp\{-\lambda|\tau|\} \quad \forall \tau \in R, \tag{4.24}$$

из которой при $\lambda = \gamma - \varepsilon$ следует требуемое нами восстановление по $V_\lambda(\varphi, h)$ неравенства (4.6).

Докажем, что из экспоненциальной дихотомии систем (4.16) $\forall\, \lambda \in \mathcal{J}$ следует общность сепаратрисных многообразий $E^+(\varphi)$ и $E^-(\varphi)$ этих систем.

Действительно, пусть $G_0(\tau, \varphi, \lambda)$ обозначает функцию Грина системы (4.16). Тогда $G_0(\tau, \varphi, \lambda) = \exp\{-\lambda\tau\} G_0(\tau, \varphi, 0)$ при $\lambda \in [0, \lambda_1)$, где $\lambda_1 > 0$. Пусть $\lambda_1$ — наибольшее из значений $\mathcal{J}$, при которых $G_0(\tau, \varphi, \lambda) = \exp\{-\lambda\tau\} G_0(\tau, \varphi, 0)$. Это означает, что

$$G_0(0, \varphi, \lambda) = G_0(0, \varphi, 0) = C(\varphi) \quad \forall\, \lambda \in [0, \lambda_1), \tag{4.25}$$
$$G_0(0, \varphi, \lambda_1) \neq C(\varphi).$$

Заменяя в системе (4.16) $\lambda$ на $\lambda_1 + \mu$, получаем, что $G_0(\tau, \varphi, \lambda_1 + \mu) = \exp\{-\mu\tau\} G_0(\tau, \varphi, \lambda_1)$ для $|\mu| \le \delta$ при достаточно малом $\delta > 0$. Но тогда имеем равенство

$$C(\varphi) = G_0(0, \varphi, \lambda_1 - \delta) = G_0(0, \varphi, \lambda_1),$$

которое противоречит неравенству (4.25). Противоречие доказывает, что при всех $\lambda \in \mathcal{J}$

$$G_0(\tau, \varphi, \lambda) = \exp\{-\lambda\tau\} G_0(\tau, \varphi, 0).$$

Это доказывает, что системы (4.16) при сделанном предположении имеют одни и те же сепаратрисные многообразия $E^+(\varphi)$ и $E^-(\varphi)$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi) + a_1(\varphi), \qquad \frac{dh}{dt} = (P(\varphi) + \lambda E)h, \tag{4.26}$$

где $a_1 \in C^l(\mathcal{T}_m)$ и удовлетворяет условию (4.4), $\lambda \in \mathcal{J}$.

При $l > 1$ согласно [15] матрица $S_\lambda(\varphi)$ может быть сглажена так, что сглаженная матрица $S_\lambda^n(\varphi) \in C^1(\mathcal{T}_m)$ и сохраняет свойства матрицы $S_\lambda(\varphi)$:

$$S_\lambda^n = (S_\lambda^n)^*,$$
$$\lim_{n\to\infty}\left[\left\|S_\lambda^n(\varphi) - S_\lambda(\varphi)\right\| + \left\|\frac{\partial S_\lambda^n(\varphi)}{\partial\varphi} a(\varphi) - \dot S_\lambda(\varphi)\right\|\right] = 0 \tag{4.27}$$

равномерно по $(\varphi, \lambda) \in \mathcal{T}_m \times \mathcal{J}$.

Из (4.17), (4.27) при достаточно большом $n$ следует, что

$$\det S_\lambda^n(\varphi) \neq 0 \quad \forall\, (\varphi, \lambda) \in \mathcal{T}_m \times \mathcal{J}. \tag{4.28}$$

Обозначим через $\varphi(t)$, $h^\lambda(t)$ решения системы уравнений (4.26) такие, что $\varphi(0) = \varphi$, $h^\lambda(0) = h$. Положим

$$V_\lambda^n(\varphi, h) = (S_\lambda^n(\varphi)h, h) \tag{4.29}$$

и рассмотрим $dV_\lambda^n(\varphi(t), h^\lambda(t))/dt$. Имеем

$$\frac{dV_\lambda^n\big(\varphi(t), h^\lambda(t)\big)}{dt} = \left(\left[\frac{\partial S_\lambda^n(\varphi(t))}{d\varphi} a(\varphi(t)) + \frac{\partial S_\lambda^n(\varphi(t))}{\partial\varphi} a_1(\varphi(t)) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + S_\lambda^n(\varphi(t))P(\varphi(t)) + P^*(\varphi(t) S_\lambda^n(\varphi(t)) + 2\lambda S_\lambda^n(\varphi(t))\right] h^\lambda(t), h^\lambda(t)\right) \le$$

$$\leq \Big( \big[ \dot{S}_\lambda(\varphi(t)) + S_\lambda(\varphi(t)) P(\varphi(t)) +$$

$$+ P^*(\varphi(t)) S_\lambda(\varphi(t)) + 2\lambda S_\lambda(\varphi(t)) \big] h^\lambda(t), h^\lambda(t) \Big) +$$

$$+ \left( \left\| \frac{\partial S_\lambda^n(\varphi(t))}{\partial \varphi} a(\varphi(t)) \right\| + \varepsilon_n \right) \| h^\lambda(t) \|^2 =$$

$$= (\hat{S}_\lambda(\varphi(t)) h^\lambda(t), h^\lambda(t)) + (\varepsilon_n + K_n \delta) \| h^\lambda(t) \|^2, \tag{4.30}$$

где постоянные $\varepsilon_n, K_n$ определяются из условий

$$\left\| \frac{\partial S_\lambda^n(\varphi)}{\partial \varphi} a(\varphi) - \dot{S}_\lambda(\varphi) \right\| + \| (S_\lambda^n(\varphi) - S_\lambda(\varphi)) P(\varphi) \| +$$

$$+ \| P^*(\varphi)(S_\lambda^n(\varphi) - S_\lambda(\varphi)) \| + 2\lambda \| S_\lambda^n(\varphi) - S_\lambda(\varphi) \| \leq \varepsilon_n,$$

$$\left\| \frac{\partial S_\lambda^n(\varphi)}{\partial \varphi} a_1(\varphi) \right\| \leq K_n \| a_1(\varphi) \| \leq K_n \delta.$$

При достаточно малых $\varepsilon$ и $\delta$ из (4.30) и равенств (4.13), (4.18) следует

$$\frac{dV_\lambda^n\big(\varphi(t), h^\lambda(t)\big)}{dt} \leq -[\| C^*(\varphi(t)) h^\lambda(t) \|^2 + \| C_1(\varphi(t)) h^\lambda(t) \|^2] -$$

$$- 2\varepsilon_n \| h^\lambda(t) \|^2 \leq (1/2 - 2\varepsilon_n) \| h^\lambda(t) \|^2 \leq -(1/4) \| h^\lambda(t) \|^2. \tag{4.31}$$

Неравенство (4.31) доказывает отрицательную определенность матрицы $\hat{S}_\lambda^n(\varphi)$ коэффициентов квадратичной формы $dV_n^\lambda(\varphi(t), h^\lambda(t))/dt$:

$$\hat{S}_\lambda^n(\varphi) = \frac{\partial S_\lambda^n(\varphi)}{\partial \varphi} (a(\varphi) + a_1(\varphi)) + S_\lambda^n(\varphi) P(\varphi) + P^*(\varphi) S_\lambda^n(\varphi) + 2\lambda S_\lambda^n(\varphi). \tag{4.32}$$

Вместе с (4.28) этого достаточно, чтобы, следуя [12], утверждать об экспоненциальной дихотомии системы (4.26) при всех $\lambda \in \mathcal{J}$. Как доказано выше, при экспоненциальной дихотомии систем (4.26) при всех $\lambda \in \mathcal{J}$ сепаратрисные многообразия этих систем $E^+(\varphi)$ и $E^-(\varphi)$ общие. Более того, многообразие $E^+(\varphi)$ принадлежит конусу

$$(S_\lambda^n(\varphi(t)) h(t), h(t)) \geq 0 \qquad \forall t \in R^+, \tag{4.33}$$

где $\varphi(t)$, $h(t)$ — решение системы уравнений (3.2), $\varphi(0) = \varphi$, $h(0) = h$.

Рассмотрим функцию $dV_n^\lambda(\varphi(t), h(t))/dt$. Имеем

$$\frac{dV_\lambda^n(\varphi(t), h(t))}{dt} = \left( \left[ \frac{\partial S_\lambda^n(\varphi(t))}{\partial \varphi} a(\varphi(t)) + \frac{\partial S_\lambda^n(\varphi(t))}{\partial \varphi} a_1(\varphi(t)) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + S_\lambda^n(\varphi(t)) P(\varphi(t)) + P^*(\varphi(t)) S_\lambda^n(\varphi(t)) \right] h(t), h(t) \right) \leq$$

$$\leq \Big( \big[ \dot{S}_\lambda(\varphi(t)) + S_\lambda(\varphi(t)) P(\varphi(t)) +$$

$$+ P^*(\varphi(t)) S_\lambda(\varphi(t)) \big] h(t), h(t) \Big) + 2\varepsilon_n \| h(t) \|^2 =$$

$$= -[\| C(\varphi(t)) h(t) \|^2 + \| C_1(\varphi(t)) h(t) \|^2] -$$

$$- 2\lambda (S_\lambda(\varphi(t)) h(t), h(t)) + 2\varepsilon_n \| h(t) \|^2 \leq$$

$$\leq -(1/2-2\varepsilon_n)\|h(t)\|^2 - 2\lambda V_\lambda^n(\varphi(t), h(t)) \leq -2\lambda V_\lambda^n(\varphi(t), h(t)). \quad (4.34)$$

Аналогично тому, как из (4.15), (4.20) получается неравенство (4.22), из (4.33), (4.34) получаем неравенство

$$\| h^+(t)\| \leq K_3 \exp\{-\lambda t\} \| h^+\| \qquad \forall\, t \in R^+, \quad (4.35)$$

в котором $h^+(t) = h^+(t, \varphi, h^+)$ — решение системы (4.3), начинающееся на $E^+(\varphi)$, $K_3 = \mathrm{const} \geq 1$.

Аналогичным образом получается неравенство

$$\| h^-(t)\| \leq K_3 \exp\{\lambda t\} \| h^-\| \qquad \forall\, t \in R^-, \quad (4.36)$$

в котором $h^-(t) = h^-(t, \varphi, h^-)$ — решение системы (4.3), начинающееся на $E^-(\varphi)$. Из (4.35), (4.36) следует оценка функции Грина $\overline{G}_0(\tau, \varphi)$ системы (4.3) вида

$$\| \overline{G}_0(\tau, \varphi)\| \leq K_3 \exp\{-\lambda|\tau|\} \qquad \forall\, \tau \in R. \quad (4.37)$$

Полагая в (4.37) $\lambda = \gamma - \varepsilon$, получаем

$$\| \overline{G}_0(\tau, \varphi)\| \leq K_3 \exp\{-(\gamma-\varepsilon)|\tau|\} \qquad \forall\, \tau \in R. \quad (4.38)$$

Рассмотрим матрицант $\Omega_0^\tau\left(\dfrac{\partial a}{\partial\varphi} + \dfrac{\partial a_1}{\partial\varphi}\right)$ системы уравнений

$$\frac{d\theta}{dt} = \left[\frac{\partial a(\varphi(t))}{\partial\varphi} + \frac{\partial a_1(a(t))}{\partial\varphi}\right]\theta.$$

Из неравенств (4.4), (4.7) для этого матрицанта получаем (см. лемму 1 из [12, с. 229]) оценку

$$\left\|\Omega_0^\tau\left(\frac{\partial a}{\partial\varphi} + \frac{\partial a_1}{\partial\varphi}\right)\right\| \leq K_1 \exp\{(\alpha + K_1\delta)|\tau|\} \qquad \forall\, \tau \in R.$$

При $K_1\delta < \varepsilon$ из этой оценки вытекает

$$\left\|\Omega_0^\tau\left(\frac{\partial a}{\partial\varphi} + \frac{\partial a_1}{\partial\varphi}\right)\right\| \leq K_1 \exp\{(\alpha + \varepsilon)|\tau|\} \qquad \forall\, \tau \in R.$$

Отсюда с учетом неравенства (4.8) и теоремы о гладкости функции Грина [12] следует оценка

$$| \overline{G}_0(\tau, \varphi) f(\varphi(\tau))|_l \leq K_4 \exp\{-\gamma_1|\tau|\}|f|_l \qquad \forall\, \tau \in R, \quad (4.40)$$

где $f$ — произвольная функция из $C^l(\mathcal{T}_m)$, $K_4 = \mathrm{const} \geq 1$,

$$\gamma_1 = \gamma - l\alpha - (l+1)\varepsilon > 0, \quad 0 < \varepsilon < (\gamma - l\alpha)/(l+1). \quad (4.41)$$

Неравенство (4.40) означает грубость функции Грина $G_0(\tau, \varphi)$ с показателем гладкости $l \geq 1$.

Экспоненциальная дихотомия системы (3.2) исчерпывает возможности существования у системы (3.2) единственной функции Грина. Остается случай, когда система (3.2) имеет неединственную функцию Грина $G_0(\tau, \varphi)$. Естественно, что показатели экспоненциального затухания каждой из этих функций могут оказаться индивидуальными и более подверженными резким изменениям при малых возмущениях системы (3.2). Это требует выделения общего показателя экспоненциального затухания всех функций Грина системы (3.2). Возможности для этого представляют исследования неединственной функции Грина, приведенные в [15]. Исходя из этих исследований, наряду с системой уравнений (3.2) рассмотрим „расширенную" систему уравнений вида

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dh}{dt} = P(\varphi)h, \quad \frac{dg}{dt} = Q(\varphi)g - P^*(\varphi)h, \tag{4.42}$$

матрица $Q(\varphi)$ которой принадлежит $C^l(\mathcal{T}_m)$ и выбрана так, чтобы система (4.42) являлась экспоненциально дихотомичной. Такой матрицей может быть, в частном случае, $Q(\varphi) = -E$. Функция Грина $G_0^1(\tau, \varphi)$ системы (4.42) имеет вид

$$G_0^1(\tau, \varphi) = \begin{pmatrix} G_0(\tau, \varphi) & \Omega_\tau^0(\varphi)C_{12}(\varphi_\tau) \\ R_\tau G_0(\tau, \varphi) + \left(\Omega_0^\tau(\varphi)\right)^* C_{21}(\varphi_\tau) & R_\tau \Omega_\tau^0(\varphi)C_{12}(\varphi_\tau) + G_1(\tau, \varphi) \end{pmatrix} \tag{4.43}$$

и оценку

$$\| G_0^1(\tau, \varphi)\| \le K \exp\{-\gamma|\tau|\} \qquad \forall\, \tau \in R, \tag{4.44}$$

где $K = \text{const} \ge 1$, $\gamma = \text{const} > 0$. Из (4.44) следует, что оценку $\forall\, \tau \in R$

$$\| G_0(\tau, \varphi)\| \le K \exp\{-\gamma|\tau|\}, \quad \| \Omega_\tau^0(\varphi) C_{12}(\varphi_\tau)\| \le K \exp\{-\gamma|\tau|\} \tag{4.45}$$

имеют составляющие однопараметрического семейства функций Грина системы (3.2):

$$G_0(\tau, \varphi, \mu) = G_0(\tau, \varphi) + \mu\, \Omega_\tau^0(\varphi) C_{12}(\varphi_\tau), \tag{4.46}$$

где $\mu$ — произвольное значение $R$. Показатель $\gamma$, определяемый условием (4.44), будем называть общим показателем затухания семейства функций Грина системы (3.2).

Из доказанной выше теоремы легко выводится следующая теорема о грубости неединственной функции Грина системы (3.2) с показателем гладкости $l$.

**Теорема 7.** *Пусть* $a \in C^l(\mathcal{T}_m)$, $P \in C^l(\mathcal{T}_m)$, $l \ge 1$. *Предположим, что система уравнений* (3.2) *имеет функцию Грина* $G_0(\tau, \varphi)$, *которая удовлетворяет неравенству* (4.6), *а матрица* $\Omega_0^\tau\left(\dfrac{\partial a}{\partial \varphi}\right)$ *системы уравнений* (2.17) *удовлетворяет неравенству* (4.7). *Тогда если выполняется неравенство* (4.8) *и* $\gamma$ *— общий показатель затухания семейства функций Грина системы* (3.2), *то функция Грина* $G_0(\tau, \varphi)$ *является грубой с показателем гладкости* $l$.

Для доказательства теоремы достаточно применить теорему 6 к функции Грина системы (4.42). Это приводит к грубости функции $G_0^1(\tau, \varphi)$ с показателем гладкости $l$. Из этого и вида верхнего левого блока $G_0^1(\tau, \varphi)$ следует грубость функции Грина $G_0(\tau, \varphi)$ системы (3.2) с показателем гладкости $l$.

**5. Теорема теории возмущений инвариантного тора динамической системы.** Возвратимся к рассмотрению системы уравнений (1.1) в предположении, что невозмущенная система уравнений имеет инвариантный тор (1.2), удовлетворяющий условиям (1.3) с хорошо устроенной окрестностью. Замена переменных (1.6) позволяет преобразовать (1.1) к системе вида (1.7)

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi, h, \varepsilon), \qquad \frac{dh}{dt} = P(\varphi, h, \varepsilon)h + f(\varphi, \varepsilon), \tag{5.1}$$

где $a, P, f$ — функции пространства $C^l(\mathcal{T}_m \times K_\delta \times I)$, $I = [0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0$ — достаточно малое положительное число, $l = r - 1 \ge 1$,

$$f(\varphi, 0) = 0, a(\varphi, 0, 0) = a(\varphi), \quad P(\varphi, 0, 0) = P(\varphi). \tag{5.2}$$

Для функции $u \in C^s_{\text{Lip}}(\mathcal{T}_m)$ посредством $|u|_{s,\text{Lip}}$ будем обозначать величину $|u|_s + K$, где $K$ — постоянная Липшица $s$-х производных функции $u$.

Запишем уравнение в вариациях инвариантного тора невозмущенной системы

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dh}{dt} = P(\varphi)h \tag{5.3}$$

и уравнение в вариациях решений на инвариантном торе

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial a(\varphi)}{\partial\varphi}\theta. \tag{5.4}$$

Из результатов предыдущего пункта и основной теоремы [1] выводится следующее утверждение.

**Теорема 8.** *Пусть правая часть системы уравнений удовлетворяет приведенным выше условиям. Предположим, что система* (5.3) *имеет функцию Грина* $G_0(\tau, \varphi)$, *удовлетворяющую неравенству*

$$\| G_0(\tau, \varphi)\| \le K_1 \exp\{-\gamma|\tau|\} \qquad \forall\, \tau \in R, \tag{5.5}$$

*а фундаментальная матрица решений* $\Omega_0^t\left(\dfrac{\partial a}{\partial\varphi}\right)$ *системы уравнений* (5.4) *удовлетворяет неравенству*

$$\left\|\Omega_0^t\left(\frac{\partial a}{\partial\varphi}\right)\right\| \le K_2 \exp\{\alpha|\tau|\} \qquad \forall\, \tau \in R, \tag{5.6}$$

*где* $\gamma$ *— общий показатель затухания семейства функций Грина системы* (5.3), $K_\nu = \text{const} \ge 1$, $\nu = 1, 2$, $\alpha = \text{const} \ge 0$. *Тогда если*

$$\gamma > l\alpha, \tag{5.7}$$

*то можно указать достаточно малое* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что для любого* $\varepsilon \in I$ *система уравнений* (5.1) *имеет инвариантный тор*

$$M(\varepsilon):\ h = u(\varphi, \varepsilon), \tag{5.8}$$

*где*

$$u \in C^{l-1}_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m) \quad \forall\, \varepsilon \in I, \quad |u|_{l-1,\,\mathrm{Lip}} \le K_3 |f|_l, \tag{5.9}$$

$K_3 = \text{const} \ge 1$ *не зависит от* $\varepsilon$.

Действительно, условия теоремы 8 гарантируют справедливость теоремы 7, следовательно, грубость функции Грина $G_0(\tau, \varphi)$ с показателем гладкости $l$. Этого достаточно для выполнения всех условий основной теоремы [1], из чего следуют утверждения теоремы 8.

Следует отметить, что при единственности функции Грина $G_0(\tau, \varphi)$ теорема 8 остается в силе с той поправкой, что $\gamma$ — показатель затухания функции $G_0(\tau, \varphi)$, определяемый неравенством (5.5).

При неединственности функции Грина $G_0(\tau, \varphi)$ условия теоремы 8 оказываются выполненными для любой функции $G_0(\tau, \varphi, \mu)$ семейства (4.46). Система уравнений (5.1) имеет тогда инвариантный тор

$$M(\varepsilon, \mu):\ h = u(\varphi, \varepsilon, \mu) \tag{5.10}$$

со всеми свойствами тора $M(\varepsilon)$. В этой ситуации в окрестности $M$ существует, по-видимому, семейство инвариантных торов системы (5.1) $\forall\, \varepsilon \in I$.

**6. Функция Грина для линейного матричного уравнения.** Пусть задана система уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dX}{dt} + XB(\varphi) = A(\varphi)X + Q(\varphi), \tag{6.1}$$

в которой $A$ — $n$-мерная, $B$ — $p$-мерная квадратные матрицы, $X$ и $Q$ —

-мерные прямоугольные матрицы, $a, A, B, Q$ принадлежат пространству ). Требуется найти принадлежащие $C'(\mathcal{T}_m, a)$ решения системы (6.1). К ıдаче приводит, в частности, рассмотренная в п. 2 задача о блочной диа- :зации блочно-треугольной системы уравнений в вариациях (2.5).

ишем однородную систему уравнений, соответствующую (6.1):

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dX}{dt} + XB(\varphi) = A(\varphi)X. \tag{6.2}$$

$$H_{\nu j} = [0, \dots, e_\nu, \dots, 0], \qquad \nu = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, p}, \tag{6.3}$$

чает $(n \times p)$-мерную матрицу, $j$-й столбец которой равен $\nu$-му единич- рту $e_\nu$ пространства $R^n$.

ıзначим через $C^{\nu j}(\varphi)$, $C_1^{\nu j}(\varphi)$ пару $(n \times p)$-мерных матриц из $C(\mathcal{T}_m)$, творяющих условию

$$C^{\nu j}(\varphi) + C_1^{\nu j}(\varphi) = H_{\nu j}, \qquad \nu = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, p}. \tag{6.4}$$

:им

$$G_0^{\nu j}(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(A) C^{\nu j}(\varphi_\tau) \Omega_0^\tau(B) & \text{при } \tau \le 0; \\ -\Omega_\tau^0(A) C_1^{\nu j}(\varphi_\tau) \Omega_0^\tau(B) & \text{при } \tau > 0 \end{cases} \tag{6.5}$$

ıуем из $G_0^{\nu j}(\tau, \varphi)$, как из блоков, матрицу

$$G_0(\tau, \varphi) = \{ G_0^{\nu j}(\tau, \varphi) \}, \qquad \nu = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, p}. \tag{6.6}$$

ıцу $G_0(\tau, \varphi)$ будем называть функцией Грина системы (6.2) всякий раз,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \| G_0^{\nu j}(\tau, \varphi) \| \, d\tau \le K \tag{6.7}$$

юбого $\nu = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, p}$ и какого-нибудь $K = \mathrm{const}$.

ıдставим матрицу $Q(\varphi)$ через ее элементы $\{ q_{\nu j}(\varphi) \}$, $\nu = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, p}$, в

$$Q(\varphi) = \sum_{\nu, j}^{n, p} q_{\nu j}(\varphi) H_{\nu j}, \tag{6.8}$$

ımирование ведется по $\nu$ от 1 до $n$ и $j$ от 1 до $p$. Покажем, что сущес- ия функции Грина $G_0(\tau, \varphi)$ системы (6.2) достаточно для существова- $C'(\mathcal{T}_m, a)$ решения уравнения (6.1) и представления этого решения в виде

$$U(\varphi) = \sum_{\nu, j}^{n, p} \int_{-\infty}^{\infty} G_0^{\nu j}(\tau, \varphi) q_{\nu j}(\varphi_\tau) \, d\tau. \tag{6.9}$$

ıцествование и принадлежность функции $U(\varphi)$ пространству $C'(\mathcal{T}_m, a)$ вается с помощью неравенства (6.7) рассуждениями, приведенными в [12] казательстве основных соотношений для функции Грина $G_0(\tau, \varphi)$. Ос- показать, что

$$U(\varphi_t) = \sum_{\nu, j}^{n, p} \int_{-\infty}^{\infty} G_0^{\nu j}(\tau, \varphi_t) q_{\nu j}(\varphi_\tau(\varphi_t)) \, d\tau \tag{6.10}$$

удовлетворяет вместе с $\varphi_t$ системе (6.1). Имеем

$$U^{\nu j}(\varphi_t) = \int_{-\infty}^{0} \Omega_\tau^0(\varphi_t; A) C^{\nu j}(\varphi_\tau(\varphi_t)) \Omega_\tau^0(\varphi_t; B) q_{\nu j}(\varphi_\tau(\varphi_t))\, d\tau -$$

$$- \int_0^\infty \Omega_\tau^0(\varphi_t; A) C_1^{\nu j}(\varphi_\tau(\varphi_t)) \Omega_0^\tau(\varphi_t; B) q_{\nu j}(\varphi_\tau(\varphi_t))\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \Omega_\tau^t(A) C^{\nu j}(\varphi_\tau) \Omega_t^\tau(B) q_{\nu j}(\varphi_\tau)\, d\tau -$$

$$- \int_t^\infty \Omega_\tau^t(A) C_1^{\nu j}(\varphi_\tau) \Omega_t^\tau(B) q_{\nu j}(\varphi_\tau)\, d\tau, \tag{6.11}$$

поэтому дифференцируя (6.11) по $t$, получаем

$$\frac{dU^{ij}(\varphi_t)}{dt} = [C^{\nu j}(\varphi_t) + C_1^{\nu j}(\varphi_t)]\, q_{\nu j}(\varphi_t) + A(\varphi_t) U^{\nu j}(\varphi_t) - U^{\nu j}(\varphi_t) B(\varphi_t) =$$

$$= A(\varphi_t) U^{\nu j}(\varphi_t) - U^{\nu j}(\varphi_t) B(\varphi_t) + H_{\nu j} q_{\nu j}(\varphi_t). \tag{6.12}$$

Суммируя равенства (6.12), доказываем требуемое. Покажем, что введенное понятие функции Грина системы уравнений (6.2) согласовано с понятием функции Грина соответствующего (6.2) линейного расширения динамической системы на торе. Пусть

$$X = [x_1, \dots, x_p], \quad Q = [Q_1, \dots, Q_p], \tag{6.13}$$

$x_\nu$ и $Q_\nu$ — столбцы матриц $X$ и $Q$ соответственно, $\nu = \overline{1, p}$. Образуем из них столбцевые векторы

$$\hat{X} = \mathrm{colon}\,[x_1, \dots, x_p], \quad \hat{Q} = \mathrm{colon}\,[Q_1, \dots, Q_p],$$

где colon означает, что векторы $x_1, \dots, x_p$ и $Q_1, \dots, Q_p$ записаны один под другим в порядке следования.

Система уравнений (6.1) переписывается в виде линейного расширения динамической системы на торе

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{d\hat{x}}{dt} = P(\varphi)\hat{x} + \hat{Q}(\varphi), \tag{6.14}$$

где $P(\varphi)$ — $np$-мерная квадратная матрица, определяемая по $A$ и $B$. Фундаментальную матрицу решений соответствующей (6.14) однородной системы обозначим через $\Omega_0^t(A, B)$, а ее функцию Грина через $G_0(\tau, \varphi; A, B)$. Векторы

$$\hat{H}_{\nu j}, \quad \nu = \overline{1, n}, \;\; j = \overline{1, p}, \tag{6.15}$$

образованные из матрицы (6.3), задают полный набор единичных ортов пространства $R^{np}$, поэтому фундаментальной матрице решений $\Omega_0^t(A, B)$ соответствует система решений

$$\Omega_0^t(A) H_{\nu j} \Omega_t^0(B), \quad \nu = \overline{1, n}, \;\; j = \overline{1, p}, \tag{6.16}$$

системы (6.2), при этом соответствие состоит в том, что (6.16) есть $\Omega_0^t(A, B)\hat{H}_{\nu j}$, представленное в виде матрицы (6.16):

$$\Omega_0^t(A) H_{\nu j} \Omega_t^0(B) = [(\Omega_0^t(A, B)\hat{H}_{\nu j})_1, \dots, (\Omega_0^t(A, B)\hat{H}_{\nu j})_p],$$

где $(\Omega_0^t(A,B)\hat{H}_{\nu j})_1, \ldots, (\Omega_0^t(A,B)\hat{H}_{\nu j})_p$ — $n$-мерные блоки решения $\Omega_0^t(A,B)\hat{H}_{\nu j}$.

Пусть

$$C(\varphi) = G_0(0, \varphi; A, B). \tag{6.17}$$

Определим по $C(\varphi)$ систему матриц

$$\begin{aligned} C^{\nu j}(\varphi) &= [(C(\varphi)\hat{H}_{\nu j})_1, \ldots, (C(\varphi)\hat{H}_{\nu j})_p], \\ C_1^{\nu j}(\varphi) &= [(C_1(\varphi)\hat{H}_{\nu j})_1, \ldots, (C_1(\varphi)\hat{H}_{\nu j})_p] \end{aligned} \tag{6.18}$$

для каждого $\nu = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, p}$. Из того, что

$$C(\varphi)\hat{H}_{\nu j} + C_1(\varphi)\hat{H}_{\nu j} = \hat{H}_{\nu j}, \tag{6.19}$$

для матриц (6.18) следует соотношение

$$C^{\nu j}(\varphi) + C_1^{\nu j}(\varphi) = H_{\nu j}, \quad \nu = \overline{1, n}, \ j = \overline{1, p}. \tag{6.20}$$

Из неравенства для функции Грина $G_0(\tau, \varphi; A, B)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \| G_0(\tau, \varphi; A, B) \| \, d\tau \le K \tag{6.21}$$

следуют аналогичные неравенства для $G_0(\tau, \varphi; A, B)\hat{H}_{\nu j}$. Из вида функции

$$G_t(\tau, \varphi; A, B)\hat{H}_{\nu j} = \begin{cases} \Omega_\tau^t(A,B)C(\varphi_\tau)\hat{H}_{\nu j} & \text{при } t \ge \tau; \\ -\Omega_\tau^t(A,B)C_1(\varphi_\tau)\hat{H}_{\nu j} & \text{при } t < \tau, \end{cases}$$

являющейся решением однородной системы уравнений (6.14), следует, что матрица

$$G_t^{\nu j}(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^t(A)C^{\nu j}(\varphi_\tau)\Omega_t^\tau(B) & \text{при } t \ge \tau; \\ -\Omega_\tau^t(A)C_1^{\nu j}(\varphi_\tau)\,\Omega_t^\tau(B) & \text{при } t < \tau \end{cases}$$

совпадает с матрицей

$$[(G_t(\tau, \varphi; A, B)\hat{H}_{\nu j})_1, \ldots, (G_t(\tau, \varphi; A, B)\hat{H}_{\nu j})_p].$$

Поэтому

$$G_0^{\nu j}(\tau, \varphi) = [(G_0(\tau, \varphi; A, B)\hat{H}_{\nu j})_1, \ldots, (G_0(\tau, \varphi; A, B)\hat{H}_{\nu j})_p],$$

что обеспечивает для $G_0^{\nu j}(\tau, \varphi)$ выполнение неравенств (6.7).

Согласно изложенному, из существования функции Грина $G_0(\tau, \varphi; A, B)$ следует существование функции Грина $G_0(\tau, \varphi)$ системы (6.2). Обратное очевидно. Отсюда вытекает взаимно однозначное соответствие между функцией Грина, определенной для системы (6.2) выше, и функцией Грина соответствующего (6.2) линейного расширения динамической системы на торе.

Очевидно также, что существование функции Грина $G_0(\tau, \varphi)$ системы (6.2) с показателем гладкости $l$ гарантирует принадлежность решения $U(\varphi)$ системы (6.1) пространству $C^l(\mathcal{T}_m)$ при $l \ge 1$. Из этого следует приводимое ниже решение задачи о блочной диагонализации уравнения в вариациях (2.5) системы (1.7).

**Теорема 9.** *Пусть система уравнений*

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{d\Phi}{dt} + \Phi P(\varphi) = \frac{\partial a(\varphi)}{\partial \varphi}\Phi \tag{6.22}$$

*имеет функцию Грина с показателем гладкости* $l$. *Тогда система уравнений в вариациях* (2.5) *и блочно-диагональная система уравнений*

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial a(\varphi_t)}{\partial\varphi}\theta, \quad \frac{dg}{dt} = P(\varphi_t)g \tag{6.23}$$

$C^l(\mathcal{T}_m)$-*эквивалентны*, $r-2 \geq l \geq 0$.

Действительно, так как $\partial a/\partial\varphi \in C^{r-2}(\mathcal{T}_m)$, то существование функции Грина системы (6.23) возможно лишь с показателем гладкости $r-2 \geq l$. Если такая функция существует, то существует в $C^l(\mathcal{T}_m)$ решение уравнения (2.24) и замена (2.32), определяемая этим уравнением, осуществляет $C^l(\mathcal{T}_m)$-эквивалентность систем (2.5) и (6.23).

1. *Самойленко А. М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении // Изв. АН СССР. Сер. Мат. – 1970. – **34**, № 6. – С. 1219–1240.
2. *Poincaré H.* Sur le probleme des trois corps et les équation de la Dynamique // Acta math. – 1889. – **13**.
3. *Birkhoff G.* Dynamical systems. – New York, 1927.
4. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний. – Киев: Изд-во ВУАН, 1934. – 112 с.
5. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. – Киев: Изд-во АН УССР, 1945. – 137 с.
6. *Боголюбов Н. Н.* О квазипериодических решениях в задачах нелинейной механики // Тр. первой летн. мат. школы. – Киев: Наук. думка, 1964. – Т. 1. – С. 11–101.
7. *Mozer J.* A new technique for the construction of solutions of nonlinear differential equations // Proc. Nat. Acad. Sci. – 1961. – **47**, № 11. – P. 1824–1831.
8. *Mozer J.* On invariant curves of areapreserving mappings of an annulus // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl. – 1962. – **11a**, № 1. – P. 1–20.
9. *Sacker R. J.* A new approach to the perturbation theory of invariant surfaces // Communs Pure and Appl. Math. – 1962. – **18**, № 4. – P. 717–732.
10. *Sacker R. J.* A perturbation theorem for invariant manifolds and Hölder continuity // J. Math. and Mech. – 1969. – **18**, № 8. – P. 705–761.
11. *Самойленко А. М.* К теории возмущения инвариантных многообразий динамических систем // Тр. V Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. – Т. 1: Аналитические методы. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1970. – С. 495–499.
12. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 302 с.
13. *Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Экспоненциальная дихотомия инвариантного тора динамических систем // Дифференц. уравнения. – 1979. – **15**, № 8. – С. 1434–1444.
14. *Кулик В. Л.* Квадратичные формы и дихотомия решений систем линейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 1. – С. 43–49.
15. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 270с.
16. *Самойленко А. М.* Квазипериодические решения систем линейных алгебраических уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Аналит. методы исслед. решений нелинейн. дифференц. уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1975. – С. 5–26.
17. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Линь В. Я., Локуциевский О. В.* О топологических причинах аномального поведения некоторых почти-периодических систем // Пробл. асимптот. теории нелинейн. колебаний. – Киев: Наук. думка, 1977. – С. 54–61.
18. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Линь В. Я., Локуциевский О. В.* О топологических препятствиях к блочной диагонализации некоторых экспоненциально-расщепленных почти-периодических систем. – М., 1977. – 25 с. – (Препринт / АН СССР. Ин-т прикл. математики; № 58).
19. *Богданов Ю. С.* О преобразовании переменной матрицы к каноническому виду // Докл. АН БССР. – 1963. – **7**, № 3. – С. 152–154.
20. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. – М.: Мир, 1969. – 447 с.
21. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 575 с.
22. *Главан В. А.* Исследование линейных расширений динамических систем в критическом случае: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1992. – 20 с.
23. *Самойленко А. М., Главан В. А.* Линейные почти периодические системы, допускающие почти периодический процесс ортогонализации // Докл. АН СССР. – 1992. – **322**, № 5. – С. 855–858.
24. *Бронштейн И. У.,Копанский А. Я.* Инвариантное многообразие и нормальные формы. – Кишинев: Штиинца, 1992. – 330 с.

Получено 06.05.94