УДК 517. 5

Н. Л. Пачулиа, д-р физ.-мат. наук (Сухум. ун-т)

О ТОЧКАХ СИЛЬНОЙ СУММИРУЕМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ

Strong means of deviations of partial sums of expansions of functions f in polynomial type functions are studied.

Вивчаються сильні середні відхилень частинних сум розкладів функцій f за системами функцій поліноміального виду.

1. Введение. Пусть $\{\varphi_n\}_{n\in N_0}$, $N_0 = \{0\} \cup N$ — система функций полиномиального вида, ортонормированная неотрицательным весом α на $[a, b]$ [1], $p > 1$,

$$L_\alpha^{(p)} = L_\alpha^{(p)}[a,b] = \left\{ f: \int_a^b |f(x)|^p \alpha(x)dx < \infty \right\},$$

$L_\alpha = L_\alpha^{(1)}$, $L = L_1$, $L^{(p)} = L_1^{(p)}$, $S_n(f, x)$ — частная сумма порядка n ортогонального разложения функции f по системам функций $\{\varphi_n\}_{n\in N_0}$, т. е. ряда

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \tag{1}$$

c_n — коэффициенты разложения ряда (1)

$$c_n(f) = \int_a^b f(t)\varphi_n(t)\alpha(t)dt, \tag{2}$$

$\rho_n(f; x) = f(x) - S_n(f; x)$ — соответствующее уклонение.

Сильные степенные средние уклонений с пропусками имеют вид

$$M_{m,n}^{(q)}(f; x) = \left\{ \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^{m} \left|\rho_{\nu_j}(f; x)\right|^q \right\}^{1/q},$$

где $q > 0$, $n \in \boldsymbol{N}$ и $\forall j = \overline{0, m}$ $\nu_j \in N_0 \cap [n, 2n]$.

В работе [2] в случае рядов Фурье, 2π-периодических функций f по тригонометрической системе функций доказано утверждение: если x, p — точка Лебега функции $f \in L^{(p)}, p > 1$, то для любого $q > 0$ равномерно относительно m

$$\lim_{n\to\infty} M_{m,n}^{(q)}(f; x)\left(\ln \frac{ne}{m+1} \right)^{-1} = 0. \tag{3}$$

В настоящей работе получен аналог данного результата для рядов вида (1) и дано его приложение при решении задачи φ-сильного суммирования.

2. Основные результаты. Пусть $[c, d] \subset [a, b]$, $E = [a, b] \setminus [c, d]$ и

$$\tau_{h,p}(f; x) = \left\{ \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x+h} |f(t) - f(x)|^p \alpha(t)dt \right\}^{1/p}, \quad p > 1, \quad x \in (c, d).$$

В принятых обозначениях справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

а) *существует число $l > 0$ такое, что* $\forall x \in [c, d] \subset [a, b]$

$$|\varphi_n(x)| \le l, \quad 0 < \alpha(x) \le l; \tag{4}$$

б) *для* $p > 1$ $f \in L_\alpha^{(p)}[c, d] \cap L_\alpha^{(2)}(E)$.

Тогда: 1) *если в точке* $x \in (c, d)$

$$\lim_{h \to 0} \tau_{h,p}(f; x) = 0, \tag{5}$$

то для любого $q > 0$ *равномерно относительно* m *справедливо равенство* (3);

2) *если же равенство* (5) *выполнено равномерно на замкнутом множестве* $T \subset (c, d)$, *то равномерно относительно* m *и* $x \in T$ *справедливо равенство* (3).

Теорема 1 имеет ряд приложений в теории сильного суммирования рядов вида (1). К примеру, приведем результаты, касающиеся сильного суммирования ряда (1) в p-точках x Лебега функции $f \in L_\alpha^{(p)}$ при $p > 1$. Для формулировки этих результатов введем обозначения.

Пусть

$$\varepsilon_{k,q}(x) = \sup_{\substack{n \ge k \\ m}} M_{m,n}^{(q)}(f; x)\left(\ln \frac{ne}{m+1}\right)^{-1}. \tag{6}$$

Очевидно, что если $x \in (c, d)$ удовлетворяет равенству (5), то $\varepsilon_{kq}(x)$, убывая относительно параметра k, стремится к нулю при $k \to \infty$.

Далее, пусть

$$\Phi_0 = \{\varphi \ge 0, \ x \in [0, \infty), \ \lim_{u \to 0} \varphi(u) = \varphi(0) = 0\},$$

$$\Phi_1 = \{\varphi \in \Phi_0 : \forall \delta > 0, \ \varphi_*(\delta) = \inf_{u \ge \delta} \varphi(u) > 0\},$$

$$\Phi_2 = \{\varphi \in \Phi_0 : \forall \delta > 0, \ \varphi^*(\delta) = \sup_{u \le \delta} \varphi(u) < \infty\},$$

$$\Phi = \{\varphi \in \Phi_0 : \varphi\uparrow; \varphi(2u) \le A\varphi(u), \ u \in (0, 1); \ \ln\varphi(u) = 0(u), \ u \to \infty\},$$

$$\Phi_3 = \Phi_1 \cap \Phi_2.$$

Для произвольной неотрицательной последовательности $\{\lambda n\}_{n \in N_0}$ положим

$$d_{\nu,n} = \left\{\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \lambda_k^\nu\right\}^{1/\nu}, \quad \nu > 0.$$

Через P_r, $r > 1$, обозначим множество всех последовательностей $\{\lambda n\}_{n \in N_0}$, удовлетворяющих неравенствам $d_{r,n} \le A\, 2^{-n/r_1} d_{1,n-1}$, где число A не зависит от n, $r_1 = r/(r-1)$; через B_r, $r > 1$, — множество неотрицательных матриц $\left(\lambda_k^{(n)}\right)$, определяющих регулярные методы суммирования рядов, если при любом $n \in N_0$ последовательность чисел $\left\{\lambda_k^{(n)}\right\}_{k \in N_0} \in P_r$, причем A не зависит от n.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* а), б) *теоремы* 1, *функция* $\varphi \in \Phi$ *и при некотором* $r > 1$ *последовательность* $\{\lambda_n\}_{n \in N_0} \in P_r$. *Тогда:*

1) *если в точке* $x \in (c, d)$ *выполнено равенство* (5), *то в этой точке*

$$H_{\varphi,\lambda}(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \varphi(|\rho_k(f; x)|) \le A \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \varphi(\varepsilon_{k,1}(x)); \tag{7}$$

2) *если равенство* (5) *выполнено равномерно на замкнутом множестве* $T \subset \subset (c, d)$, *то*

$$\| H_{\varphi,\lambda}(f; x)\|_{C(T)} \leq A \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \varphi(\varepsilon_k), \tag{8}$$

где $\varepsilon_{k,q}(x)$ *определено формулой* (6), *а*

$$\varepsilon_k = \varepsilon_{k,1} = \| \varepsilon_{k,1}(x)\|_{C(T)} = \max_{x \in T} |\varepsilon_{k,1}(x)|. \tag{9}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* а), б) *теоремы* 1, *функция* $\varphi \in \Phi_2$ *такая, что*

$$\ln \varphi(u) = O(u), \quad u \to \infty, \tag{10}$$

и при $r > 1$ *матрица* $\left(\lambda_k^{(n)}\right) \in B_r$. *Тогда:*

1) *если в точке* $x \in (c, d)$ *выполнено равенство* (5), *то в этой точке*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(n)} \varphi(|\rho_k(f; x)|) = 0; \tag{11}$$

2) *если условие* (5) *выполнено равномерно на замкнутом множестве* $T \subset (c, d)$, *то равенство* (11) *выполняется равномерно на множестве* T.

Отметим, что условие (10) в теоремах 2 и 3, вообще говоря, ослабить нельзя. Действительно, если $\overline{\lim\limits_{u \to \infty}}\, u^{-1} \ln \varphi(u) = +\infty$, то существует [5] 2π-периодическая непрерывная функция f с рядом (1), являющимся рядом Фурье по тригонометрической системе, и матрица $\left(\lambda_k^{(n)}\right)$, для которых в некоторой точке x_0 соотношения (7) и (11) не выполняются.

***Доказательство теоремы* 1.** Заметим, что при $m = n$ величина $M_{n,n}^{(q)}(\cdot)$ совпадает с сильными степенными средними Валле-Пуссена ряда (1) и справедливость первой части теоремы (1) следует из соответствующего результата Тандори [3], а при $m = 0$ и $\nu_0 = 0$ величина $M_{0,n}^{(q)}(f; x) = |\rho_n(f; x)|$. Тогда равенство (3) эквивалентно соотношению

$$\lim_{n \to \infty} \rho_n(f; x)(\ln n)^{-1} = 0, \tag{12}$$

справедливость которого в p-точках x Лебега функции f проверяется так же, как и в случае рядов Фурье по тригонометрической системе функций [4, с. 144].

Далее, используя неравенство Гельдера в точке $x \in (c, d)$, в которой f принимает конечное значение, для $0 < h \leq h_1 \leq \min\{x - c, d - x\}$ при $p_1 \in [1, p]$ убеждаемся в справедливости соотношения

$$\tau_{h,p_1}(f; x) \leq l \tau_{h,p}(f; x). \tag{13}$$

Поэтому, если условие (3) выполнено для $p > 1$, то оно выполняется для любого $p_1 \in [1, p]$. Отсюда следует, что доказательство теоремы 1 достаточно провести для $p \leq 2$.

Сначала положим $q = p / p - 1$. На основании условия (5) для любого $\varepsilon > 0$ существует положительное число $h_0 \leq h_1$ такое, что при $h \in (0, h_0]$

$$\tau_{h,p}(f; x) < \varepsilon. \tag{14}$$

В дальнейшем доказательство теоремы 1 разобьем на два случая.

Пусть $m+1 \le h_0^{-1}$. Тогда на основании равенства (12) существует число $k_0 \in N$ такое, что при $n \ge k_0$ и $k \in [n, 2n]$ имеем

$$|\rho_k(f;x)| \le \varepsilon\left(\ln\frac{2}{h_0}\right)^{-1} \ln k \le \varepsilon\left(\ln\frac{2}{h_0}\right)^{-1} \ln 2n \le \varepsilon \ln\frac{ne}{m+1}. \qquad (15)$$

Таким образом, при $n \ge k_0$ и $m+1 \le h_0^{-1}$ с учетом того, что $k_\nu \in [n, 2n]$, $\forall\, \nu = \overline{1,m}$ из неравенства (15) следует

$$M_{m,n}^{(q)}(f;x) \le \varepsilon \ln\frac{ne}{m+1}.$$

Это соотношение доказывает справедливость (3).

Пусть, теперь $m+1 > h_0^{-1}$. Представляя уклонения $\rho_{\nu_j}(f;x)$ через интегралы и используя неравенство Минковского, будем иметь

$$M_{m,n}^{(q)}(f;x) = \left\{\frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}\left|\int_a^b [f(t)-f(x)]K_{\nu_j}(t;x)\alpha(t)\,dt\right|^q\right\}^{1/q} \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{8}\left\{\frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}\left|\int_{\mu_i}[f(t)-f(x)]K_{\nu_j}(t;x)\alpha(t)\,dt\right|^q\right\}^{1/q} = \sum_{i=1}^{8} M_{m,n}^{q,i}(f;x), \qquad (16)$$

где

$$\mu_1 = [a,c],\ \ \mu_2 = [c, x-\frac{1}{m+1}],\ \ \mu_3 = [x-\frac{1}{m+1}, x-\frac{1}{n}],\ \ \mu_4 = [x-\frac{1}{n}, x],$$

$$\mu_5 = [x, x+\frac{1}{n}],\ \ \mu_6 = [x+\frac{1}{n}, x+\frac{1}{m+1}],\ \ \mu_7 = [x+\frac{1}{m+1}, d],\ \ \mu_8 = [d,b],$$

$$K_\nu(t;x) = \sum_{i=0}^{\nu}\varphi_i(t)\varphi_i(x).$$

По определению системы функций полиномиального вида ядро системы имеет вид

$$K_\nu(t;x) = \sum_{k=1}^{k_0} F_k(t;x)\sum_{i,\gamma=-\gamma_0}^{\gamma_0} c_{i,\gamma}^{\nu,k}\,\varphi_{i+\nu}(t)\varphi_{\gamma+\nu}(x), \qquad (17)$$

где функция $\varphi_{i+\nu}$ с отрицательным индексом считается тождественно равной нулю,

$$|F_k(t;x)| \le A|(t-x)|^{-1}, \qquad (18)$$

$c_{i,\gamma}^{\nu,k} \le l$, k_0 и γ_0 — натуральные числа, не зависящие от n.

Для доказательства первой части теоремы 1 достаточно показать справедливость равенства

$$M_{m,n}^{q,i}(f;x) = o\left(\ln\frac{ne}{m+1}\right), \quad n\to\infty, \qquad (19)$$

при $i = \overline{5,8}$, поскольку остальные слагаемые в первой части соотношения (16) проверяются аналогично.

Оценим величину $M_{m,n}^{q,5}(\cdot)$. Используя условие а), имеем

$$|K_\nu(t;x)| \le l^2(\nu+1). \tag{20}$$

Тогда с учетом соотношения (14) будем иметь

$$M_{m,n}^{q,5}(f;x) \le \left\{\frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}\left[\int_{\mu_5}(f(t)-f(x))K_{\nu_j}(t;x)\alpha(t)\,dt\right]^q\right\}^{1/q} \le$$

$$\le l^2(2n+1)\int_{\mu_5}|f(t)-f(x)|\alpha(t)\,dt \le 3l^2\varepsilon. \tag{21}$$

Учитывая соотношение (18), заметим, что

$$|K_\nu(t;x)| \le A_0|(t-x)|^{-1} \quad \forall\, t, x \in [c,d]. \tag{22}$$

Тогда

$$M_{m,n}^{q,6}(f;x) \le A_0\int_{\mu_6}\left|\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\right|\alpha(t)\,dt.$$

Производя замену переменной, а затем интегрируя по частям, в силу соотношения (14) будем иметь

$$M_{m,n}^{q,6}(f;x) \le A_0\left\{\tau_{1/(m+1),1}(x)+\int_{1/n}^{1/m+1}\frac{1}{t}\tau_{t,1}(x)\,dt\right\} \le A_0\varepsilon\ln\frac{ne}{m+1}. \tag{23}$$

Разбивая на части интегралы в выражении $M_{m,n}^{q,7}(\cdot)$ и используя неравенство Минковского, получаем

$$M_{m,n}^{q,7}(f;x) \le \left\{\frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}\left|\int_{\mu_7^{(1)}}[(f(t)-f(x)]K_{\nu_j}(t;x)\alpha(t)\,dt\right|^q\right\}^{1/q} +$$

$$+\left\{\frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}\left|\int_{\mu_7^{(2)}}[(f(t)-f(x)]K_{\nu_j}(t;x)\alpha(t)\,dt\right|^q\right\}^{1/q} = \sum_{i=1}^{2}N_{m,n}^{(i)}(x),$$

где

$$\mu_7^{(1)} = \left[x+\frac{1}{m+1}, x+h_0\right], \quad \mu_7^{(2)} = [x+h_0, d].$$

Введем в рассмотрение функции

$$\Phi_k(t) = \begin{cases}[f(t)-f(x)]F_k(t), & t\in\mu_7^{(1)};\\ 0, & t\in[a,b]\setminus\mu_7^{(1)},\ k=\overline{1,k_0}.\end{cases} \tag{24}$$

Ясно, что из $f\in L_\alpha^{(p)}[c,d]$ следует $\Phi_k\in L_\alpha^{(p)}[c,d]$.

Представляя ядро $K_\nu(t;x)$ по формуле (17), а затем используя неравенство Минковского, находим

$$N_{m,n}^{(1)}(f;x) = \left\{\frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}\left|\sum_{k=1}^{k_0}\sum_{i,\gamma=-\gamma_0}^{\gamma_0}c_{i,\gamma}^{\nu_j,k}\varphi_{\gamma+\nu_j}(x)a_{i+\nu_j}(\Phi_k)\right|^q\right\}^{1/q} \le$$

$$\leq l^2 \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{i=-\gamma_0}^{\gamma_0} \left\{ \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^{m} \left| a_{i+\nu_j}(\Phi_k) \right|^q \right\}^{1/q} . \tag{25}$$

где $a_{i+\nu_j}(\cdot)$ определены формулой (2).

Поскольку система функций $\{\varphi_n\}_{n \in N_0}$ удовлетворяет условию (4) и $\Phi_k(t) = 0$ на E, то на основании дополнения [3] к неравенству Риса [4, с.212] имеем

$$\left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \left| a_{i+\nu_j}(\Phi_k) \right|^q \right\}^{1/q} \leq A \left\{ \int_a^b \left| \Phi_k(t) \right|^p \alpha(t) dt \right\}^{1/q} . \tag{26}$$

Тогда, учитывая соотношение (18), из неравенств (25), (26) получаем

$$(m+1)^{1/q} N_{m,n}^{(1)}(x) \leq A_1 \left\{ \int_{\mu_7^{(1)}} \left| \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \right|^p \alpha(t) dt \right\}^{1/p} .$$

Производя замену переменной, а затем интегрируя по частям, в силу (14) имеем

$$(m+1)^{1/q} N_{m,n}^{(1)}(x) \leq A_1 \left\{ \int_{1/(m+1)}^{h_0} t^{-p} | f(x+t) - f(x) |^p \alpha(x+t) dt \right\}^{1/p} \leq$$

$$\leq A_1 \left\{ h_0^{1-p} \tau_{h_0,p}^p (f; x) + p \int_{1/(m+1)}^{h_0} t^{-p} \tau_{t,p}^p (f; x) dt \right\}^{1/p} \leq$$

$$\leq A_1 \varepsilon \left\{ h_0^{1-p} + p \int_{1/(m+1)}^{h_0} t^{-p} dt \right\}^{1/p} \leq A_1 \varepsilon \left\{ h_0^{1-p} + \frac{p}{p-1} (m+1)^{p-1} \right\}^{1/p}$$

Отсюда следует,что

$$N_{m,n}^{(1)}(x) \leq A_1 \varepsilon \left\{ (h_0 (m+1)^{1-p} + q \right\}^{1/p} \leq A_1 (q+1) \varepsilon$$

Определяя вспомогательные функции $\tilde{\Phi}_k, k = \overline{1, k_0}$, по формулам (24) с заменой $\mu_7^{(1)}$ на $\mu_7^{(2)}$ и рассуждая как при выводе соотношения (25), получаем

$$N_{m,n}^{(2)}(x) \leq l^2 \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{i=-\gamma_0}^{\gamma_0} \left\{ \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^{m} \left| a_{i+\nu_j}(\tilde{\Phi}_k) \right|^q \right\}^{1/q} ,$$

где $a_\nu(\cdot)$ определены формулой (2).

Так как $t \in [x + h_0, d]$, то $[t - x] \geq h_0$. Следовательно, $| F_k(t; x)| \leq A h_0^{-1}$. Поэтому из $f \in L_\alpha^{(p)}[c, d]$ следует $\tilde{\Phi}_k \in L_\alpha^{(p)}[a, b]$. Используя дополнение к неравенству Риса из работы [3], находим

$$\left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} \left| a_\nu(\tilde{\Phi}_k) \right|^q \right\}^{1/q} \leq A \left\{ \int_a^b \left| (\tilde{\Phi}_k(t) \right|^p \alpha(t) dt \right\}^{1/p} \leq$$

$$\leq \frac{A_0}{h_0}\left\{\int_c^d |f(t)-f(x)|^p \alpha(t)dt\right\}^{1/p} < \infty. \tag{27}$$

Отсюда следует

$$\lim_{\nu\to\infty} a_\nu(\tilde{\Phi}_k) = 0. \tag{28}$$

Таким образом, существует число $n \geq h_0^{-1}$ такое, что при $n \geq n_0$

$$N_{m,n}^{(2)}(x) < \varepsilon.$$

Рассуждая аналогично выводу равенства (28) и при этом используя неравенство Бесселя вместо неравенства Риса, получаем

$$M_{m,n}^{q,8}(x) < \varepsilon.$$

Итак, первое утверждение теоремы 1 для $q = p/(p-1)$ доказана. Поскольку величина $M_{n,n}^{(q)}(\cdot)$ не убывает относительно параметра q, равенство (3) справедливо для каждого $q \in (0, p/(p-1)]$.

Пусть теперь $q < p/(p-1)$. Тогда $p_1 = q/(q-1) < p$. На основании неравенства (13) точка x будет p_1-точкой Лебега функции f. Согласно доказанной выше части теоремы 1 соотношение (3) выполнено для данного q. Этим первое утверждение теоремы 1 доказано.

Из доказательства первого утверждения теоремы 1 можно сделать вывод о справедливости ее второго утверждения. Теорема 1 доказана.

В дальнейшем нам понадобится ряд лемм.

Лемма 1. *Пусть* $\varphi \in \Phi$, *условия* а) *и* б) *теоремы* 1 *выполнены. Тогда:*

1) *если в точке* $x \in (c, d)$ *выполняется соотношение* (5), *то в точке* x

$$D_n^{\varphi}(f; x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} \varphi(|\rho_k(f; x)|) \leq A\varphi(\varepsilon_n(x)); \tag{29}$$

2) *если равенство* (5) *выполняется равномерно на замкнутом множестве* $T \subset (c, d)$, *то*

$$\| D_n^{\varphi}(f; x) \|_{C(T)} \leq A\varphi(\varepsilon_n), \tag{30}$$

где числа ε_n *определены формулой* (9), *а* A *не зависит от* n.

Доказательство. Будем различать два случая. Пусть $\varepsilon_n(x) = 0$. Тогда из определения чисел $\varepsilon_n(x)$ следует $\rho_{\nu_j}(f; x) = 0 \ \forall \nu_j \in [n+1, 2n]$. Таким образом, соотношение (29) превращается в верное равенство.

Пусть теперь $\varepsilon_n(x) > 0$, $\gamma \in N$,

$$\Delta_{\gamma,n} = \{k \in N \cap [n+1, 2n]: |\rho_k(f; x)| \geq \gamma\varepsilon_n(x)\},$$

$$Q_{\gamma,n} = \{k \in \Delta_{\gamma-1,n}: |\rho_k(f; x)| \geq \gamma\varepsilon_n(x)\},$$

$$\Gamma = \{\gamma \in N: Q_{\gamma,n} \neq \varnothing\}.$$

Группируя слагаемые по множествам $Q_{\gamma,n}$, имеем

$$D_n^{\varphi}(f; x) \leq \frac{1}{n+1}\sum_{\gamma\in\Gamma}\sum_{k\in Q_{\gamma,n}} \varphi(|\rho_k(f; x)|) \leq \frac{1}{n+1}\sum_{\gamma\in\Gamma}\sum_{k\in Q_{\gamma,n}} \varphi(\gamma\varepsilon_n(x))|Q_{\gamma,n}|. \tag{31}$$

где $|Q_{\gamma,n}|$ — мощность множества $Q_{\gamma,n}$. Так как $Q_{\gamma,n} \subset \Delta_{\gamma-1,n}$ то $|Q_{\gamma,n}| \leq$ $\leq |\Delta_{\gamma-1,n}|$. Очевидно, что

$$M_{m,n}^{(1)}(f; x) \leq \varepsilon_n(x) \ln \frac{ne}{m+1}. \tag{32}$$

Из соотношения (32) учитывая,что $k \in \Delta_{\gamma-1,n}$, получаем

$$(\gamma-1)\varepsilon_n(x) \leq M_{m,n}^{(1)}(f; x) \leq \varepsilon_n(x) \ln \frac{ne}{m+1}.$$

Отсюда

$$m+1 \leq 2e^2 n \exp(-\gamma). \tag{33}$$

Из соотношений (31) и (33) следует

$$D_n^{\varphi}(f; x) \leq 2e^2 \sum_{\gamma \in \Gamma} \varphi(\gamma \varepsilon_n(x)) \exp(-\gamma). \tag{34}$$

Тотик [7] доказал, что при $\varphi \in \Phi$

$$\sum_{\nu \in N} \varphi(\nu u) \exp(-\nu) \leq A\varphi(u) \quad \forall\, u \in [0, \sigma], \quad \sigma < 1. \tag{35}$$

Используя неравенство (35) и учитывая, что в силу теоремы 1 величина $\varepsilon_n(x)$ из соотношения (34) стремится к нулю, получаем неравенство (29).

Неравенство (30) доказывается аналогично, при этом $\varepsilon_n(x)$ меняется на ε_n. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть условия леммы* 1 *выполнены и при некотором* $r > 1$ *последовательность* $\{\lambda_n\}_{n \in N_0} \in P_r$. *Тогда:*

1) *если в точке* $x \in (c, d)$ *выполняется равенство* (5), *то*

$$U_n(f; x) = \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \lambda_k \varphi(|\rho_k(f; x)|) \leq A \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \lambda_k \varphi(\varepsilon_k(x)); \tag{36}$$

2) *если равенство* (5) *выполнено равномерно на замкнутом множестве* $T \subset$ $\subset (c, d)$, *то*

$$\| U_n(f; x)\|_{C(T)} \leq A \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \lambda_k \varphi(\varepsilon_k), \tag{37}$$

где числа ε_k *определены формулой* (9).

Доказательство. Используя неравенство Гельдера и учитывая, что $\{\lambda_k\}_{k \in N_0} \in P_r$, получаем

$$U_n(f; x) \leq \left\{ \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \lambda_k^r \right\}^{1/r} \left\{ \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \varphi^{r_1}(|\rho_k(f; x)|) \right\}^{1/r_1} \leq$$

$$\leq \left\{ \frac{1}{2^n} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \varphi^{r_1}(|\rho_k(f; x)|) \right\}^{1/r_1} \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \lambda_k. \tag{38}$$

Так как из условия $\varphi \in \Phi$ следует $\varphi^{r_1} \in \Phi$, $r_1 = r/(r-1)$, и $\varepsilon_k(x)$ не возрастает, то в силу леммы 1 будем иметь

$$U_n(f; x) \le A\varphi(\varepsilon_{2^n}(x)) \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \lambda_k \le A \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \lambda_k \varphi(\varepsilon_k(x)).$$

Справедливость соотношения (37) проверяется аналогично.

Лемма 3. *Пусть* $\varphi \in \Phi_2$, $\psi \in \Phi_1$, $\overline{\lim\limits_{u\to\infty}}\, \varphi(u)/\psi(u) < \infty$ *и при некотором* $r > 1$ *матрица* $\left(\lambda_k^{(n)}\right) \in B_r$. *Тогда:*

1) *если в точке* $x = x_0$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\in N_0} \lambda_k^{(n)} \psi(|(\rho_k(f; x))|) = 0, \tag{39}$$

то в этой точке выполняется равенство (11);

2) *если же равенство* (39) *выполнено равномерно на* $T \subset [c, d]$, *то равномерно относительно* $x \in T$ *выполняется равенство* (11).

***Доказательство леммы* 3** для случая рядов Фурье по тригонометрической системе функций приведено в работе [6], а в общем случае оно аналогично приведенному в [6].

***Доказательство теоремы* 2.** Группируя слагаемые в $H_{\varphi,\lambda}(f; x)$ по индексам $k \in [2^n + 1, 2^{n+1}]$ и используя соотношение (24), имеем

$$H_{\varphi,\lambda}(f; x) = \sum_{k=0}^{1} \lambda_k \varphi\left(\left|\rho_k(f; x)\right|\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \lambda_k \varphi\left(\left|\rho_k(f; x)\right|\right) \le$$

$$\le A + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \lambda_k \varphi\left(\varepsilon_k(x)\right) \le A_1 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \varphi\left(\varepsilon_k(x)\right),$$

что и доказывает справедливость соотношения (7).

Анализируя доказательство соотношения (25) и при этом меняя $\varepsilon_k(x)$ на ε_k, убеждаемся в справедливости (8). Теорема 2 доказана.

***Доказательство теоремы* 3.** Пусть $\psi(u) = e^u - 1$. Ясно, что $\psi \in \Phi$. Тогда, поскольку $\left(\lambda_k^{(n)}\right) \in B_r$, $\forall\, n \in N_0$, из леммы 2 следует

$$\sum_{k\in N_0} \lambda_k^{(n)} \psi\left(\left|\rho_k(f; x)\right|\right) \le A \sum_{k\in N_0} \lambda_k^{(n)} \psi\left(\varepsilon_k(x)\right). \tag{40}$$

На основании того, что в условиях теоремы 1 $\varepsilon_k(x)$, убывая, стремится к нулю, а матрица $\left(\lambda_k^{(n)}\right)$ определяет регулярный метод суммирования рядов, первая часть неравенства (40) стремится к нулю при $n \to \infty$. Отсюда следует соотношение (31). Тогда на основании леммы 3 следует справедливость соотношения (11). Вторая часть теоремы 3 доказывается аналогично.

***Замечание* 1.** Как известно [1], тригонометрическая и ортогональная система алгебраических полиномов (полиномы Якоби, в частности, полиномы Лежандра, полиномы Чебышева и др.) имеют полиномиальный вид. Следовательно, результаты, полученные в настоящей работе, справедливы для разложений функции f по указанным системам.

Пусть $\mathfrak{N} = \{n_j\}_{j\in N_0}$ — последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условию $(1 + c^{-1})\, n_j \le n_{j+1} \le c\, n_j$, $c > 1$, $j = 0, 1, \ldots,$ и для произвольной последовательности чисел $\{\lambda_k\}_{k\in N_0}$ положим

$$d_{n_j,\nu} = \left\{ \sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} \lambda_k^{\nu} \right\}^{1/\nu} \qquad \forall\, \nu > 0.$$

Далее, пусть

$$P_{r,\mathfrak{N}} = \left\{ (\lambda_k)_{k\in N_0} : d_{n_j,r} \le A n_j^{1/r-1} d_{n_{j-1},1},\, r>1 \right\},$$

$$B_{r,\mathfrak{N}} = \left\{ \left\{ \lambda_k^{(m)} \right\}_{m,k\in N_0} : \left\{ \lambda_k^{(m)} \right\}_{k\in N_0} \in P_{r,\mathfrak{N}} \;\; \forall\, m \in N_0 \right\}.$$

Очевидно, что при $n_j = 2^j$, $j \in N_0$, справедливо равенство $P_{r,\mathfrak{N}} = P_r$. Существует последовательность $\mathfrak{N}$, для которой P_r является собственной частью множества $P_{r,\mathfrak{N}}$. Действительно, полагая, к примеру, $n_j = 2^{3j-2}$, легко проверить, что из $\{\lambda_k\}_{k\in N_0} \in P_r$ следует $\{\lambda_k\}_{k\in N_0} \in P_{r,\mathfrak{N}}$.

Покажем, что существует $\{\lambda_k\}_{k\in N_0} \in P_r$, которая содержится в $P_{r,\mathfrak{N}}$. Для этого положим

$$\lambda_k = \begin{cases} 2^{-3j}, & k \in \left[2^{3j-1},\, 2^{3j}\right]; \\ 0, & k \in \left[2^{3j-2},\, 2^{3j+1}\right] \setminus \left[2^{3j-1},\, 2^{3j}\right] \quad \forall\, j = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Поскольку для любого $r > 0$ $d_{2^{3j-2},r} = 0$, а $\forall\, j \ge 1$ $d_{2^{3j-2},r} > 0$, то $\{\lambda_k\}_{k\in N_0} \notin$ $\notin P_r$.

Далее, имеем

$$d_{n_j,r} = \left\{ \sum_{k=2^{3j-2}+1}^{2^{3j-1}} \lambda_k^r \right\}^{1/r} = 2^{3j(1/r-1)+4} \sum_{k=2^{3j-5}+1}^{2^{3j-2}} \lambda_k = 32 n_j^{1/r-1} d_{n_{j-1},1}.$$

Следовательно, $\{\lambda_k\}_{k\in N_0} \in P_{r,\mathfrak{N}}$.

Замечания. **2.** Если в условиях теорем 2 и 3 заменить P_r и B_r соответственно на $P_{r,\mathfrak{N}}$ и $B_{r,\mathfrak{N}}$ то утверждения теорем останутся в силе. При этом доказательства теорем не изменятся.

3. Множеству $B_{r,\mathfrak{N}}$ принадлежат многие матрицы $\left\{\lambda_k^{(n)}\right\}$, определяющие регулярные методы суммирования. К примеру, метод средних арифметических, метод Абеля, логарифмический метод и др. Таким образом, из теоремы 3 следует, что разложение (1) φ-сильно суммируемо указанными выше методами в p-точках Лебега функции $f \in L_\alpha^p$ при $p > 1$.

1. *Алексич Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 408 с.
2. *Пачулиа Н. Л.* О сильной суммируемости рядов Фурье //Сообщ. АН ГССР. – 1989.– **133**, № 3. – С. 493–496.
3. *Tandori K.* Über die Cesàrosche Summierbarkeit der ortogonalen Polynomreihen.II // Acta math. – 1954.– **5**, № 3-4. – P.237–252.
4. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 932 с.
5. *Гоголадзе Л. Д.* О сильной суммируемости почти всюду // Мат. сб. – 1988.– **135** – С. 158–168.
6. *Гоголадзе Л. Д.* О суммировании кратных тригонометрических рядов и сопряженных функциях: Дис. ..... д-ра физ.-мат. наук. – Тбилиси, 1984.–256 с.
7. *Totik V.* Notes of Fourier series strong approximation // J. Approxim. Theory. – 1985. – **43**. – P.105–111.

Получено 06.07.92