УДК 517.968

А. Н. Урумбаев (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

К ВОПРОСУ О КОНЕЧНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЙ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

We show that the modified method for finite-dimensional approximation of solutions of Fredholm integral equations of the first kind presented in this paper is more economical than traditional methods for finite-dimensional approximation.

Показано, що наведений нижче модифікований метод наближеного розв'язування інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду є більш економічним у порівнянні з традиційними методами скінченновимірної апроксимації.

1. Пусть L_2 — гильбертово пространство функций, суммируемых в квадрате на $(-1,1)$ с обычной нормой $\|\cdot\|$ и скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$. Через L_2^r, $r=1,2,\ldots$, обозначим пространство функций $f(t)$, имеющих на $[-1,1]$ абсолютно непрерывные производные $f^{(i)}$ $(i=1,2,\ldots,r-1)$, $f^{(r)}\in L_2$, а

$$\|f\|_{L_2^r} \equiv \|f\|_r = \|f\| + \|f^{(1)}\| + \ldots + \|f^{(r)}\|.$$

В соотношениях общего характера примем $L_2 = L_2^0$. Обозначим через $\mathcal{L}(L_2^i, L_2^j)$ класс линейных ограниченных операторов из L_2^i в L_2^j с обычной нормой, которую будем записывать так: $\|\cdot\|_{i\to j}$, $i,j=0,1,2,\ldots$.

Кроме того, пусть $\overline{\mathfrak{H}}_\gamma^r$ — класс интегральных операторов Фредгольма вида

$$Hz(t) = \int_{-1}^{1} h(t,\tau)\,z(\tau)\,d\tau, \tag{1}$$

ядра $h(t,\tau)$ которых имеют суммируемые в квадрате на $[-1,1]\times[-1,1]$ частные производные

$$h^{(i,j)}(t,\tau) = \frac{\partial^{i+j}h(t,\tau)}{\partial t^i\partial\tau^j}, \quad i+j=r,$$

и для любого $\varphi\in L_2$

$$\sum_{i+j\le r}\left\|\int_{-1}^{1} h^{(i,j)}(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau\right\| \le \gamma\|\varphi\|.$$

Легко видеть, что для $H\in\overline{\mathfrak{H}}_\gamma^r$ операторы H и H^* принадлежат $\mathcal{L}(L_2, L_2^r)$ и

$$\|H\|_{0\to r}\le\gamma, \quad \|H^*\|_{0\to r}\le\gamma, \tag{2}$$

где H^* — оператор, сопряженный к H.

Введем в рассмотрение класс $\mathfrak{H}_\gamma^r$ операторов H из $\overline{\mathfrak{H}}_\gamma^r$ таких, что оператор H^*H имеет замкнутое ядро вида

$$h_1(t,\tau) = \int_{-1}^{1} h(u,t)\,h(u,\tau)\,du,$$

т. е. для любого $H \in \mathfrak{H}_\gamma^r$ собственные функции интегрального оператора $H^* H$ образуют полную систему в L_2.

Объектом нашего внимания будет уравнение

$$Hz = f, \tag{3}$$

где $H \in \mathfrak{H}_\gamma^r$, $f \in \operatorname{Range}(H) \equiv \{ f \colon f = H\varphi,\ \varphi \in L_2 \}$. Очевидно, это уравнение разрешимо. Однако, как правило, на практике вместо свободного члена $f \in \in \operatorname{Range}(H)$ мы имеем некоторое его приближение f_δ:

$$f_\delta \in L_2, \quad \| f - f_\delta \| \le \delta, \tag{4}$$

где δ — обычно известное малое число. Таким образом, вместо (3) известно уравнение

$$Hz = f_\delta. \tag{5}$$

В отличие от (3) уравнение (5) не всегда разрешимо, так как необязательно $f_\delta \in \operatorname{Range}(H)$. Но даже если это и так, то все равно решение этого уравнения нельзя принять за приближенное решение уравнения (3). Это связано с тем, что оператор H компактен, в силу чего он не является непрерывно обратимым. Поэтому сколь угодно малым изменениям f могут соответствовать сколь угодно большие изменения решения уравнения (3). Более того, в большинстве случаев сам оператор H тоже известен лишь приблизительно. Т. е. вместо H имеем оператор H_ε

$$H_\varepsilon = \mathcal{L}_2(L_2, L_2), \quad \| H - H_\varepsilon \|_{0 \to 0} \le \varepsilon. \tag{6}$$

Иными словами, мы рассматриваем некорректно поставленную задачу (см., например, [1, с. 9 – 10]).

Выход из такого положения дают методы регуляризации. Под методом регуляризации задачи (3) понимается (см., например, [2, с. 5]) некоторое правило $R_{\varepsilon,\delta}$, сопоставляющее каждой паре $\{H_\varepsilon, f_\delta\}$ элемент $R_{\varepsilon,\delta}(H_\varepsilon, f_\delta)$ такой, что

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0, \\ \delta \to 0}} \sup_{\substack{H_\varepsilon \in H[\varepsilon], \\ f_\delta \in f[\delta]}} \inf_{z \in H^{-1} f} \| z - R_{\varepsilon,\delta}(H_\varepsilon, f_\delta) \| = 0,$$

где через $f[\delta]$, $H[\varepsilon]$ обозначены множества, элементы которых удовлетворяют соответственно условиям (4) и (6), а $H^{-1} f$ — множество решений уравнения (3). В случае $\varepsilon = 0$ имеем $H_\varepsilon = H$ и $R_{\varepsilon,\delta}(H_\varepsilon, f_\delta) = R_\delta(H, f_\delta)$.

В теории некорректных задач важную роль играют множества

$$M_\rho(H) = \{ u \colon u = H^* H g,\ g \in L_2,\ \| g \| \le \rho \}.$$

Известно [2, с. 8], что если $f \in HM_\rho(H) \equiv \{ \varphi \colon \varphi = Hu,\ u \in M_\rho(H) \}$, то уравнение (3) имеет единственное решение $z = H^{-1} f$. Кроме того, для достаточно малых ε, δ и любого компактного $H \in \mathcal{L}(L_2, L_2)$ в [2, с. 44] получены следующие соотношения:

$$\inf_{R_{\varepsilon,\delta}} \sup_{f \in HM_\rho(H)} \sup_{\substack{H_\varepsilon \in H[\varepsilon], \\ f_\delta \in f[\delta],}} \| H^{-1} f - R_{\varepsilon,\delta}(H_\varepsilon, f_\delta) \| \asymp (\varepsilon + \delta)^{2/3}, \tag{7}$$

$$\inf_{R_\delta} \sup_{f \in HM_\rho(H)} \sup_{f_\delta \in f[\delta]} \| H^{-1} f - R_\delta(H, f_\delta) \| \asymp \delta^{2/3} \tag{8}$$

(инфимум берется по всевозможным методам регуляризации).

В дальнейшем будем рассматривать класс $\Psi_{\gamma,\rho}^r$ интегральных уравнений (3) с операторами $H \in \mathfrak{H}_\gamma^r$ и свободными членами $f \in HM_\rho(H)$.

2. Одним из наиболее известных методов регуляризации является метод Тихонова. Он состоит в том, что в качестве приближенных решений уравнения (3) принимаются экстремальные элементы вариационной задачи

$$\inf\{\|H_\varepsilon u - f_\delta\|^2 + \alpha\|u\|^2, u \in L_2\}, \quad \alpha > 0. \tag{9}$$

Как известно [1, с. 71], задача (9) разрешима единственным образом и ее решение совпадает с решением соответствующего ей уравнения Эйлера [1, с. 96]

$$\alpha u + H_\varepsilon^* H_\varepsilon u = H_\varepsilon^* f_\delta, \tag{10}$$

причем если зависимость α от ε и δ такова, что

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0, \\ \delta \to 0}} \alpha(\varepsilon, \delta) = 0, \quad \lim_{\substack{\varepsilon \to 0, \\ \delta \to 0}} \frac{(\varepsilon + \delta)^2}{\alpha(\varepsilon, \delta)} = 0, \tag{11}$$

то последовательность экстремальных элементов $u(\varepsilon, \delta, \alpha)$ при $\varepsilon \to 0, \cdot \delta \to 0$ сходится к $u_0 \in H^{-1}f$ по норме, где u_0 — решение наименьшей нормы уравнения (3).

Далее везде будем считать выполненными условия (11). Тогда ввиду (10) можно говорить, что методом регуляризации Тихонова называется правило $T_{\varepsilon,\delta}^\alpha$, сопоставляющее паре $\{H_\varepsilon, f_\delta\}$ элемент $T_{\varepsilon,\delta}^\alpha(H_\varepsilon, f_\delta) = (\alpha I + H_\varepsilon^* H_\varepsilon)^{-1} H_\varepsilon^* f_\delta$, где I — единичный оператор в L_2.

***Замечание* 1.** В случае, когда $\varepsilon = 0$ и $\alpha \asymp \delta^{2/3}$, для метода $T_\delta^\alpha(H, f_\delta) = (\alpha I + H^* H)^{-1} H^* f_\delta$ известно [2, с. 45], что

$$\sup_{f \in HM_\rho(H)} \sup_{f_\delta \in f[\delta]} \|H^{-1}f - T_\delta^\alpha(H, f_\delta)\| \asymp \delta^{2/3}. \tag{12}$$

Соотношение (12) с учетом (8) означает согласно определению в [1, с. 111], что метод T_δ^α является оптимальным (в смысле точности) на классе уравнений $\Psi_{\gamma,\rho}^r$.

***Замечание* 2.** Как видно из (7), (8) и замечания 1, для того, чтобы метод $T_{\varepsilon,\delta}^\alpha$ также был оптимальным по порядку на классе $\Psi_{\gamma,\rho}^r$, нужно выбрать $\alpha \asymp \delta^{2/3}$ и $\varepsilon \asymp \delta$.

Практическая реализация методов решения линейных некорректных задач — таких, как метод Тихонова, невозможна без использования ЭВМ. Это приводит естественным образом к „возмущению" оператора задачи (5), т. е. замене его некоторым конечномерным. Ниже будем рассматривать один из способов такой замены оператора, а также некоторую его модификацию.

3. Пусть F_N — пространство алгебраических полиномов степени не выше $N-1$, $N = 1, 2, \ldots$. Обозначим через P_N ортопроектор на F_N, сопоставляющий каждой функции $\varphi \in L_2$, N-ю частичную сумму ее ряда Фурье относительно ортогональной системы многочленов Лежандра на $[-1, 1]$ степени не выше N.

Известно, что для любых натуральных N и r

$$\|I - P_N\|_{r \to 0} \le d_r N^{-r}, \tag{13}$$

где d_r — некоторая постоянная, зависящая лишь от r.

Предложенный в [1, с. 179] проекционный метод решения задачи (5) заключается в сведении последней к конечномерной задаче

$$\inf\{\|P_m Hu - P_m f_\delta\|^2 + \alpha\|u\|^2,\ u\in F_n\},\quad m\le n, \tag{14}$$

а ее решение берется в качестве приближенного для уравнения (3).

Очевидно $u = P_n u$, следовательно, $P_m Hu = P_m HP_n u$ и тогда (14) можно переписать в виде

$$\inf\{\|P_m HP_n u - P_m f_\delta\|^2 + \alpha\|u\|^2,\ u\in F_n\}. \tag{15}$$

Запишем соответствующее уравнение Эйлера для (15)

$$\alpha u + (P_m HP_n)^* P_m HP_n u = (P_m HP_n)^* P_m f_\delta$$

и, раскрыв скобки, получим

$$\alpha u + P_n H^* P_m HP_n u = P_n H^* P_m f_\delta. \tag{16}$$

Обозначим этот метод через T_{proj}. Легко видеть, что метод T_{proj}, по сути, состоит в применении метода регуляризации Тихонова (9) к „возмущенному" уравнению $P_m HP_n u = P_m f_\delta$. В силу замечания 2 для того, чтобы в рамках метода T_{proj} гарантировать на классе уравнений $\Psi^r_{\gamma,\rho}$ оптимальный порядок погрешности $\delta^{2/3}$, нужно чтобы

$$\sup_{H\in\mathfrak{H}^r_\gamma}\|H - P_m HP_n\|_{0\to 0} \asymp \delta. \tag{17}$$

С другой стороны, известно, что

$$\sup_{H\in\mathfrak{H}^r_\gamma}\ \inf_{H_N,\ \operatorname{rank} H_N\le N}\|H - H_N\|_{0\to 0} \asymp N^{-r}.$$

Учитывая последнее соотношение и то обстоятельство, что при $m\le n$ $\operatorname{rank} P_m HP_n = m$, приходим к заключению, что для справедливости (17) необходимо выбрать

$$m \asymp \delta^{-1/r}. \tag{18}$$

4. Суть модификации метода T_{proj} заключается в том, что вместо уравнения (16) предлагается решать слегка измененное уравнение

$$\alpha u + P_n H^* P_m HP_n u = P_n H^* f_\delta \tag{19}$$

и в качестве приближенного решения (3) брать соответственно элемент $T_{\text{mod}}(H, f_\delta) = (\alpha I + P_n H^* P_m HP_n)^{-1} P_n H^* f_\delta$.

Лемма. *Справедлива оценка*

$$\|T^\alpha_\delta(H, f_\delta) - T_{\text{mod}}(H, f_\delta)\| \le$$

$$\le c_1\alpha^{-1}n^{-r} + c_2\alpha^{-2}n^{-2r} + c_3\alpha^{-3/2}m^{-2r},$$

где c_1, c_2, c_3 *— константы, зависящие лишь от* γ, ρ *и* r.

Доказательство. Легко показать, что

$$(\alpha I + H^* H)^{-1} H^* f_\delta - (\alpha I + P_n H^* P_m HP_n)^{-1} P_n H^* f_\delta =$$

$$= (\alpha I + P_n H^* P_m HP_n)^{-1}(\alpha(I - P_n) +$$

$$+ P_nH^*P_mH(P_n-I) + P_nH^*(P_m-I)H)(\alpha I + H^*H)^{-1}H^*f_\delta. \tag{20}$$

Так как оператор $P_nH^*P_mHP_n$ является положительным и самосопряженным, то [1, с. 63]

$$\|(\alpha I + P_nH^*P_mHP_n)^{-1}\|_{0\to 0} \le \frac{1}{\alpha}. \tag{21}$$

Обозначим для краткости $G \equiv (\alpha I + H^*H)^{-1}H^*$. В [1, с. 102] доказано неравенство

$$\|G\|_{0\to r} \le \frac{1}{2\alpha^{1/2}}. \tag{22}$$

Следуя той же схеме доказательства, что и в [1], можно показать, что для $H \in \mathfrak{H}_\gamma^r$

$$\|G\|_{0\to r} \le \frac{\gamma}{\alpha}. \tag{23}$$

Кроме того, очевидно, что для $H \in \mathfrak{H}_\gamma^r$ и $f \in HM_\rho(H)$ норма элемента f_δ в пространстве L_2 ограничена константой

$$\|f_\delta\| \le \gamma^3\rho + c, \quad c \ge \delta. \tag{24}$$

Теперь, учитывая (2), (23), оцениваем следующие нормы:

$$\|\alpha(I-P_n)G\|_{0\to 0} \le \alpha\|I-P_n\|_{r\to 0}\|G\|_{0\to r} \le \gamma\|I-P_n\|_{r\to 0}, \tag{25}$$

$$\|P_nH^*P_mH(P_n-I)G\|_{0\to 0} =$$

$$= \sup_{\substack{\varphi,\psi\in L_2,\\ \|\varphi\|\le 1,\ \|\psi\|\le 1}} (P_nH^*P_mH(P_n-I)(P_n-I)G\varphi, \psi) =$$

$$= \sup_{\substack{\varphi,\psi\in L_2,\\ \|\varphi\|\le 1,\ \|\psi\|\le 1}} ((I-P_n)G\varphi, (I-P_n)H^*P_mHP_n\psi) \le$$

$$\le \|I-P_n\|_{r\to 0}\|G\|_{0\to r}\|I-P_n\|_{r\to 0}\|H^*\|_{0\to r}\times$$

$$\times\|P_m\|_{0\to 0}\|H\|_{0\to 0}\|P_n\|_{0\to 0} \le$$

$$\le \gamma^3\alpha^{-1}\|I-P_n\|^2_{r\to 0}. \tag{26}$$

С учетом (22) аналогично находим

$$\|P_nH^*(P_m-I)HG\|_{0\to 0} \le$$

$$\le \|P_n\|_{0\to 0}\|H^*\|_{0\to r}\|I-P_m\|_{r\to 0}\|I-P_m\|_{r\to 0}\|H\|_{0\to r}\|G\|_{0\to 0} \le$$

$$\le 2^{-1}\gamma^2\alpha^{-1/2}\|I-P_m\|^2_{r\to 0}. \tag{27}$$

Доказательство леммы следует теперь непосредственно из представления (20), соотношения (13) и оценок (21), (24)–(27).

Теорема. *Для того чтобы метод* T_{mod} *решения задачи* (5) *был оптимальным по порядку на классе* $\Psi^r_{\gamma,\rho}$, *достаточно выбрать* $\alpha \asymp \delta^{2/3}$, $m \asymp \delta^{-5/6r}$ *и* $n \asymp \delta^{-4/3r}$.

Доказательство. Очевидна оценка

$$\|H^{-1}f - T_{\text{mod}}(H, f_\delta)\| \le \|H^{-1}f - T_\delta^\alpha(H, f_\delta)\| + \\ + \|T_\delta^\alpha(H, f_\delta) - T_{\text{mod}}(H, f_\delta)\|. \tag{28}$$

В силу (8), замечания (1) и оценки (28) приходим к выводу, что для оптимальности метода T_{mod} достаточно выбрать $\alpha \asymp \delta^{2/3}$ и

$$\|T_\delta^\alpha(H, f_\delta) - T_{\text{mod}}(H, f_\delta)\| \asymp \delta^{2/3}.$$

Но тогда из утверждения леммы и последнего соотношения вытекает

$$(\delta^{-2/3}n^{-r} + \delta^{-4/3}n^{-2r} + \delta^{-1}m^{-2r}) \asymp \delta^{2/3}. \tag{29}$$

Отсюда окончательно получаем $n^{-r} \asymp \delta^{4/3}$ и $m^{-r} \asymp \delta^{5/6}$ (порядок второго слагаемого в левой части (29) в таком случае очевидно будет выше, поэтому им можно пренебречь). Теорема доказана.

5. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ — ортонормированная система многочленов Лежандра. При реализации метода T_{mod} будем искать решение уравнения (19) в виде

$$u = T_{\text{mod}}(H, f_\delta) = \alpha^{-1} P_n H^* \left(f_\delta - \sum_{k=1}^m u_k e_k \right), \tag{30}$$

где u_k — неизвестные числа. Подставив это выражение в (19) и произведя соответствующие преобразования, легко убедиться в том, что набор чисел $\{u_k\}$, являющийся решением системы уравнений

$$\alpha u_k + \sum_{i=1}^m u_i (H^* e_k, P_n H^* e_i) = (H^* e_k, P_n H^* f_\delta), \quad k = \overline{1, m}, \tag{31}$$

будет удовлетворять соотношению (30). Таким образом, уравнение (19) сводится к решению системы из m линейных алгебраических уравнений с m неизвестными.

Величины $(H^* f_\delta, e_i)$, $(H^* e_k, e_i)$, $k = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n}$, полагаем известными. Раскроем ортопроекторы P_n в коэффициентах и свободных членах выражения (31):

$$(H^* e_k, P_n H^* e_i) = \sum_{j=1}^n (H^* e_k, e_j)(H^* e_i, e_j), \quad k = \overline{1, m},$$

$$(H^* e_k, P_n H^* f_\delta) = \sum_{j=1}^n (H^* e_k, e_j)(H^* f_\delta, e_j), \quad k = \overline{1, m}.$$

Легко видеть, что для подсчета коэффициентов и свободных членов потребуется выполнить $N_1 \asymp nm$ операций над числами вида $(H^* f_\delta, e_i)$, $(H^* e_k, e_i)$.

Для решения системы (31) (например, методом Гаусса), как известно, требуется выполнить $N_2 \asymp m^3$ операций над указанными выше коэффициентами.

Раскроем теперь ортопроектор в уравнении (30):

$$u = T_{\text{mod}}(H, f_\delta) =$$

$$= \sum_{j=1}^n e_j \alpha^{-1} \left((H^* f_\delta, e_j) - \sum_{k=1}^m u_k (H^* e_k, e_j) \right) = \sum_{j=1}^n e_j \beta_j .$$

Для подсчета коэффициентов β_j, очевидно, потребуется выполнить $N_3 \asymp \asymp nm$ операций.

Таким образом, для представления решения уравнения (19) в виде разложения по базису $\{e_k\}$ потребуется выполнить $N = N_1 + N_2 + N_3$ операций над числами $(H^* f_\delta, e_i)$, $(H^* e_k, e_i)$, $k = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n}$.

При оптимальном по порядку методе T_{mod}, как следует из теоремы, достаточно выполнить число операций, равное

$$N \asymp nm + m^3 + nm \asymp \delta^{-4/3r} \delta^{-5/6r} + (\delta^{-5/6r})^3 \asymp$$

$$\asymp \delta^{-13/6r} + \delta^{-5/2r} \asymp \delta^{-5/2r}. \tag{32}$$

При оптимальном по порядку методе T_{proj}, даже если выбрать наименьшее n, т. е. $n = m$, уравнение (16) сводится к решению системы размерности n, матрица которой имеет тот же вид, что и матрица системы (31). При этом приближенное решение также получается в виде разложения по базису $\{e_k\}$. Но в силу (18) для решения указанной системы тем же методом Гаусса понадобится выполнить $N \asymp n^3 \asymp (\delta^{-1/r})^3 \asymp \delta^{-3/r}$ операций над теми же числами. Сравнение этой величины с (32) дает основание утверждать, что метод T_{mod} экономичен не только в размерности возникающей системы, но и в числе операций, требуемых для нахождения приближенного решения.

1. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. – М.: Наука, 1978. – 207 с.
2. *Вайникко Г.* Методы решения линейных некорректных задач в гильбертовых пространствах. – Тарту: Изд-во Тарт. ун-та, 1982. – 110 с.

Получено 16.02.94